PEF2603
Estruturas na Arquitetura III –
Sistemas Reticulados e Laminares

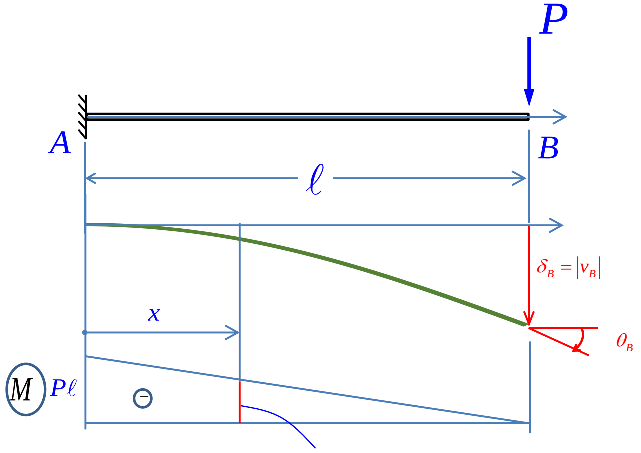
Vigas Hiperestáticas

(03/04/2017)

Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti , Leila Meneghetti Valverdes, Luís Bitencourt

1º Semestre 2017

Exemplo: Determinar o deslocamento e a rotação da extremidade livre da viga em balanço esquematizada abaixo:



$$M(x) = -P(\ell - x)$$

Equação da Linha Elástica: $$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI}=-\frac{P(\ell-x)}{EI}$$

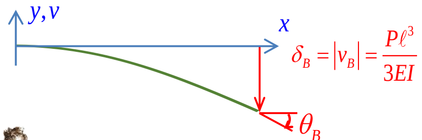
Integrando uma vez: $$\frac{dv}{dx}=\theta(x)=-\frac{P}{EI}\left(\ell x-\frac{x^2}{2}\right)+\mathbb{C}$$

Condição de contorno $\theta(0)=\theta_A=0 \;\Rightarrow\; \mathbb{C}=0$

As rotações ficam determinadas: $$\frac{dv}{dx}=\theta(x)=-\frac{P}{EI}\left(\ell x-\frac{x^2}{2}\right)$$

Integrando uma segunda vez: $$v(x)=-\frac{P}{EI}\left(\frac{\ell x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+\mathbb{D}$$

Condição de contorno $v(0)=v_A=0 \;\Rightarrow\; \mathbb{D}=0$ $\boxed{v(x)=v(x)=-\frac{P}{EI}\left(\frac{\ell x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)}$

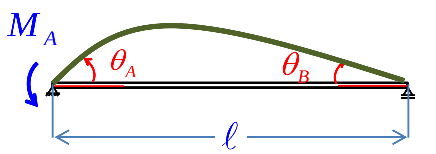


$\boxed{\delta_B=\frac{P\ell^3}{3EI}}$ $\boxed{\theta_B=-\frac{P\ell^2}{2EI}}$

TABELA DE ROTAÇÕES DE APOIO

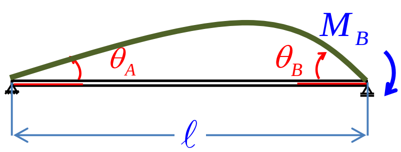
Pode-se construir tabelas de fórmulas com as deformações para as viga sujeitas a diversos carregamentos! De especial interesse para nosso estudo são os casos a seguir:

$\boxed{\theta_A=+\frac{M_A\ell}{3EI}}$



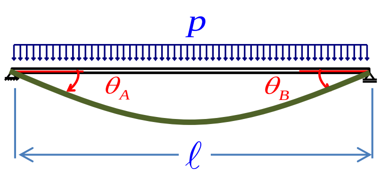
$\boxed{\theta_B=-\frac{M_A\ell}{6EI}}$

$\boxed{\theta_A=+\frac{M_B\ell}{6EI}}$



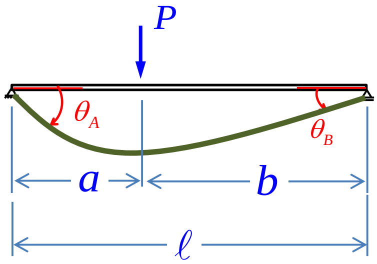
$\boxed{\theta_B=-\frac{M_B\ell}{3EI}}$

$\boxed{\theta_A=-\frac{p\ell^3}{24EI}}$

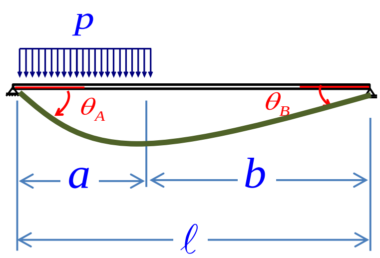


$\boxed{\theta_B=+\frac{p\ell^3}{24EI}}$

$$\theta_A = -\frac{Pb\left(\ell^2 - b^2\right)}{6\ell EI}$$



$$\theta_B = \frac{Pa\left(\ell^2 - a^2\right)}{6\ell EI}$$

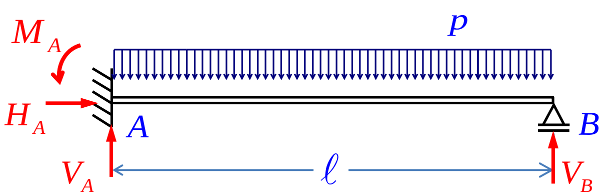


$$\theta_A = -\frac{pa^2}{24\ell EI}\left(a^2 - 4a\ell + 4\ell^2\right)$$

$$\theta_B = \frac{pa^2}{24\ell EI}\left(2\ell^2 - a^2\right)$$

Com estas expressões, estamos em condições de resolver reações de apoio e esforços solicitantes em vigas hiperestáticas simples!

Por exemplo, para a viga engastada-apoiada da figura abaixo:



- *4 reações de apoio*
- *3 equações de equilíbrio*

$\Rightarrow$ *Viga 1x hiperestática*

Equações de equilíbrio:

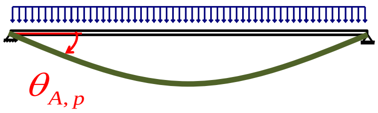
(1) $\sum\limits_{\rightarrow} F_X = H_A = 0$

(2) $\uparrow \sum F_Y = V_A + V_B - p\ell = 0 \quad \therefore \quad \boxed{V_A + V_B = p\ell}$ *(2')*

(3) $\sum M_{(A)} = M_A + V_B\ell - \frac{p\ell^2}{2} = 0 \quad \therefore \quad \boxed{M_A + V_B\ell = \frac{p\ell^2}{2}}$ *(3')*

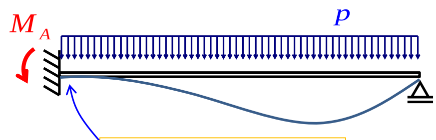
Equação de Compatibilidade

Escolhe-se uma "Estrutura Isostática Fundamental":



E a correspondente "Incógnita Hiperestática":

A combinação dos carregamentos internos com o esforço hiperestático deve recuperar as condições de contorno da estrutura original:



$$\boxed{\theta_A = \theta_{A,P} + \theta_{A,M_A} = 0} \quad (4)$$

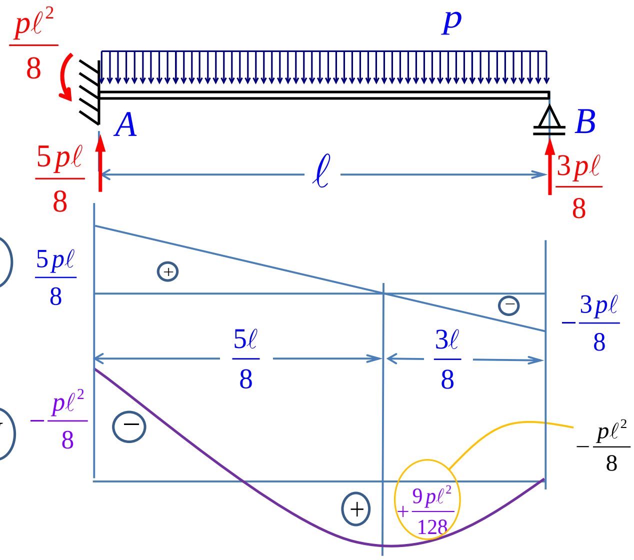
("Equação de compatibilidade")

Das tabelas: $\theta_{A,p} = -\frac{p\ell^3}{24EI}$

$\theta_{A,M_A} = +\frac{M_A \ell}{3EI}$

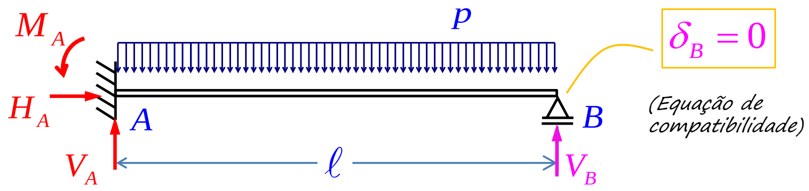
$$\theta_A = -\frac{p\ell^3}{24EI} + \frac{M_A\ell}{3EI} = 0 \;\therefore\; \boxed{M_A = \frac{p\ell^2}{8}} \quad (4')$$

Combinando (4') → (3'): $\frac{p\ell^2}{8} + V_B\ell = \frac{p\ell^2}{2} \;\therefore\; \boxed{V_B = \frac{3p\ell}{8}} \;\therefore\; \boxed{V_A = \frac{5p\ell}{8}}$

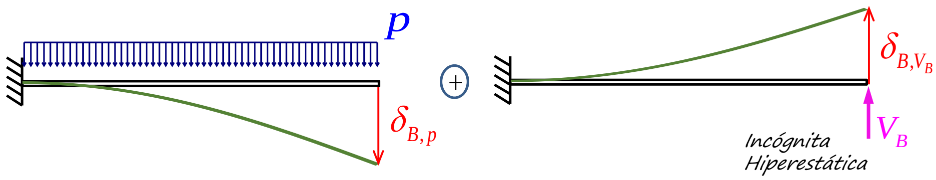


$$-\frac{p\ell^2}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{5p\ell}{8} \times \frac{5\ell}{8}\right) = \frac{9p\ell^2}{128}$$

Resolução alternativa, tomando V_B como incógnita hiperestática:



Estrutura Isostática Fundamental:



Equação de compatibilidade: $\boxed{\delta_B = \delta_{B,p} + \delta_{B,V_B} = 0}$

Das tabelas: $\delta_{B,p} = -\dfrac{p\ell^4}{8EI}$

$\delta_{B,V_B} = +\dfrac{V_B\ell^3}{3EI}$

$$\boxed{\delta_B = -\frac{p\ell^4}{8EI} + \frac{V_B\ell^3}{3EI} = 0}$$

$$\therefore \boxed{V_B = \frac{3p\ell}{8}} \quad \textit{OK!}$$

Equações de equilíbrio:

(1) $\uparrow \sum F_Y = V_A + V_B - p\ell = 0 \quad \therefore \boxed{V_A = p\ell - V_B = \dfrac{5p\ell}{8}}$ *OK!*

(2) $\sum M_{(A)} = M_A + V_B\ell - \dfrac{p\ell^2}{2} = 0 \quad \therefore \boxed{M_A = \dfrac{p\ell^2}{2} - V_B\ell = \dfrac{p\ell^2}{8}}$ *OK!*

Exercício 3: Determinar as reações de apoio e traçar os diagramas de esforços solicitantes da viga 3x hiperestática abaixo.