Prova de Recuperação — PMR3201 1o. semestre 2016

Prof. Thiago Martins

Instruções: Escreva o nome e o número USP na folha de papel almaço. Numere cada página. Indique o total de páginas na primeira página. Os códigos fornecidos na seção "Códigos-fonte de apoio" podem ser referenciados em qualquer resposta sem necessidade de reprodução.

1. (2,0 pontos) A codificação de Hoffman codifica símbolos em cadeias de *bits* organizando-os em árvores binárias a partir de sua distribuição relativa de modo a minimizar a quantidade de *bits* necessária para codificar uma mensagem com estes símbolos.

(a) (1,0 pontos) A tabela 1 mostra a quantidade de vitórias por país na natação masculino dos jogos olímpicos de 2008. Construa o código de Hoffman que codifica o país vitorioso usando esta distribuição. Quantos bits seriam necessários no total para codificar os vitoriosos de cada prova?

Tabela 1:

País	Vitórias
USA	14
AUS	5
NED	5
ITA	3
UKR	2
ROM	2
SWE	1
HUN	1

Resposta: A árvore de código de Horner é a seguinte:

E o código equivalente é:

País	código	tam.
USA	`1`	1
AUS	`000`	3
NED	`001`	3
ITA	`0100`	4
UKR	`0101`	4
ROM	`0110`	4
SWE	`01110`	5
HUN	`01111`	5

Com esta codificação a quantidade total de bits para codificar os vencedores de 2008 é $14 \times 1 + 5 \times 3 + 5 \times 3 + 3 \times 4 + 2 \times 4 + 2 \times 4 + 1 \times 5 + 1 \times 5 = 82$ bits ou aproximadamente 2,5 bits por prova.

(b) (1,0 pontos) As tabelas abaixo indicam propostas de codificação para os símbolos 'A', 'B', 'C', 'D', e 'E'.
Quais delas seriam possíves codificações de Hoffman para estes símbolos?
Quais não poderiam sê-lo? Justifique a sua resposta.

Código 1

A	`001`
B	`010`
C	`011`
D	`100`
E	`101`

Código 2

A	`0`
B	`01`
C	`001`
D	`0001`
E	`00001`

Código 3

A	`01`
B	`10`
C	`10`
D	`11`
E	`011`

Código 4

A	`0`
B	`10`
C	`110`
D	`1110`
E	`11110`

Resposta: Códigos de Hoffman podem ser interpretados como caminhos em uma árvore binária na qual os símbolos codificados estão em *folhas*. Disso segue que nenhum código para um símbolo pode ser prefixo para outro. Deste modo o código 2 não pode ser um código de Hoffman, visto que o código do símbolo 'A' é prefixo para os símbolos seguintes. Do mesmo modo, o código 3 não pode ser código de Hoffman, visto que o código do símbolo 'A' é prefixo para o símbolo 'E'. Os códigos 1 e 4 pódem ser códigos de Hoffman.

2. (2,0 pontos) O código abaixo apresenta uma implementação do algoritmo de ordenação mergesort:

```
,
1  static void mergesort(int a[]) {
2      int temp[]=new int[a.length];
3      mergesort(a, temp, 0, a.length-1);
4  }
5
6  static void mergesort(int a[], int temp[],  int left, int right) {
7      if (left<right) {
8          int center=(left+right)/2;
9          mergesort(a, temp, left, center);
10         mergesort(a, temp, (center+1), right);
11         merge(a, temp, left, center, (center+1), right);
12     }
13 }
14
15 static void merge(int a[], int temp[], int leftStart, int leftEnd, int rightStart, int rightEnd) {
16     int start=leftStart;
17     int aux=start;
18     while((leftStart<=leftEnd) &&(rightStart<=rightEnd)) {
19         if(a[leftStart]<a[rightStart])
20             temp[aux++]=a[leftStart++];
21         else
22             temp[aux++]=a[rightStart++];
23     }
24     while (leftStart<=leftEnd) temp[aux++]=a[leftStart++];
25     while (rightStart<=rightEnd) temp[aux++]=a[rightStart++];
26     for (int i=start; i<=rightEnd; i++) a[i]=temp[i];
27 }
```

A função `mergesort(int a[])` ordena em ordem crescente o vetor de inteiros `a` dividindo-o recursivamente em sub-vetores e mesclando-os dois a dois de forma a garantir a ordenação. Mostre o funcionamento da função `mergesort` sobre o vetor $\{6,5,4,3,2,1\}$ indicando o conteúdo do vetor `a` a cada vez que uma chamada da função auxiliar `mergesort` da linha 6 *retorna* (ou seja, mostre o estado do vetor ao *final* da chamada da função). Note que a função auxiliar é invocada *várias* vezes durante a ordenação do vetor. A ordem correta em que os laços na linha 26 são executados é *fundamental* na sua resposta!

Resposta:
654321
654321
564321
564321
456321
456321
456321
456231
456231
456123
123456

3. (2,0 pontos) A listagem a seguir mostra uma implementação do método de Horner para avaliação de polinômios

```
1      static float horner(float x, float[] a) {
2         float res = 0;
3         for(int i=a.length-1;i>=0;i--) {
4             res += x*res + a[i];
5         }
6         return res;
7     }
```

Onde `a` é o vetor $\{a_0, \ldots, a_n\}$ de coeficientes do polinômio (com $n = \texttt{a.length} - 1$) e `x` é o valor x sobre o qual o polinômio é calculado. O valor do polinômio é

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Mostre que o algoritmo está correto, ou seja, a função efetivamente retorna o valor $p(x)$.

Resposta: No laço da linha 3 faz a `i` *decresce* unitariamente de $n = \texttt{a.length} - 1$ a 0. Seja i o valor da variável `i` a cada iteração. Do mesmo modo, seja p_i o valor da variável `res` ao final da iteração na qual a variável `i` vale i. A regra de recorrência para p_i é:

$$p_{i-1} = x \cdot p_i + a_{i-1}$$

Mostra-se que

$$p_i = \frac{\sum_{j=i}^{n} a_j x^j}{x^i}$$

De fato, ao final da primeira iteração, com $i = n$, $p_n = a_n = \frac{\sum_{j=n}^{n} a_j x^j}{x^n}$.
Por outro lado, se existe i para o qual a relação é verdadeira, então, pela lei de iteração,

$$p_{i-1} = x\frac{\sum_{j=i}^{n} a_j x^j}{x^i} + a_{i-1} = \frac{\sum_{j=i}^{n} a_j x^j}{x^{(i-1)}} + a_{i-1} = \frac{\sum_{j=(i-1)}^{n} a_j x^j}{x^{(i-1)}}$$

Ou seja, se ela é válida para i, também é válida para $i - 1$. Por outro lado, ao final da última iteração, $i = 0$ e $p_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, que é o valor procurado.

4. (2,0 pontos) Considere o código abaixo:

```
1     static void mostraNos(NoArvoreBinaria raiz) {
2         Pilha p = new Pilha();
3         NoArvoreBinaria no;
4         p.push(raiz);
5         p.push('D');
6         do {
7             char c = (char)p.pop();
8             if(c=='D') {
9                 no = (NoArvoreBinaria)p.top();
10                p.push('E');
11                while(no!=null) {
12                    no = no.esquerda;
13                    p.push(no);
14                    p.push('E');
15                }
16            } else {
17                no = (NoArvoreBinaria)p.pop();
18                if(no!=null) {
```

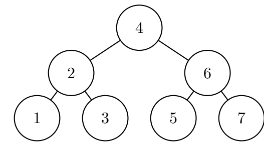
```
19                  System.out.println(no.valor);
20                  p.push(no.direita);
21                  p.push('D');
22              }
23          }
24      } while(!p.PilhaVazia());
25  }
```

Este código usa as classes `Pilha` e `NoArvoreBinaria`.

A classe `NoArvoreBinaria` representa um nó de árvore binária. O campo `valor` contém o valor armazenado no nó. Os campos `esquerda` e `direita` são referências para as sub-árvores esquerda e direita respectivamente.

A classe `Pilha` representa uma pilha que armazena dados *genéricos* (como referências para o tipo de dado `Object`). Seu construtor cria uma nova pilha vazia. O método `push(Object x)` empilha um novo objeto na pilha. O método `pop()` retira e retorna o objeto no topo da pilha. O método `top()` retorna o objeto no topo da pilha *sem modificá-la*. O método `PilhaVazia()` retorna verdadeiro caso a pilha esteja vazia, falso caso contrário.

(a) (1,0 pontos) Mostre *na sequência correta* o estado da pilha `p` a cada vez que as instruções da linha 5, 14 e 21 são executadas (imediatamente após a execução das mesmas) quando o parâmetro `raiz` aponta para o nó raiz da árvore ilustrada à direita:



Resposta:

4	D						
4	E						
4	E	2	E				
4	E	2	E	1	E		
4	E	2	E	1	E	NULL	E
4	E	2	E	NULL	D		
4	E	2	E	NULL	E		
4	E	3	D				
4	E	3	E				
4	E	3	E				
4	E	3	E	NULL	E		
4	E	NULL	D				
4	E	NULL	E				
6	D						
6	E						
6	E	5	E				
6	E	5	E	NULL	E		
6	E	NULL	D				
6	E	NULL	E				
7	D						
7	E						
7	E	NULL	E				
NULL	D						
NULL	E						

(b) (1,0 pontos) Em que ordem os nós da árvore são apresentados?

Resposta: Na ordem *interior* (primeiro o nó à esquerda é visitado, depois o nó raiz, depois o nó à direita).

5. (2,0 pontos) Escreva uma função que determina se em um vetor X *ordenado* em ordem crescente há 2 inteiros que somam *exatamente* y. Use a seguinte assinatura:

```
boolean existeSoma(int y, int[] x);
```

onde `x` é o vetor X de inteiros ordenado em ordem crescente e `y` é o número y que seve se igualar exatamente à soma de dois componentes de X. A função deve retornar verdadeiro se existem tais componentes ou falso caso contrário. Um algoritmo com complexidade *melhor* do que $\mathcal{O}\left(N^2\right)$ vale 2 pontos, complexidades iguais ou piores valem 1 ponto.

Resposta: A solução envolve varrer o vetor elemento a elemento e verificar se ele somado a algum dos subsequentes dá exatamente y. Como os elementos subsequentes estão ordenados em ordem crescente, esta busca pode ser feita com complexidade $\mathcal{O}(\log N)$. A complexidade total é $\mathcal{O}(N \log N)$

```
'
    static boolean existeSoma(int y, int[] x) {
      for(int i=0;i<x.length;i++) {
          int esquerda = i+1;
          int direita = x.length-1;
          while(esquerda<=direita) {
              int meio=(esquerda+direita)/2;
              if(y==x[i]+x[meio]) return true;
              else if(y<=x[i]+x[meio]) direita=meio-1;
              else esquerda = meio+1;
          }
      }
      return false;
  }
```

É possível também obter uma solução com complexidade *linear*. De fato, como a sequência é ordenada, se a soma dos seus *extremos* é menor do que o número y, não pode existir nenhum outro número na sequência que somado ao seu primeiro produza y. Um argumento similar pode ser feito para o último elemento.

```
'
  static boolean existeSoma(int y, int[] x) {
      int e = 0;
      int d = x.length-1;
      while(d>e) {
          if(x[e]+x[d]>y) {
              d--;
          } else if(x[e]+x[d]<y) {
              e++;
          } else return true;
      }
      return false;
  }
```

Códigos-fonte de apoio

Classe `Pilha`

,

```
public class Pilha {
   public class ErroPilhaVazia extends java.lang.RuntimeException {}

   private NoListaLigada topo;

   public Pilha() {
   }

   public void push(Object x) {
       this.topo = new NoListaLigada(x, this.topo);
   }

   public Object pop() {
      if (topo == null) throw new ErroPilhaVazia();
      Object x = topo.value;
      topo = topo.next;
      return x;
   }

   public Object top() {
      if (topo==null) throw new ErroPilhaVazia();
      return topo.value;
   }

   public boolean PilhaVazia() {
       return topo==null;
   }
}
```

Classe `NoListaLigada`:

,

```
public class NoListaLigada {
    public Object value;
    public NoListaLigada next;

    NoListaLigada(Object value, NoListaLigada next) {
        this.value = value; this.next = next;
    }
}
```

Classe `NoArvoreBinaria`

,

```
  public class NoArvoreBinaria {
    public int valor;
    public NoArvoreBinaria esquerda, direita;
 }
```