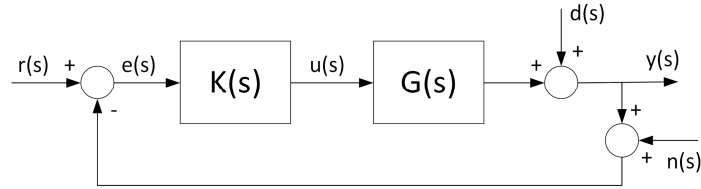


Exemplo: Especificações de desempenho

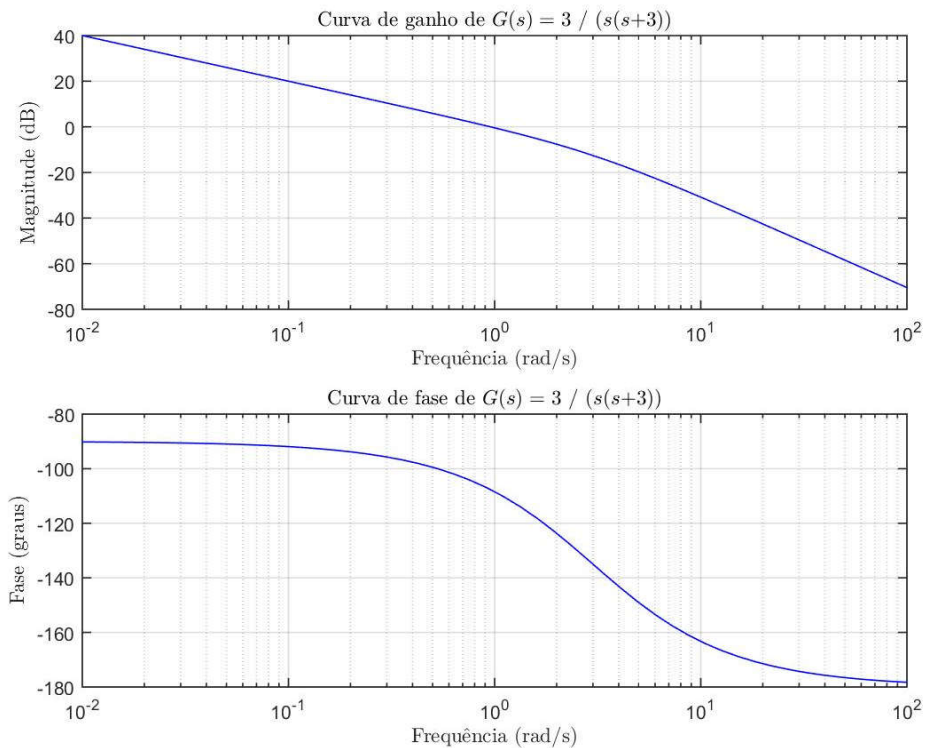
Considere o sistema representado abaixo:



e suponha que

$$G(s) = \frac{3}{s(s+3)},$$

que apresenta o seguinte Diagrama de Bode:



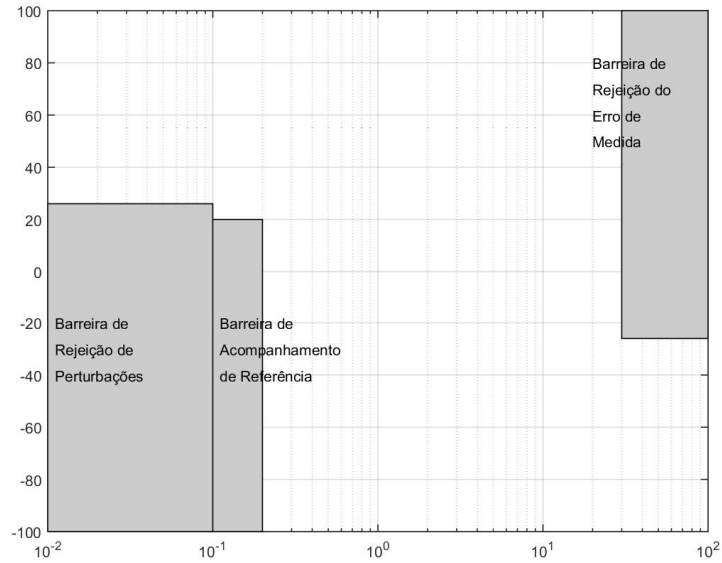
São dadas as seguintes especificações de desempenho em baixas frequências:

- acompanhamento do sinal de referência com erro máximo de 10% para frequências até $\omega = 0,2$ rad/s;
- rejeição de perturbação com erro máximo de 5% para frequências até $\omega = 0,1$ rad/s;

e em altas frequências:

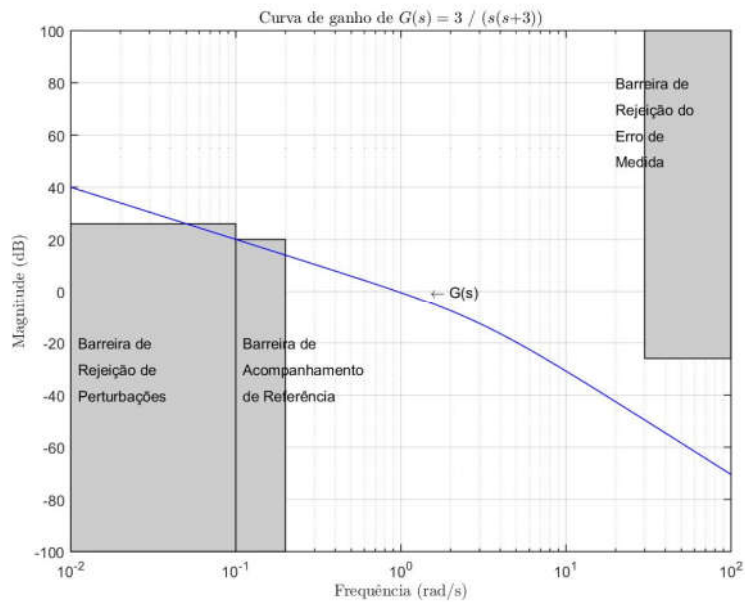
- rejeição de erro de medida com erro máximo de 5% para frequências a partir de $\omega = 30$ rad/s.

As barreiras de desempenho estão ilustradas na figura abaixo:

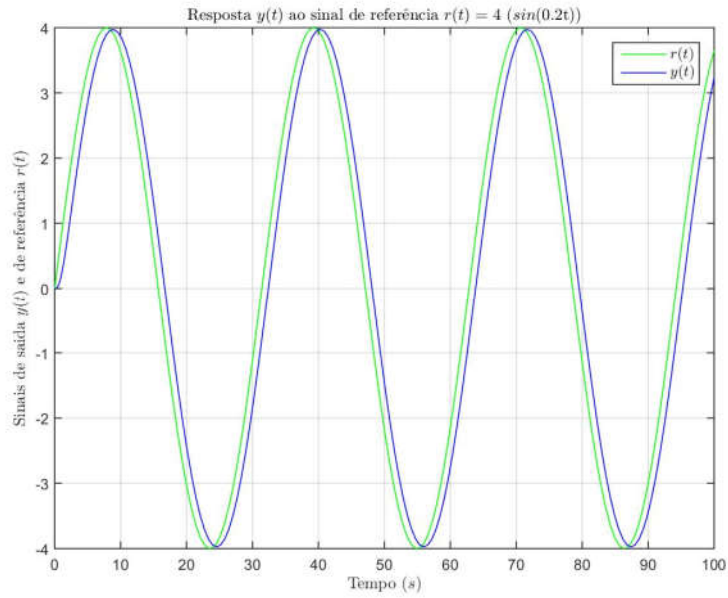


Note que a malha fechada é estável.

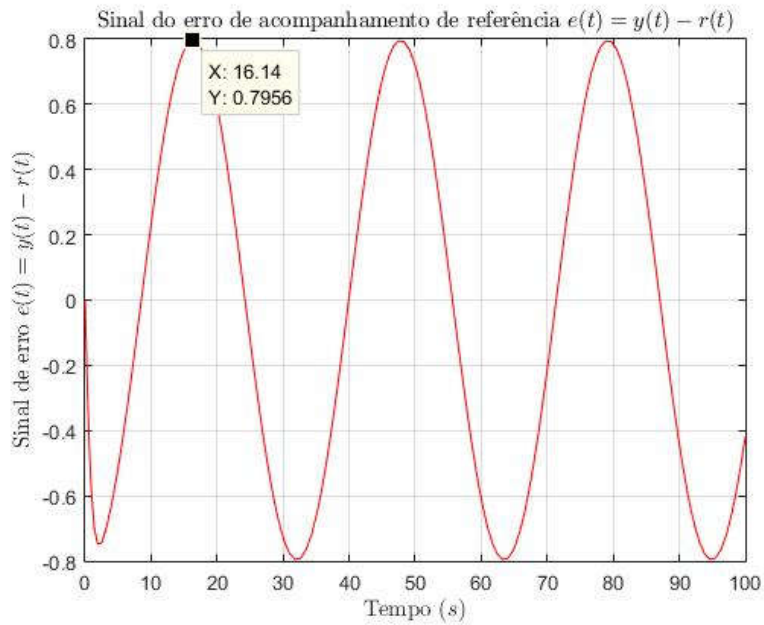
e considerando apenas a planta $G(s)$ (ou seja, $K(s) = 1$), observa-se que as barreiras de acompanhamento de referência e de rejeição de perturbações não são respeitadas:



o que reflete na resposta do sistema, como pode ser observado no exemplo abaixo em que um sinal de referência senoidal $r(t) = 4\sin(0,2t)$ é inserido no sistema:



apresentando um erro $\approx |0,795|$, que está acima da especificação de desempenho de acompanhamento do sinal de referência (neste exemplo, $10\% \rightarrow e(t)_{max} = |0,4|$):



da amplitude

Pode-se também chegar à essa conclusão calculando o valor do ~~ganho~~ do erro de acompanhamento do sinal de referência $|e(j\omega)|$ em $\omega = 0,2$ rad/s:

$$e(j\omega) = \frac{1}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} r(j\omega) = \frac{1}{1 + G(j\omega)} r(j\omega) \xrightarrow{\omega=0,2\text{rad/s}}$$

$$|e(j\omega)|_{\omega=0,2} = \frac{1}{|1 + G(j\omega)|_{\omega=0,2}} \underbrace{|r(j\omega)|_{\omega=0,2}}_{|4|} = \frac{4}{\left|1 + \frac{3}{0,2j(0,2j + 3)}\right|} = \frac{4}{\left|1 + \frac{3}{-0,04 + 0,6j}\right|} =$$

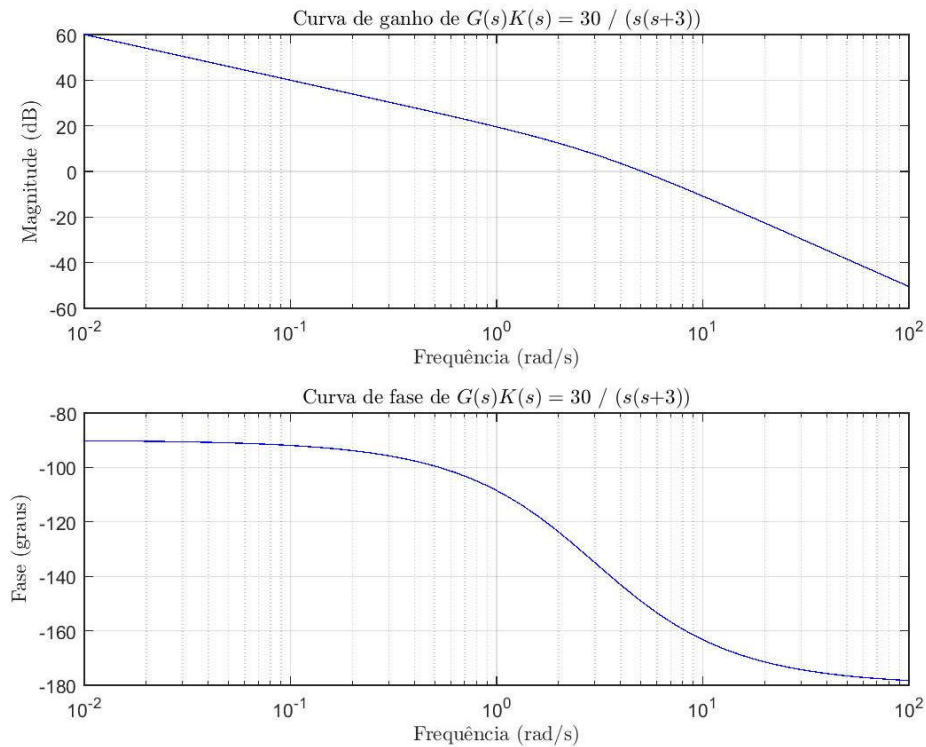
$$= \frac{4}{\left|1 + \frac{3}{0,06013/1,6374}\right|} = \frac{4}{|1 + 4,9892/-1,6374|} = \frac{4}{|0,6681 - 4,9779j|} = \frac{4}{5,0225} \Rightarrow$$

$$|e(j\omega)|_{\omega=0,2} \approx 0,7964$$

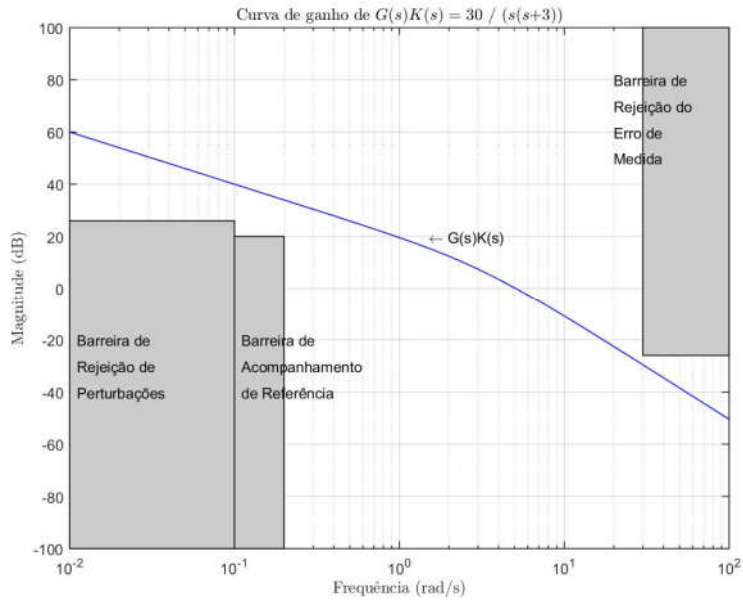
Agora ao considerar um controlador $K(s) = 10$, a função de transferência de malha aberta se torna:

$$G(s)K(s) = \frac{30}{s(s+3)}$$

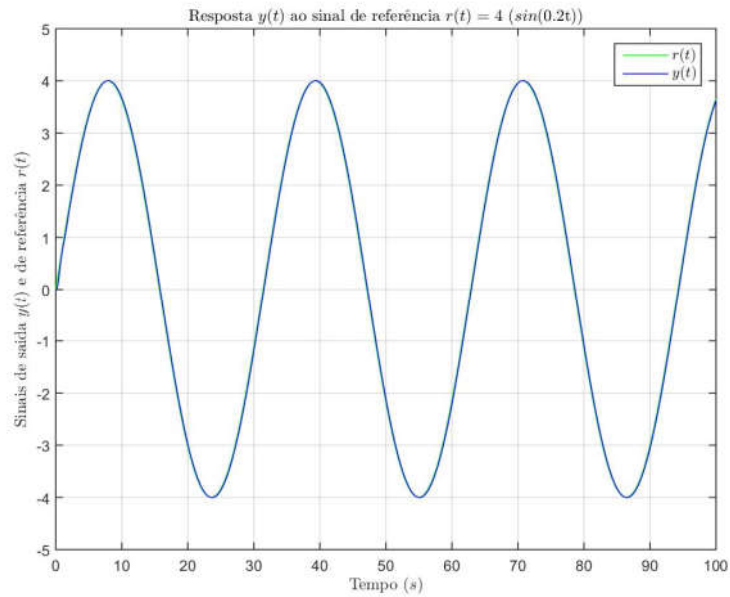
e continua estável com os dois polos no semi plano esquerdo fechado. O Diagrama de Bode de $G(s)K(s)$:



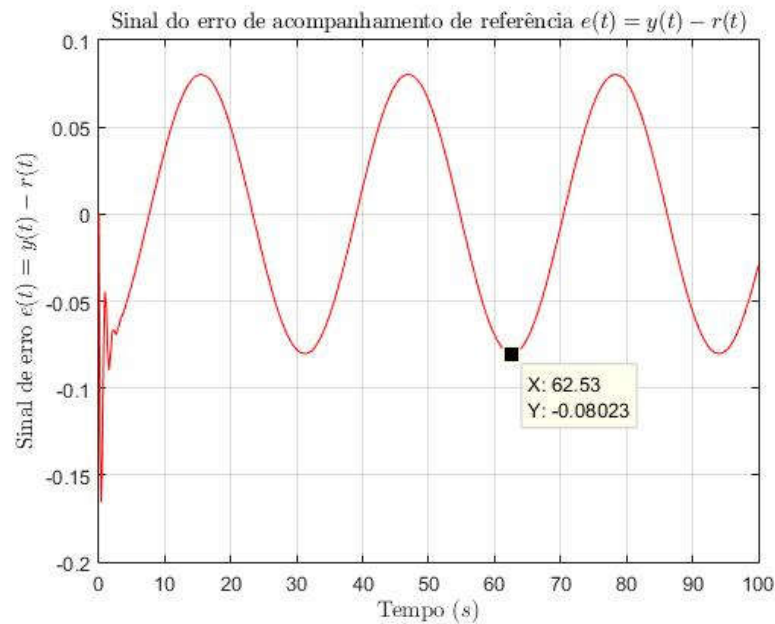
Considerando as condições de desempenho observa-se que as barreiras são respeitadas:



refletindo na resposta do sistema, como pode ser observado repetindo o exemplo do sinal de referência senoidal $r(t) = 4\sin(0,2t)$:



apresentando agora um erro $\approx |0.08|$, que está dentro da especificação de desempenho de acompanhamento de sinal de referência ($e(t)_{max} = |0,4|$):



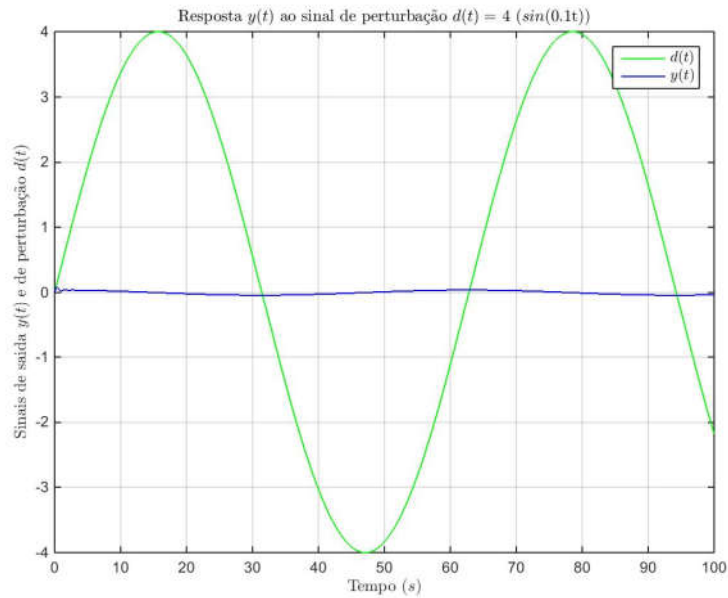
Calculando o valor do ganho do erro de acompanhamento de sinal de referência $|e(j\omega)|$ em $\omega = 0,2 \text{ rad/s}$:

$$\begin{aligned}
 |e(j\omega)|_{\omega=0,2} &= \frac{1}{|1 + G(j\omega)|_{\omega=0,2} K(j\omega)|_{\omega=0,2}} \underbrace{|r(j\omega)|_{\omega=0,2}}_{|4|} = \frac{4}{\left|1 + \frac{30}{0,2j(0,2j + 3)}\right|} = \\
 &= \frac{4}{\left|1 + \frac{30}{-0,04 + 0,6j}\right|} = \frac{4}{\left|1 + \frac{30}{0,06013/1,6374}\right|} = \frac{4}{|1 + 49,8919/-1,6374|} = \\
 &= \frac{4}{|-2,3205 - 49,7813j|} = \frac{4}{49,8353} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

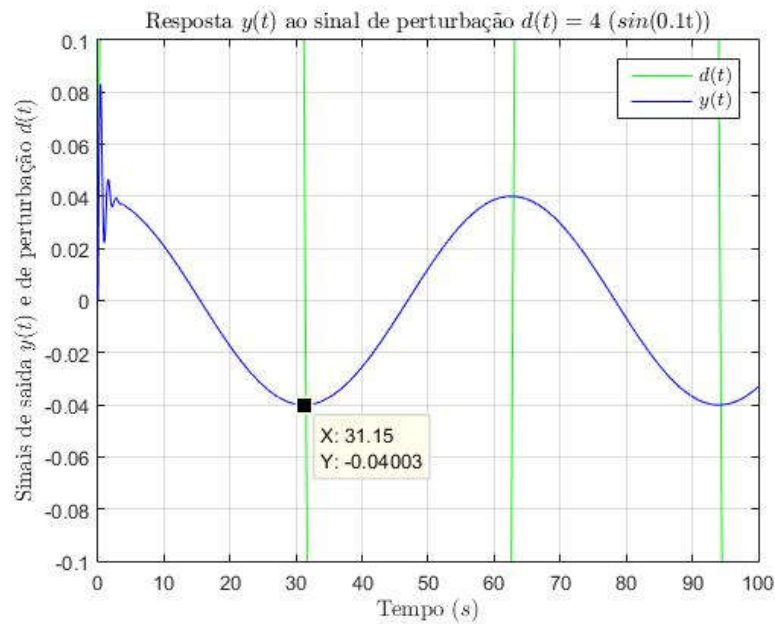
$$|e(j\omega)|_{\omega=0,2} \approx 0,0803$$

O mesmo ocorre para as outras especificações de desempenho: quando um sinal de perturbação $d(t) = 4\sin(0,1t)$ é inserido no sistema:

na saída do



a saída apresenta uma variação máxima de amplitude $\approx |0,04|$, como pode ser visto na visão ampliada da figura acima:



que está dentro da especificação de desempenho de rejeição de perturbação (neste exemplo, $5\% \rightarrow |0,2|$).

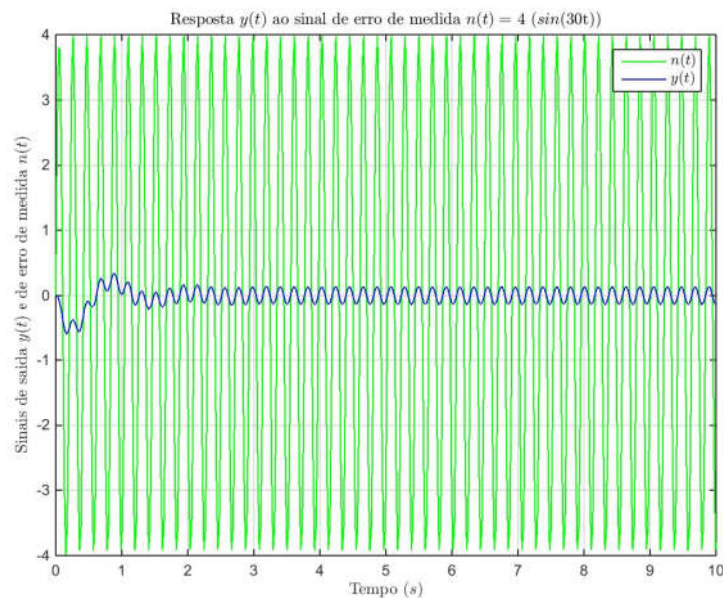
da amplitude

Pode-se também chegar à essa conclusão calculando o valor de ~~ganho~~ do sinal de saída $|y(j\omega)|$ em $\omega = 0,1$ rad/s:

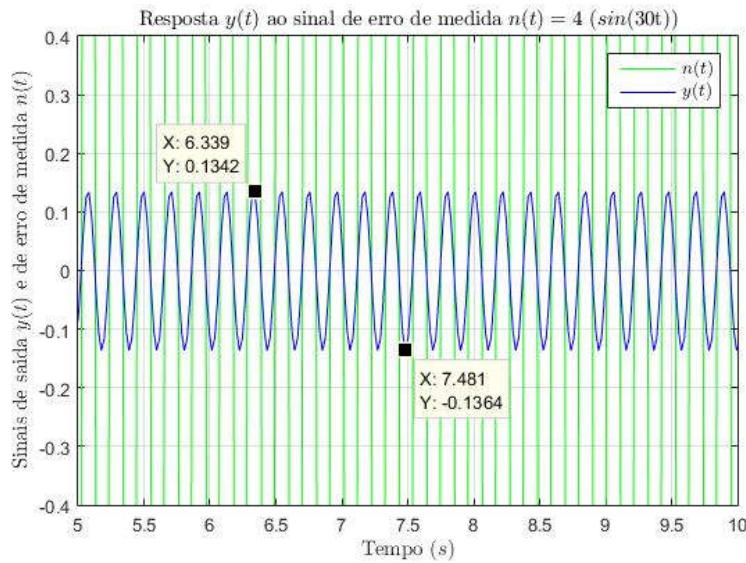
$$\begin{aligned}
 y(j\omega) &= \frac{1}{1 + G(j\omega)K(j\omega)} d(j\omega) \xrightarrow{\omega=0,1\text{rad/s}} \\
 |y(j\omega)|_{\omega=0,1} &= \frac{1}{|1 + G(j\omega)|_{\omega=0,1} |K(j\omega)|_{\omega=0,1}} \underbrace{|d(j\omega)|_{\omega=0,1}}_{|4|} = \frac{4}{\left|1 + \frac{30}{0,1j(0,1j + 3)}\right|} = \\
 &= \frac{4}{\left|1 + \frac{30}{-0,01 + 0,3j}\right|} = \frac{4}{\left|1 + \frac{30}{0,3002/1,6041}\right|} = \frac{4}{|1 + 99,9445/-1,6041|} = \\
 &= \frac{4}{|-2,3279 - 99,8891j|} = \frac{4}{99,9162} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$|y(j\omega)|_{\omega=0,1} \approx 0,04$$

E ao inserir um sinal de erro de medida $n(t) = 4\sin(30t)$ no sistema:



a saída apresenta uma variação máxima de amplitude $\approx |0,135|$, como pode ser visto na visão ampliada da figura acima:



que está dentro da especificação de desempenho de rejeição de erro de medida (neste exemplo, $5\% \rightarrow |0,2|$).

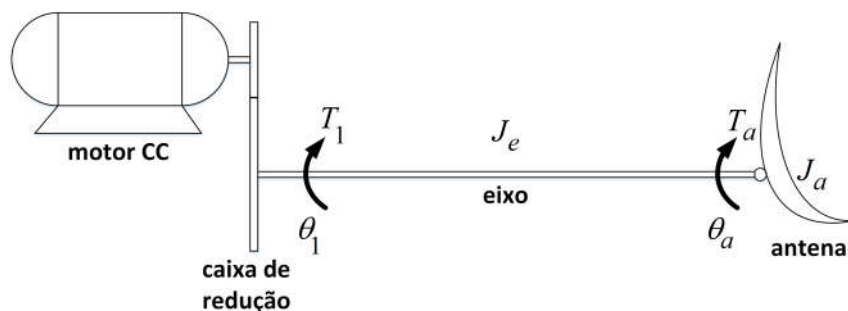
Pode-se novamente chegar à mesma conclusão calculando o valor ~~do ganho~~ do sinal de saída $|y(j\omega)|$ em $\omega = 30$ rad/s:

$$\begin{aligned}
 y(j\omega) &= -\frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1 + G(j\omega)K(j\omega)}n(j\omega) \xrightarrow{\omega=30\text{rad/s}} \\
 |y(j\omega)|_{\omega=30} &= \frac{|-G(j\omega)|_{\omega=30}K(j\omega)|_{\omega=30}|}{|1 + G(j\omega)|_{\omega=30}K(j\omega)|_{\omega=30}|} \underbrace{|n(j\omega)|_{\omega=30}}_{|4|} = \frac{\left| \frac{-4 \times 30}{30j(30j + 3)} \right|}{\left| 1 + \frac{30}{30j(30j + 3)} \right|} = \\
 &= \frac{\left| \frac{-120}{-900 + 90j} \right|}{\left| 1 + \frac{30}{-900 + 90j} \right|} = \frac{\left| \frac{-120}{904,4888/3,0419} \right|}{\left| 1 + \frac{30}{904,4888/3,0419} \right|} = \frac{|-0,1327/-3,0419|}{|1 + 0,0332/-3,0419|} = \\
 &= \frac{|0,1320 + 0,0132j|}{|0,9670 - 0,0033j|} = \frac{0,1327}{0,9670} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$|y(j\omega)|_{\omega=30} \approx 0,133$$

Exemplo 3.1 da apostila: Incertezas multiplicativas de um sistema com uma antena acionada por motor CC

Para exemplificar de que maneira se pode avaliar numericamente a função $l_m(\omega)$, considere-se um motor CC que aciona uma antena por meio de um sistema de transmissão, constituído por um redutor de velocidade e um eixo, conforme procura ilustrar a figura abaixo:



onde J_a e J_e são os momentos de inércia da antena e do eixo, respectivamente; T_1 e T_a são os torques aplicados na saída da caixa de redução e na antena, respectivamente; e θ_1 e θ_a são os deslocamentos angulares do eixo, na saída da caixa de redução, e da antena, respectivamente.

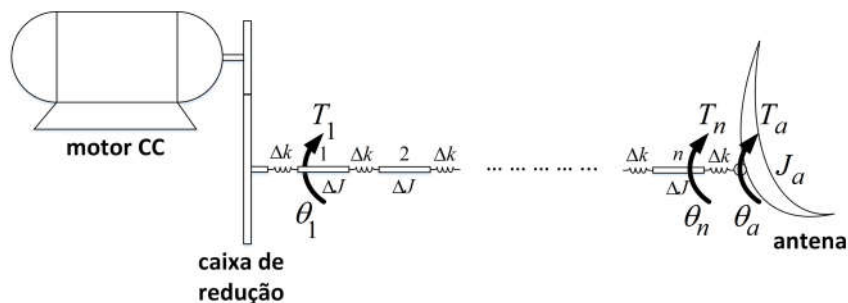
O modelo nominal pode ser obtido ao considerar que o eixo seja infinitamente rígido à torção de maneira que

$$\theta_a = \theta_1.$$

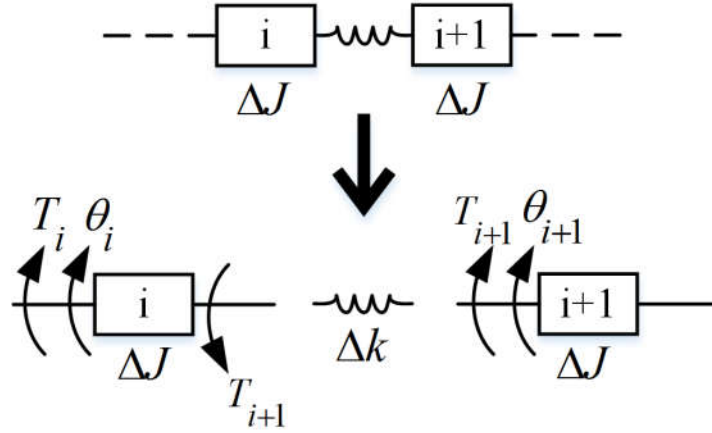
Portanto, tem-se as seguintes equações e função de transferência $G(s)$ do modelo nominal:

$$\begin{cases} T_a = J_a \ddot{\theta}_a \\ T_1 - T_a = J_e \ddot{\theta}_1 \end{cases} \xrightarrow[\text{de Laplace}]{\text{Transformada}} \boxed{G(s) = \frac{\theta_a(s)}{T_1(s)} = \frac{1}{(J_a + J_e)s^2}}$$

Porém, considerando agora que o eixo do modelo “real” possui uma certa flexibilidade, no qual é considerada seus primeiros n modos de vibração torcionais, tem-se o diagrama ilustrado abaixo, no qual o eixo é composto por n inércias acopladas por molas torcionais:



onde $\Delta k = nk_e$ e $\Delta J = \frac{J_e}{n}$



os torques

Analisando as forças nos blocos i e $i + 1$ no diagrama da figura acima, tem-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} T_i - T_{i+1} = \Delta J \ddot{\theta}_i \\ T_{i+1} = \Delta k(\theta_i - \theta_{i+1}) \end{cases}$$

$$i = 1 \quad \begin{cases} T_1 - T_2 = \Delta J \ddot{\theta}_1 \\ T_2 = \Delta k(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \Rightarrow \Delta J \ddot{\theta}_1 = T_1 - \Delta k(\theta_1 - \theta_2) \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}_1 = \frac{\Delta k}{\Delta J}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{\Delta J}T_1}$$

$$i = 2 \quad \begin{cases} T_2 - T_3 = \Delta J \ddot{\theta}_2 \\ T_3 = \Delta k(\theta_2 - \theta_3) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\Delta k(\theta_1 - \theta_2)}_{T_2} - \Delta k(\theta_2 - \theta_3) = \Delta J \ddot{\theta}_2 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}_2 = \frac{\Delta k}{\Delta J}(\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3)}$$

$$i = 3 \quad \begin{cases} T_3 - T_4 = \Delta J \ddot{\theta}_3 \\ T_4 = \Delta k(\theta_3 - \theta_4) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\Delta k(\theta_2 - \theta_3)}_{T_3} - \Delta k(\theta_3 - \theta_4) = \Delta J \ddot{\theta}_3 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}_3 = \frac{\Delta k}{\Delta J}(\theta_2 - 2\theta_3 + \theta_4)}$$

⋮

⋮

⋮

⋮

$$i = n - 1 \quad \begin{cases} T_{n-1} - T_n = \Delta J \ddot{\theta}_{n-1} \\ T_n = \Delta k(\theta_{n-1} - \theta_n) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\Delta k(\theta_{n-2} - \theta_{n-1})}_{T_{n-1}} - \Delta k(\theta_{n-1} - \theta_n) = \Delta J \ddot{\theta}_{n-1} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}_{n-1} = \frac{\Delta k}{\Delta J}(\theta_{n-2} - 2\theta_{n-1} + \theta_n)}$$

$$i = n \quad \begin{cases} T_n - T_{n+1} = \Delta J \ddot{\theta}_n \\ T_{n+1} = \Delta k(\theta_n - \underbrace{\theta_{n+1}}_{\theta_a}) \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\Delta k(\theta_{n-1} - \theta_n)}_{T_n} - \Delta k(\theta_n - \theta_a) = \Delta J \ddot{\theta}_n \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}_n = \frac{\Delta k}{\Delta J}(\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_a)}$$

$$i = n + 1 \quad \begin{cases} T_a = J_a \ddot{\theta}_a \\ T_{n+1} = \Delta k(\theta_n - \underbrace{\theta_{n+1}}_{\theta_a}) \end{cases} \Rightarrow J_a \ddot{\theta}_a = \Delta k(\theta_n - \theta_a) \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}_a = \frac{\Delta k}{J_a}(\theta_n - \theta_a)}$$

Para exemplificar um caso, define-se $n = 5$ e considera-se as seguintes especificações da planta: $k_e = 100$ N.m/rad, $J_e = 6,25 \cdot 10^{-2}$ N.m² e $J_a = 50$ N.m². Dessa forma, obtêm-se que $\Delta K = 500$ N.m/rad e $\Delta J = 1,25 \cdot 10^{-2}$ N.m².

Efetuada a Transformada de Laplace nas equações $\ddot{\theta}$ e substituindo os valores das especificações da planta, pode-se obter um modelo em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) \end{cases},$$

onde são definidos os seguintes vetores de estado $x(t)$, de controle $u(t)$ e de saída $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \theta_3(t) \ \theta_4(t) \ \theta_5(t) \ \theta_a(t) \ \dot{\theta}_1(t) \ \dot{\theta}_2(t) \ \dot{\theta}_3(t) \ \dot{\theta}_4(t) \ \dot{\theta}_5(t) \ \dot{\theta}_a(t)]^T \\ u(t) = T_1(t) \\ y(t) = \theta_a(t) \end{cases}$$

Dessa forma, obtêm-se a matriz A e os vetores b e c , que possuem a forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & I_{6 \times 6} \\ \alpha_{6 \times 6} & 0_{6 \times 6} \end{bmatrix}, \text{ onde } \alpha_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 1} \\ \beta \\ 0_{5 \times 1} \end{bmatrix}, \text{ e } c = [0_{1 \times 5} \quad 1 \quad 0_{1 \times 6}],$$

onde 0 e I são as matrizes/vetores nula e identidade, respectivamente, com suas respectivas dimensões.

Calcula-se então a função de transferência do modelo “real” $G_R(s)$:

$$G_R(s) = \overset{\text{c}}{\downarrow} \underset{\text{b}}{\downarrow} C(s.I_{12 \times 12} - A)^{-1} B = \frac{2,048 \cdot 10^{21}}{s^2(s^2 + 3244)(s^2 + 2,761 \cdot 10^4)(s^2 + 6,862 \cdot 10^4)(s^2 + 1,132 \cdot 10^5)(s^2 + 1,473 \cdot 10^5)}$$

E por fim, pode-se construir numericamente (isto é, ponto a ponto em ω) um gráfico da incerteza multiplicativa $|\Delta_m(j\omega)|$:

$$|\Delta_m(j\omega)| = \left| \frac{G_R(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right| \leq l_m(\omega).$$

