



PEF2603
Estruturas na Arquitetura III -
Sistemas Reticulados e Laminares



Vigas Hiperestáticas

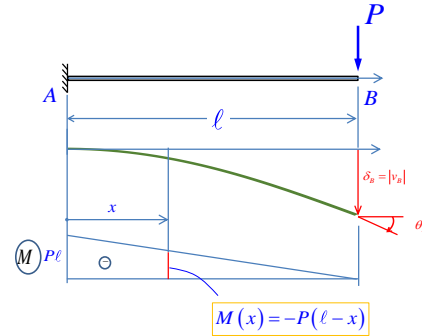
(03/04/2017)

Professores

Ruy Marcelo O. Pauletti, Leila Meneghetti Valverdes, Luís Bitencourt

1º Semestre 2017

Exemplo: Determinar o deslocamento e a rotação da extremidade livre da viga em balanço esquematizada abaixo:



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Equação da Linha Elástica: $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = -\frac{P(\ell - x)}{EI}$

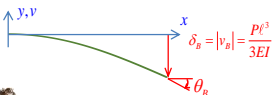
Integrando uma vez: $\frac{dv}{dx} = \theta(x) = -\frac{P}{EI} \left(\ell x - \frac{x^2}{2} \right) + C$

Condição de contorno $\theta(0) = \theta_A = 0 \Rightarrow C = 0$

As rotações ficam determinadas: $\frac{dv}{dx} = \theta(x) = -\frac{P}{EI} \left(\ell x - \frac{x^2}{2} \right)$

Integrando uma segunda vez: $v(x) = -\frac{P}{EI} \left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + D$

Condição de contorno $v(0) = v_A = 0 \Rightarrow D = 0$ $v(x) = v(x) = -\frac{P}{EI} \left(\frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$



$\delta_B = \frac{Pl^3}{3EI}$

$\theta_B = -\frac{Pl^2}{2EI}$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



TABELA DE ROTAÇÕES DE APOIO

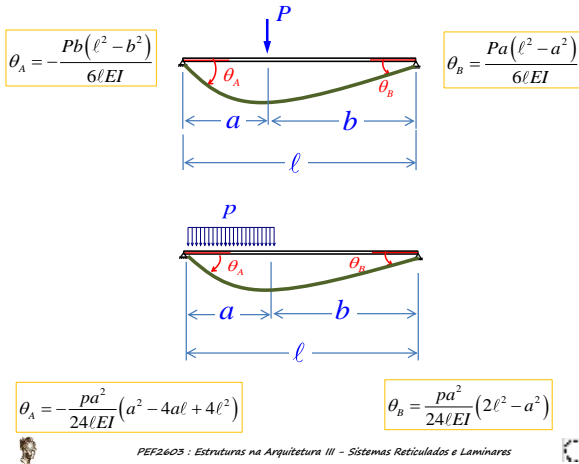
Podem-se construir tabelas de fórmulas com as deformações para as vigas sujeitas a diversos carregamentos! De especial interesse para nosso estudo são os casos a seguir:

$\theta_A = +\frac{M_A \ell}{3EI}$		$\theta_B = -\frac{M_B \ell}{6EI}$
$\theta_A = +\frac{M_B \ell}{6EI}$		$\theta_B = -\frac{M_B \ell}{3EI}$
$\theta_A = -\frac{p \ell^3}{24EI}$		$\theta_B = +\frac{p \ell^3}{24EI}$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

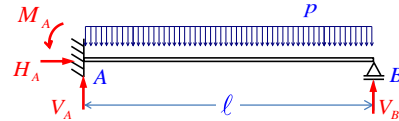




PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

Com estas expressões, estamos em condições de resolver reações de apoio e esforços solicitantes em vigas hiperestáticas simples!

Por exemplo, para a viga engastada-apoiada da figura abaixo:



- 4 reações de apoio \Rightarrow Viga 1x hiperestática
- 3 equações de equilíbrio

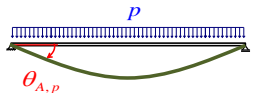
Equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} (1) \sum F_x = H_A = 0 \\ (2) \uparrow \sum F_y = V_A + V_B - p\ell = 0 \quad \therefore V_A + V_B = p\ell & (2) \\ (3) \sum M_{(A)} = M_A + V_B\ell - \frac{p\ell^2}{2} = 0 \quad \therefore M_A + V_B\ell = \frac{p\ell^2}{2} & (3) \end{cases}$$

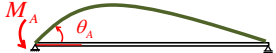
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

Equação de Compatibilidade

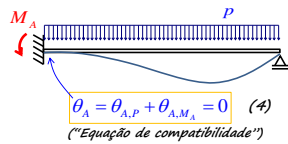
Escolhe-se uma "Estrutura Isostática Fundamental":



E a correspondente "Incógnita Hiperestática":



A combinação dos carregamentos internos com o esforço hiperestático deve recuperar as condições de contorno da estrutura original:

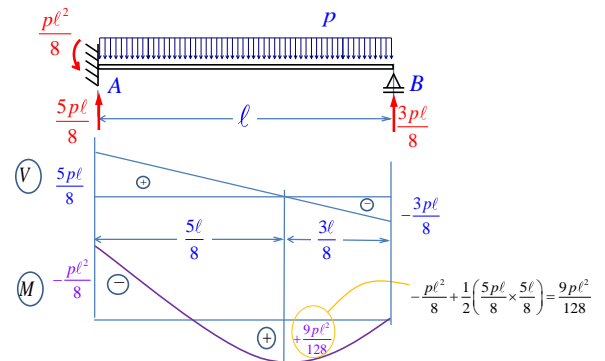


Das tabelas:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{A,p} &= -\frac{p\ell^3}{24EI} \\ \theta_{A,MA} &= +\frac{M_A\ell}{3EI} \end{aligned} \right\} \theta_A = -\frac{p\ell^3}{24EI} + \frac{M_A\ell}{3EI} = 0 \quad \therefore M_A = \frac{p\ell^2}{8} \quad (4)$$

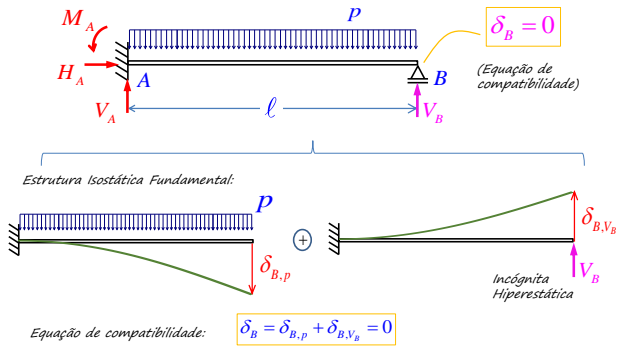
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

Combinando (4) \rightarrow (3): $\frac{p\ell^2}{8} + V_B\ell = \frac{p\ell^2}{2} \quad \therefore V_B = \frac{3p\ell}{8} \quad \therefore V_A = \frac{5p\ell}{8}$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

Resolução alternativa, tomando V_B como incógnita hiperestática:



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

Das tabelas: $\delta_{B,p} = -\frac{p\ell^4}{8EI}$
 $\delta_{B,V_B} = +\frac{V_B\ell^3}{3EI}$

$$\delta_B = -\frac{p\ell^4}{8EI} + \frac{V_B\ell^3}{3EI} = 0$$

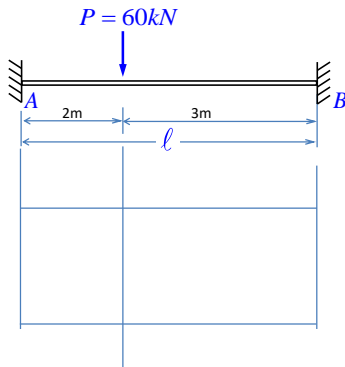
$$\therefore V_B = \frac{3p\ell}{8} \quad \text{OK!}$$

Equações de equilíbrio:

(1) $\uparrow \sum F_y = V_A + V_B - p\ell = 0 \quad \therefore V_A = p\ell - V_B = \frac{5p\ell}{8} \quad \text{OK!}$
 (2) $\sum M_{(A)} = M_A + V_B\ell - \frac{p\ell^2}{2} = 0 \quad \therefore M_A = \frac{p\ell^2}{2} - V_B\ell = \frac{p\ell^2}{8} \quad \text{OK!}$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

Exercício 3: Determinar as reações de apoio e traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga 3x hiperestática abaixo.



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares