PTC3470 - INTRODUÇÃO AO PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE ROBUSTOS

Nota sobre o Teorema de Bode da Relação entre Ganho e Fase

J. J. Cruz

A relação estabelecida pelo Teorema é a seguinte:

$$\underline{/G(j\omega_0)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{dM}{du}\right)W(u)\,du, \tag{1}$$

onde

$$M = \ln|G(j\omega)|,$$

$$u = \ln(\omega/\omega_0)$$

e

$$W(u) = \ln(\coth|u|/2).$$

O objetivo desta nota é mostrar que

$$\underline{/G(j\omega_0)} \simeq n\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

quando a declividade permance constante ao longo de um intervalo de aproximadamente 1 década em torno de ω_0. $n = -1,\ -2, ...$ quando a declividade é $-20,\ -40, ...$ dB/déc, respectivamente.

- **1o. passo - Expressão da declividade**

Seja

$$\omega' = log_{10}\omega \tag{3}$$

e seja d a declividade do diagrama de Bode do ganho $|G(j\omega)|$ em dB na frequência ω_0. Por definição,

$$d = \left[\frac{d}{d\omega'}20\log_{10}|G(j\omega|\right]_{\omega=\omega_0}. \tag{4}$$

Antes de prosseguir, note que

$$\omega = 10^{\omega'} \tag{5}$$

e, portanto,

$$\frac{d\omega}{d\omega'} = \omega\ln 10. \tag{6}$$

Desenvolvendo a equação (4) tem-se

$$\begin{aligned} d &= \left[\frac{d}{d\omega'}[20\log_{10}|G(j\omega|]\right]_{\omega=\omega_0} \\ &= \left[\frac{d}{d\omega}[20\log_{10}|G(j\omega|]\frac{d\omega}{d\omega'}\right]_{\omega=\omega_0} \\ &= \left[\frac{d}{d\omega}[20\log_{10}|G(j\omega|]\omega\ln 10\right]_{\omega=\omega_0}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$d = \omega_0\ln 10\left[\frac{d}{d\omega}[20\log_{10}|G(j\omega|]\right]_{\omega=\omega_0}. \tag{7}$$

Por outro lado, também por definição,

$$u = \ln(\omega/\omega_0)$$

e, portanto,

$$\omega = \omega_0 \mathrm{e}^{\mathrm{u}},$$

de onde resulta que

$$\frac{d\omega}{du} = \omega_0 \mathrm{e}^{\mathrm{u}}. \tag{8}$$

Podemos então escrever que

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{du}\ln|G(j\omega)|\right]_{\omega=\omega_0} &= \left[\frac{d}{d\omega}\left[\ln|G(j\omega)|\right]\frac{d\omega}{du}\right]_{\omega=\omega_0} \\
&= \left[\frac{d}{d\omega}\left(\frac{20\log_{10}|G(j\omega)|}{20\log_{10}\mathrm{e}}\right)\omega_0 \mathrm{e}^{u}\right]_{\omega=\omega_0} \\
&= \frac{\omega_0}{20\log_{10}\mathrm{e}}\left[\frac{d}{d\omega}\left[20\log_{10}|G(j\omega)|\right]\right]_{\omega=\omega_0},
\end{aligned}$$

sendo que, no último passo, levou-se em conta que

$$\mathrm{e}^{u} = 1$$

quando

$$\omega = \omega_0.$$

Usando então a equação (7), vem que

$$\left[\frac{d}{du}\ln|G(j\omega)|\right]_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0}{20\log_{10}\mathrm{e}}\,\frac{d}{\omega_0\ln 10} \tag{9}$$

e, tendo em vista que

$$\log_{10}\mathrm{e}\ \ln 10 = 1,$$

resulta por fim que

$$d = 20\ \left[\frac{d}{du}\ln|G(j\omega)|\right]_{\omega=\omega_0}. \tag{10}$$

• **<u>2o. passo - Cálculo do valor aproximado da fase</u>**

Considerando que $W(u)$ pode ser aproximada por

$$W(u) \simeq \frac{\pi^2}{2}\delta(u), \tag{11}$$

da equação (1) obtém-se

$$\underline{/G(j\omega_0)} \simeq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{dM}{du}\right)\frac{\pi^2}{2}\delta(u)\,du. \tag{12}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\underline{/G(j\omega_0)} &\simeq \frac{\pi}{2}\left[\frac{dM}{du}\right]_{u=0} \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{d}{du}\ln|G(j\omega)|\right]_{\omega=\omega_0}
\end{aligned}$$

e, usando a equação (10),

$$\underline{/G(j\omega_0)} \simeq \frac{\pi}{2}\frac{d}{20}. \tag{13}$$

Definindo

$$n = \frac{d}{20}$$

tem-se por fim que

$$\underline{/G(j\omega_0)} \simeq n\frac{\pi}{2}. \tag{14}$$