2^a Lista de Exercícios Eletromagnetismo II

4.1 – Segundo todas as evidências, o nosso universo sempre se expandiu – e continua se expandindo. A expansão é caracterizada por um "fator de escala" $a(t)$, que determina como a separação L entre quaisquer duas galáxias distantes muda com o tempo – ou seja, as distâncias entre objetos cosmológicos são proporcionais a $a(t)$. Esse fator de escala também afeta os comprimentos de onda da luz, ou seja, $\lambda \propto a(t)$: à medida que o tempo passa, uma onda de luz no universo em expansão vai se tornando cada vez mais "longa", enquanto sua frequência diminui pela mesma medida, de forma que é sempre válida a relação $c = \omega/k = \lambda\nu$.

Essa expansão do universo significa que, à medida que regredimos no passado, ele se torna cada vez mais denso e quente. Uma consequência disso é que, desde o início do universo (o "Big Bang") até uma determinada época, a densidade e a temperatura eram tão altos que nenhum átomo permanecia neutro – a intensa radiação, presente em todos os lugares na mesma medida, imediatamente ionizava os elétrons que porventura se ligavam a um núcleo atômico. Todos os prótons e elétrons estavam portanto livres, e não presos em átomos neutros.

Hoje sabemos que essa época, denominada "recombinação" e que marca o primeiro instante quando átomos neutros puderam se formar, se deu quando o universo tinha aproximadamente 300.000 anos de idade, e o fator de escala era 1000 vezes menor do que ele é hoje, $a(t_{rec}) \approx 10^{-3} a(t_0)$. Durante a recombinação, à medida que o universo se resfriou e a densidade diminuiu, quase todos os elétrons livres (99.9%) foram capturados pelos núcleos atômicos de carga positiva, formando átomos neutros.

Considere cada onda plana $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ como correspondendo a um fóton (quantum de luz) de momento k e direções $\hat{k}$ arbitrárias, e assuma que a interação da radiação com os elétrons se dá através do espalhamento Thomson. Sabendo que hoje a densidade de elétrons livres é aproximadamente $n_e \propto 1\ \mathrm{m}^{-3}$, calcule:

(a) O caminho livre médio dos fótons na era atual (lembre-se que 0.1% dos elétrons ficaram livres após a recombinação!) **(0.5)**
(b) O caminho livre médio dos fótons logo *antes* da era da recombinação, quando *todos* os elétrons eram livres. (Lembre-se que, daquela época até hoje, os volumes aumentaram por um fator de 10^9!) **(0.5)**
(c) O caminho livre médio dos fótons logo *após* a era da recombinação. **(0.5)**

4.2 – Argumente, mostre ou demonstre que não existe radiação eletromagnética de monopolo – ou seja, mostre que não existem campos elétricos e magnéticos de radiação que são esfericamente simétricos (independentes de θ e φ). **Atenção: neste problema você não pode utilizar mais do que uma página para apresentar todo o seu argumento, cálculos etc. (1.0)**

4.3 – Considere o espalhamento de uma onda plana por uma esfera de raio a, sob a condição de contorno de que $\psi(r = a) = 0$. Assuma que a onda incidente tem frequência tal que $ka = 1/2$.

(a) Calcule as fases δ_0, δ_1 e δ_2 **(1.0)**
(b) Obtenha as seções de choque diferenciais para $\ell = 0$, $\ell = 1$ e $\ell = 2$. Faça um gráfico das seções de choque diferenciais como função de θ. **(1.0)**
(c) Obtenha a seção de choque total, somando apenas as contribuições até $\ell = 3$. Faça uma estimativa do erro que você incorreria ao limitar sua soma até $\ell = 2$. **(1.0)**

4.4 – Considere o espalhamento de uma onda plana por uma calota esférica de raio a – ou seja, uma esfera cortada ao meio. Tome uma calota que está "virada para baixo", assim a superfície da calota é descrita por $\{r = a, \pi/2 \le \theta \le \pi\}$ e $\{0 \le r \le a, \theta = \pi/2\}$.

(a) Mostre que a aplicação cuidadosa das condições de contorno de Dirichlet ($\psi = 0$ na superfície do

condutor) implica que as fases δ_ℓ são idênticas às fases no caso de uma esfera inteira, exceto que no caso da semi-esfera $\delta_\ell = 0$ se ℓ for par. Explique por que isso ocorre. **(1.0)**
(b) Qual a diferença entre o espalhamento por uma semi-esfera "virada para baixo" e o problema do espalhamento por uma semi-esfera "virada para cima"? Como as fases δ_ℓ mudam de um caso para o outro? As seções de choque também são alteradas? **(1.0)**
(c) Obtenha a seção de choque total do espalhamento pela semi-esfera quando $ka = 1/2$, somando apenas as contribuições até $\ell = 3$. Compare com o resultado da esfera – item 4.3.c. **(1.0)**

4.5 – Vamos imaginar um problema de propagação e espalhamento de ondas em duas dimensões espaciais – o plano (x, y). Considere a onda incidente, de frequência ω, se propagando na direção $+x$, ou seja, $\psi_i = Ae^{ikx}$.

(a) Escreva a equação de onda em coordenadas polares, $(x, y) \to (r, \theta)$. (Dica: comece com a equação de onda em três dimensões, em coordenadas cilíndricas, e jogue a coordenada z fora.) **(0.5)**
(b) Mostre que as auto-funções radiais dessa equação são funções de Bessel normais, de índices m inteiros – em contraste com o caso tridimensional em coordenadas esféricas, em que temos como auto-funções radiais as funções de Bessel esféricas. **(0.5)**
(c) Expresse a onda plana incidente em termos de funções radiais e angulares. **(0.5)**
(d) Mostre que a onda radial livre (o correspondente ao Ae^{ikr}/r no caso de três dimensões espaciais) é agora dada por $Ae^{ikr}/\sqrt{r}$. Pensando em termos da potência, qual a explicação para esse fator de $1/\sqrt{r}$ em 2 dimensões, comparado ao $1/r$ que temos em 3 dimensões? **(0.5)**
(e) Vamos supor que a onda incidente é espalhada por um disco de raio a, e vamos usar as condições de contorno de Dirichlet, ou seja, $\psi_T(r = a) = 0$. Encontre as diferenças de fase δ_m para $m = 0, 1, 2$ no caso $ka \ll 1$. **(1.0)**

Neste exercício você tem que utilizar algumas propriedades das funções de Bessel, em particular:

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z) \quad , \quad N_{-m}(z) = (-1)^m N_m(z) \; ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \, e^{-im\varphi + iz\cos\varphi} = 2\pi \, i^{|m|} \, J_{|m|}(z) \; .$$

Limites assintóticos $z \to \infty$:

$$J_m(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left[z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] \; ,$$

$$N_m(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \mathrm{sen}\left[z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] \; .$$

Limite assintóticos $z \to 0$:

$$J_m(z) \approx \left(\frac{z}{2}\right)^m \frac{1}{m!} \quad (m \geq 0) \; ,$$

$$N_0(z) \approx \frac{2}{\pi} J_0(z) \ln\frac{z}{2} \; ,$$

$$N_m(z) \approx -\left(\frac{z}{2}\right)^{-m} \frac{(m-1)!}{\pi} \quad (m \geq 1) \; .$$