Noções de Probabilidade

Bacharelado em Economia - FEA - Noturno

1º Semestre 2017

Profs. Gilberto A. Paula e Vanderlei C. Bueno

Sumário

Objetivos da Aula

O objetivo principal desta aula é apresentar alguns conceitos básicos sobre o cálculo de probabilidade.

Objetivos da Aula

O objetivo principal desta aula é apresentar alguns conceitos básicos sobre o cálculo de probabilidade. Inicialmente, iremos definir

Objetivos da Aula

O objetivo principal desta aula é apresentar alguns conceitos básicos sobre o cálculo de probabilidade. Inicialmente, iremos definir

- Experimento Aleatório

Objetivos da Aula

O objetivo principal desta aula é apresentar alguns conceitos básicos sobre o cálculo de probabilidade. Inicialmente, iremos definir

- Experimento Aleatório
- Espaço Amostral

Objetivos da Aula

O objetivo principal desta aula é apresentar alguns conceitos básicos sobre o cálculo de probabilidade. Inicialmente, iremos definir

- Experimento Aleatório
- Espaço Amostral
- Eventos

Objetivos da Aula

O objetivo principal desta aula é apresentar alguns conceitos básicos sobre o cálculo de probabilidade. Inicialmente, iremos definir

- Experimento Aleatório
- Espaço Amostral
- Eventos
- Operações com Eventos

Sumário

Objetivos da Aula

Posteriormente, discutiremos

Objetivos da Aula

Posteriormente, discutiremos

- Noções de Contagem

Objetivos da Aula

Posteriormente, discutiremos

- Noções de Contagem
- Regra da Adição de Probabilidades

Objetivos da Aula

Posteriormente, discutiremos

- Noções de Contagem
- Regra da Adição de Probabilidades
- Probabilidade Condicional

Objetivos da Aula

Posteriormente, discutiremos

- Noções de Contagem
- Regra da Adição de Probabilidades
- Probabilidade Condicional
- Independência de Eventos

Objetivos da Aula

Posteriormente, discutiremos

- Noções de Contagem
- Regra da Adição de Probabilidades
- Probabilidade Condicional
- Independência de Eventos
- Regra da Probabilidade Total

Motivação

? CARA ? **OU** **? COROA ?**

Sumário

Motivação

Motivação

- qual será a variação do PIB neste ano?

Motivação

- qual será a variação do PIB neste ano?
- qual será a inflação acumulada em 2017?

Motivação

- qual será a variação do PIB neste ano?
- qual será a inflação acumulada em 2017?
- qual equipe vencerá a Taça Libertadores?

Motivação

- qual será a variação do PIB neste ano?
- qual será a inflação acumulada em 2017?
- qual equipe vencerá a Taça Libertadores?
- quais serão o(a)s candidato(a)s à presidência da república?

Sumário

Experimento Aleatório

Definição

É aquele experimento que, ainda que sendo realizado sob condições fixas, não possui necessariamente resultado determinado.

Experimento Aleatório

Definição

É aquele experimento que, ainda que sendo realizado sob condições fixas, não possui necessariamente resultado determinado.

Exemplos

- lançar uma moeda e observar o resultado

Definição

É aquele experimento que, ainda que sendo realizado sob condições fixas, não possui necessariamente resultado determinado.

Exemplos

- lançar uma moeda e observar o resultado
- lançar um dado e observar a face superior

Definição

É aquele experimento que, ainda que sendo realizado sob condições fixas, não possui necessariamente resultado determinado.

Exemplos

- lançar uma moeda e observar o resultado
- lançar um dado e observar a face superior
- sortear um estudante da USP e perguntar sobre o hábito de fumar

Experimento Aleatório

Definição

É aquele experimento que, ainda que sendo realizado sob condições fixas, não possui necessariamente resultado determinado.

Exemplos

- lançar uma moeda e observar o resultado
- lançar um dado e observar a face superior
- sortear um estudante da USP e perguntar sobre o hábito de fumar
- sortear um doador de sangue cadastrado e verificar o seu tipo sanguíneo

Sumário

Definição

É conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Denotaremos por Ω.

Definição

É conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Denotaremos por Ω.

Exemplos

- lançar um dado e observar a face superior
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Definição

É conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Denotaremos por Ω.

Exemplos

- lançar um dado e observar a face superior
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- tipo sanguíneo de um doador
  Ω = {A, B, O, AB}

Definição

É conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Denotaremos por Ω.

Exemplos

- lançar um dado e observar a face superior
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- tipo sanguíneo de um doador
  Ω = {A, B, O, AB}
- hábito de fumar de um estudante
  Ω = {sim, não}

Definição

É conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Denotaremos por Ω.

Exemplos

- lançar um dado e observar a face superior
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- tipo sanguíneo de um doador
  Ω = {A, B, O, AB}
- hábito de fumar de um estudante
  Ω = {sim, não}
- tempo de duração de uma lâmpada (em horas)
  $\Omega = \{t : t \geq 0\}$

Sumário

Definição

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.
Notação:

Definição

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.
Notação:

- eventos: A, B, C, ...

Evento

Definição

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.
Notação:

- eventos: A, B, C, ...
- evento impossível: $\emptyset$ (conjunto vazio)

Evento

Definição

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.
Notação:

- eventos: A, B, C, ...
- evento impossível: $\emptyset$ (conjunto vazio)
- evento certo: Ω (espaço amostral)

Evento

Definição

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.
Notação:

- eventos: A, B, C, ...
- evento impossível: $\emptyset$ (conjunto vazio)
- evento certo: Ω (espaço amostral)

Exemplo

Lançamento de um dado observando a face superior,
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alguns eventos:

Definição

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.
Notação:

- eventos: A, B, C, ...
- evento impossível: $\emptyset$ (conjunto vazio)
- evento certo: Ω (espaço amostral)

Exemplo

Lançamento de um dado observando a face superior,
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alguns eventos:

- A: sair face par $\Longrightarrow A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$

Definição

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.
Notação:

- eventos: A, B, C, ...
- evento impossível: $\emptyset$ (conjunto vazio)
- evento certo: Ω (espaço amostral)

Exemplo

Lançamento de um dado observando a face superior,
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alguns eventos:

- A: sair face par $\Longrightarrow A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$
- B: sair face maior do que 3 $\Longrightarrow B = \{4, 5, 6\} \subset \Omega$

Definição

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.
Notação:

- eventos: A, B, C, ...
- evento impossível: $\emptyset$ (conjunto vazio)
- evento certo: Ω (espaço amostral)

Exemplo

Lançamento de um dado observando a face superior,
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alguns eventos:

- A: sair face par $\Longrightarrow A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$
- B: sair face maior do que 3 $\Longrightarrow B = \{4, 5, 6\} \subset \Omega$
- C: sair face 1 $\Longrightarrow C = \{1\} \subset \Omega$

Operações com Eventos

Sejam A e B dois eventos quaisquer de um espaço amostral Ω.

Sejam A e B dois eventos quaisquer de um espaço amostral Ω.

$A \cup B$: união dos eventos A e B

Representa a ocorrência de pelo menos um dos eventos, A ou B.

Sejam A e B dois eventos quaisquer de um espaço amostral Ω.

$A \cup B$: união dos eventos A e B

Representa a ocorrência de pelo menos um dos eventos, A ou B.

$A \cap B$: intersecção dos eventos A e B

Representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

Eventos Disjuntos

Dois eventos A e B são disjuntos (ou mutuamente exclusivos) se não têm elementos em comum, isto é $A \cap B = \emptyset$.

Eventos Disjuntos

Dois eventos A e B são disjuntos (ou mutuamente exclusivos) se não têm elementos em comum, isto é $A \cap B = \emptyset$.

Eventos Complementares

Dois eventos A e B são complementares se sua interseção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$.

Eventos Disjuntos

Dois eventos A e B são disjuntos (ou mutuamente exclusivos) se não têm elementos em comum, isto é $A \cap B = \emptyset$.

Eventos Complementares

Dois eventos A e B são complementares se sua interseção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$.

O complementar do evento A será denotado por A^c. Temos que $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \emptyset$.

Exemplo

Lançamento de um dado observando a face superior
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Eventos: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{1\}$.

Exemplo

Lançamento de um dado observando a face superior
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Eventos: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{1\}$.

- sair uma face par e maior do que 3
  $A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$

Exemplo

Lançamento de um dado observando a face superior
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Eventos: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{1\}$.

- sair uma face par e maior do que 3
  $A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$
- sair uma face par e face 1
  $A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1\} = \emptyset$

Exemplo

Lançamento de um dado observando a face superior
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Eventos: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{1\}$.

- sair uma face par e maior do que 3
  $A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$
- sair uma face par e face 1
  $A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1\} = \emptyset$
- sair uma face par ou maior do que 3
  $A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$

Exemplo

Lançamento de um dado observando a face superior
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Eventos: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{1\}$.

- sair uma face par e maior do que 3
  $A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$
- sair uma face par e face 1
  $A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1\} = \emptyset$
- sair uma face par ou maior do que 3
  $A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$
- sair uma face par ou face 1
  $A \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{1\} = \{1, 2, 4, 6\}$

Exemplo

Lançamento de um dado observando a face superior
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Eventos: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{1\}$.

- sair uma face par e maior do que 3
  $A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$
- sair uma face par e face 1
  $A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1\} = \emptyset$
- sair uma face par ou maior do que 3
  $A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$
- sair uma face par ou face 1
  $A \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{1\} = \{1, 2, 4, 6\}$
- não sair face par
  $A^c = \{1, 3, 5\}$

Sumário

Definição

Medida da incerteza associada aos resultados do experimento aleatório.

Definição

Medida da incerteza associada aos resultados do experimento aleatório.

Como atribuir probabilidade aos elementos do espaço amostral?

Definição

Medida da incerteza associada aos resultados do experimento aleatório.

Como atribuir probabilidade aos elementos do espaço amostral?

- frequências relativas de ocorrências de cada resultado

Definição

Medida da incerteza associada aos resultados do experimento aleatório.

Como atribuir probabilidade aos elementos do espaço amostral?

- frequências relativas de ocorrências de cada resultado
- suposições teóricas

Definição

Medida da incerteza associada aos resultados do experimento aleatório.

Como atribuir probabilidade aos elementos do espaço amostral?

- frequências relativas de ocorrências de cada resultado
- suposições teóricas
- experiência de um(a) especialista

Através das frequências relativas de ocorrências

Atribuição de Probabilidade

Através das frequências relativas de ocorrências

- o experimento aleatório é replicado muitas vezes

Através das frequências relativas de ocorrências

- o experimento aleatório é replicado muitas vezes
- registra-se a frequência relativa com que cada resultado ocorre

Através das frequências relativas de ocorrências

- o experimento aleatório é replicado muitas vezes
- registra-se a frequência relativa com que cada resultado ocorre
- para um número grande de replicações, a frequência relativa aproxima a probabilidade

Através das frequências relativas de ocorrências

- o experimento aleatório é replicado muitas vezes
- registra-se a frequência relativa com que cada resultado ocorre
- para um número grande de replicações, a frequência relativa aproxima a probabilidade

Através de suposições teóricas

Através das frequências relativas de ocorrências

- o experimento aleatório é replicado muitas vezes
- registra-se a frequência relativa com que cada resultado ocorre
- para um número grande de replicações, a frequência relativa aproxima a probabilidade

Através de suposições teóricas

Por exemplo, no lançamento de um dado admite-se que o dado é perfeitamente equilibrado. Dessa forma

Através das frequências relativas de ocorrências

- o experimento aleatório é replicado muitas vezes
- registra-se a frequência relativa com que cada resultado ocorre
- para um número grande de replicações, a frequência relativa aproxima a probabilidade

Através de suposições teóricas

Por exemplo, no lançamento de um dado admite-se que o dado é perfeitamente equilibrado. Dessa forma

$$P(\text{face1}) = P(\text{face2}) = \cdots = P(\text{face 6}) = \frac{1}{6}.$$

Através da experiência de um(a) especialista

Através da experiência de um(a) especialista

- após o exame clínico, o médico externa a probabilidade do paciente estar com sinusite viral ou bacteriana

Através da experiência de um(a) especialista

- após o exame clínico, o médico externa a probabilidade do paciente estar com sinusite viral ou bacteriana
- após uma análise de vários indicadores econômicos um analista financeiro externa a probabilidade de um ativo financeiro render mais do que a inflação num determinado período

Caso discreto

No caso discreto o espaço amostral é expresso na forma

Caso discreto

No caso discreto o espaço amostral é expresso na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}.$$

Caso discreto

No caso discreto o espaço amostral é expresso na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}.$$

A probabilidade $P(\omega)$ para cada elemento do espaço amostral é especificada da seguinte forma:

Caso discreto

No caso discreto o espaço amostral é expresso na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}.$$

A probabilidade $P(\omega)$ para cada elemento do espaço amostral é especificada da seguinte forma:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$ para $i = 1, 2, \ldots$

Caso discreto

No caso discreto o espaço amostral é expresso na forma

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}.$$

A probabilidade $P(\omega)$ para cada elemento do espaço amostral é especificada da seguinte forma:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$ para $i = 1, 2, \ldots$
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = 1$

Casos particulares

Casos particulares

- Seja $A \subset \Omega$. Então $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$. Por exemplo, se $A = \{\omega_7, \omega_8, \omega_9\}$ então $P(A) = P(\omega_7) + P(\omega_8) + P(\omega_9)$.

Casos particulares

- Seja $A \subset \Omega$. Então $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$. Por exemplo, se $A = \{\omega_7, \omega_8, \omega_9\}$ então $P(A) = P(\omega_7) + P(\omega_8) + P(\omega_9)$.
- $P(\Omega) = 1$

Casos particulares

- Seja $A \subset \Omega$. Então $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$. Por exemplo, se $A = \{\omega_7, \omega_8, \omega_9\}$ então $P(A) = P(\omega_7) + P(\omega_8) + P(\omega_9)$.
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$

Equiprobabilidade

Equiprobabilidade

Supor que o espaço amostral tem um número finito de elementos $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$. Se A for um evento de m elementos, na situação de equiprobabilidade, isto é, quando as probabilidades de todos os resultados do espaço amostral são iguais, tem-se que

Equiprobabilidade

Supor que o espaço amostral tem um número finito de elementos $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$. Se A for um evento de m elementos, na situação de equiprobabilidade, isto é, quando as probabilidades de todos os resultados do espaço amostral são iguais, tem-se que

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{m}{n}.$$

Equiprobabilidade

Supor que o espaço amostral tem um número finito de elementos $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$. Se A for um evento de m elementos, na situação de equiprobabilidade, isto é, quando as probabilidades de todos os resultados do espaço amostral são iguais, tem-se que

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{m}{n}.$$

Neste caso não é necessário explicitar Ω e A, bastando calcular m e n, também chamados, respectivamente, de casos favoráveis e casos possíveis.

Sumário

Descrição

Alunos diplomados em 2002 no município de São Paulo segundo nível de ensino e tipo de instituição. [a]

Nível de Ensino	Tipo de Instituição		Total
	Pública	Privada	
Fundamental	144.548	32.299	176.847
Médio	117.945	29.422	147.367
Superior	5.159	56.124	61.283
Total	267.652	117.845	385.497

[a] MEC, INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais) e Fundação SEADE

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Ω: conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no municipio de Sao Paulo.

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Ω: conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no municipio de Sao Paulo.

Eventos

- M: aluno se formou no ensino médio
  $P(M) = \frac{147.367}{385.497} = 0,382$
- F: aluno se formou no ensino fundamental
  $P(F) = \frac{176.847}{385.497} = 0,459$

Aplicação

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Aplicação

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Ω: conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no municipio de Sao Paulo.

Aplicação

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Ω: conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no municipio de Sao Paulo.

Eventos

- S: aluno se formou no ensino superior
  $P(S) = \frac{61.283}{385.497} = 0,159$
- G: aluno se formou em instituição pública
  $P(G) = \frac{267.652}{385.497} = 0,694$

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Ω: conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no municipio de Sao Paulo.

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Ω: conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no municipio de Sao Paulo.

Evento

- $M \cap G$: aluno formado no ensino médio **e** em instituição pública $P(M \cap G) = \frac{117.945}{385.497} = 0,306$

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Aplicação

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Ω: conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no municipio de Sao Paulo.

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Ω: conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no municipio de Sao Paulo.

Evento

- $M \cup G$: aluno formado no ensino médio **ou** em instituição pública
  $P(M \cup G) = \frac{(147.367+267.652-117.945)}{385.497} = \frac{297.074}{385.497} = 0,771$

Sumário

Definição

Sejam A e B dois eventos quaisquer do espaço amostral Ω. Então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Definição

Sejam A e B dois eventos quaisquer do espaço amostral Ω. Então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Casos Particulares

- se A e B são conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$)
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Definição

Sejam A e B dois eventos quaisquer do espaço amostral Ω. Então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Casos Particulares

- se A e B são conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$)
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- para qualquer evento A em Ω
  $P(A) = 1 - P(A^c)$

Aplicação

Considere novamente o evento
$M \cup G$: aluno formado no ensino médio **ou** em instituição pública.
Então

Aplicação

Considere novamente o evento
$M \cup G$: aluno formado no ensino médio **ou** em instituição pública.
Então

$$\begin{aligned} P(M \cup G) &= P(M) + P(G) - P(M \cap G) \\ &= \frac{147.367}{385.497} + \frac{267.652}{385.495} - \frac{117.945}{385.497} \\ &= \frac{297.074}{385.497} = 0,771. \end{aligned}$$

Sumário

Definição

Uma permutação de n elementos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses elementos. Notação: $P_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots$. Em particular $0! = 1$.

Definição

Uma permutação de n elementos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses elementos. Notação: $P_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots$. Em particular $0! = 1$.

Exemplo

Na convenção de um partido para a eleição presidencial 3 candidatos estão inscritos e haverá uma consulta aos eleitores do partido. Quais são os resultados possíveis?

Exemplo

Temos portanto $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ resultados possíveis. Se denotarmos esses candidatos por $C1$, $C2$, $C3$ os resultados possíveis (já na ordem de classificação) são representados pelos subconjuntos:

Exemplo

Temos portanto $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ resultados possíveis. Se denotarmos esses candidatos por $C1$, $C2$, $C3$ os resultados possíveis (já na ordem de classificação) são representados pelos subconjuntos:

- $\omega_1 = \{C1, C2, C3\}$

Exemplo

Temos portanto $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ resultados possíveis. Se denotarmos esses candidatos por $C1$, $C2$, $C3$ os resultados possíveis (já na ordem de classificação) são representados pelos subconjuntos:

- $\omega_1 = \{C1, C2, C3\}$
- $\omega_2 = \{C1, C3, C2\}$

Exemplo

Temos portanto $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ resultados possíveis. Se denotarmos esses candidatos por $C1, C2, C3$ os resultados possíveis (já na ordem de classificação) são representados pelos subconjuntos:

- $\omega_1 = \{C1, C2, C3\}$
- $\omega_2 = \{C1, C3, C2\}$
- $\omega_3 = \{C2, C1, C3\}$

Exemplo

Temos portanto $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ resultados possíveis. Se denotarmos esses candidatos por $C1, C2, C3$ os resultados possíveis (já na ordem de classificação) são representados pelos subconjuntos:

- $\omega_1 = \{C1, C2, C3\}$
- $\omega_2 = \{C1, C3, C2\}$
- $\omega_3 = \{C2, C1, C3\}$
- $\omega_4 = \{C2, C3, C1\}$

Exemplo

Temos portanto $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ resultados possíveis. Se denotarmos esses candidatos por $C1, C2, C3$ os resultados possíveis (já na ordem de classificação) são representados pelos subconjuntos:

- $\omega_1 = \{C1, C2, C3\}$
- $\omega_2 = \{C1, C3, C2\}$
- $\omega_3 = \{C2, C1, C3\}$
- $\omega_4 = \{C2, C3, C1\}$
- $\omega_5 = \{C3, C2, C1\}$

Exemplo

Temos portanto $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ resultados possíveis. Se denotarmos esses candidatos por $C1, C2, C3$ os resultados possíveis (já na ordem de classificação) são representados pelos subconjuntos:

- $\omega_1 = \{C1, C2, C3\}$
- $\omega_2 = \{C1, C3, C2\}$
- $\omega_3 = \{C2, C1, C3\}$
- $\omega_4 = \{C2, C3, C1\}$
- $\omega_5 = \{C3, C2, C1\}$
- $\omega_6 = \{C3, C1, C2\}$

Exemplo

Temos portanto $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ resultados possíveis. Se denotarmos esses candidatos por $C1$, $C2$, $C3$ os resultados possíveis (já na ordem de classificação) são representados pelos subconjuntos:

- $\omega_1 = \{C1, C2, C3\}$
- $\omega_2 = \{C1, C3, C2\}$
- $\omega_3 = \{C2, C1, C3\}$
- $\omega_4 = \{C2, C3, C1\}$
- $\omega_5 = \{C3, C2, C1\}$
- $\omega_6 = \{C3, C1, C2\}$

Portanto, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Espaço Amostral

Portanto, o espaço amostral Ω deste exemplo contém 6 elementos (os resultados possíveis) representados pelos subconjuntos descritos anteriormente.

Espaço Amostral

Portanto, o espaço amostral Ω deste exemplo contém 6 elementos (os resultados possíveis) representados pelos subconjuntos descritos anteriormente.

Eventos

Espaço Amostral

Portanto, o espaço amostral Ω deste exemplo contém 6 elementos (os resultados possíveis) representados pelos subconjuntos descritos anteriormente.

Eventos

- A: o candidato C1 sair vencedor

Espaço Amostral

Portanto, o espaço amostral Ω deste exemplo contém 6 elementos (os resultados possíveis) representados pelos subconjuntos descritos anteriormente.

Eventos

- A: o candidato C1 sair vencedor
- B: o candidato C3 não sair vencedor

Espaço Amostral

Portanto, o espaço amostral Ω deste exemplo contém 6 elementos (os resultados possíveis) representados pelos subconjuntos descritos anteriormente.

Eventos

- A: o candidato C1 sair vencedor
- B: o candidato C3 não sair vencedor

Cálculo das Probabilidades

Sorteando ao acaso um dos resultados possíveis (equiprobabilidade), temos que

Espaço Amostral

Portanto, o espaço amostral Ω deste exemplo contém 6 elementos (os resultados possíveis) representados pelos subconjuntos descritos anteriormente.

Eventos

- A: o candidato C1 sair vencedor
- B: o candidato C3 não sair vencedor

Cálculo das Probabilidades

Sorteando ao acaso um dos resultados possíveis (equiprobabilidade), temos que

- $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Espaço Amostral

Portanto, o espaço amostral Ω deste exemplo contém 6 elementos (os resultados possíveis) representados pelos subconjuntos descritos anteriormente.

Eventos

- A: o candidato C1 sair vencedor
- B: o candidato C3 não sair vencedor

Cálculo das Probabilidades

Sorteando ao acaso um dos resultados possíveis (equiprobabilidade), temos que

- $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Definição

Arranjo simples de n elementos tomados x a x, em que $n \geq 1$ e $x \leq n$, corresponde a todos os subconjuntos de x elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza.

Definição

Arranjo simples de n elementos tomados x a x, em que $n \geq 1$ e $x \leq n$, corresponde a todos os subconjuntos de x elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza.
Notação: $A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!}$.

Definição

Arranjo simples de n elementos tomados x a x, em que $n \geq 1$ e $x \leq n$, corresponde a todos os subconjuntos de x elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza.
Notação: $A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!}$.
Em particular se $x = n$ temos que $A_n^n = P_n$.

Definição

Arranjo simples de n elementos tomados x a x, em que $n \geq 1$ e $x \leq n$, corresponde a todos os subconjuntos de x elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza.

Notação: $A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!}$.

Em particular se $x = n$ temos que $A_n^n = P_n$.

Exemplo

Numa classe 5 alunos aceitaram participar da eleição para representantes da classe, em que o mais votado será o titular e o segundo mais votado será o suplente. Quantos pares de representantes podemos formar?

Exemplo

Aqui como a ordem é importante (pois define o titular e o suplente) teremos que resolver o problema através de arranjo. Portanto, temos

Exemplo

Aqui como a ordem é importante (pois define o titular e o suplente) teremos que resolver o problema através de arranjo. Portanto, temos

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

pares possíveis de representantes.

Arranjo

Exemplo

Aqui como a ordem é importante (pois define o titular e o suplente) teremos que resolver o problema através de arranjo. Portanto, temos

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

pares possíveis de representantes.

Cálculo de Probabilidade

A probabilidade de um par específico (denotado por A) ser escolhido através de um sorteio ao acaso (equiprobabilidade) fica dada por

Exemplo

Aqui como a ordem é importante (pois define o titular e o suplente) teremos que resolver o problema através de arranjo. Portanto, temos

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

pares possíveis de representantes.

Cálculo de Probabilidade

A probabilidade de um par específico (denotado por A) ser escolhido através de um sorteio ao acaso (equiprobabilidade) fica dada por

$$P(A) = \frac{1}{20} = 0,05$$

Aplicação

Vamos supor que desses 5 alunos, 2 são do sexo masculino e 3 do sexo feminino. Logo, o espaço amostral Ω deste exemplo continua com 20 elementos que serão classificados pela ordem e também pelo gênero.

Aplicação

Vamos supor que desses 5 alunos, 2 são do sexo masculino e 3 do sexo feminino. Logo, o espaço amostral Ω deste exemplo continua com 20 elementos que serão classificados pela ordem e também pelo gênero.

Eventos

Aplicação

Vamos supor que desses 5 alunos, 2 são do sexo masculino e 3 do sexo feminino. Logo, o espaço amostral Ω deste exemplo continua com 20 elementos que serão classificados pela ordem e também pelo gênero.

Eventos

- A: o titular ser do sexo feminino e o suplente do sexo masculino

Arranjo

Aplicação

Vamos supor que desses 5 alunos, 2 são do sexo masculino e 3 do sexo feminino. Logo, o espaço amostral Ω deste exemplo continua com 20 elementos que serão classificados pela ordem e também pelo gênero.

Eventos

- A: o titular ser do sexo feminino e o suplente do sexo masculino
- B: os dois representantes serem do mesmo gênero

Definição

Se um evento pode ser realizado em duas etapas, uma consistindo de r maneiras e a outra de s maneiras, então o evento pode ser realizado de $r \times s$ maneiras.

Número de Elementos do Evento

Número de Elementos do Evento

- n(A) = $\{$titulares possíveis do sexo feminino$\}$ $\times$ $\{$suplentes possíveis do sexo masculino$\}$

Número de Elementos do Evento

- n(A) = $\{$titulares possíveis do sexo feminino$\}$ $\times$ $\{$suplentes possíveis do sexo masculino$\}$
- n(A) = $A_3^1 \times A_2^1 = \frac{3!}{2!} \times \frac{2!}{1!} = 3 \times 2 = 6$ pares possíveis

Número de Elementos do Evento

- n(A) = {titulares possíveis do sexo feminino} $\times$ {suplentes possíveis do sexo masculino}
- n(A) = $A_3^1 \times A_2^1 = \frac{3!}{2!} \times \frac{2!}{1!} = 3 \times 2 = 6$ pares possíveis

Cálculo da Probabilidade

Sorteando ao acaso um dos pares possíveis de representantes (equiprobabilidade), obtemos

Número de Elementos do Evento

- n(A) = $\{$titulares possíveis do sexo feminino$\}$ $\times$ $\{$suplentes possíveis do sexo masculino$\}$
- n(A) = $A_3^1 \times A_2^1 = \frac{3!}{2!} \times \frac{2!}{1!} = 3 \times 2 = 6$ pares possíveis

Cálculo da Probabilidade

Sorteando ao acaso um dos pares possíveis de representantes (equiprobabilidade), obtemos

- $P(A) = \frac{6}{20} = 0,30$

Número de Elementos do Evento

Número de Elementos do Evento

- n(B) = {representantes possíveis do sexo masculino} + {representantes possíveis do sexo feminino}

Número de Elementos do Evento

- n(B) = {representantes possíveis do sexo masculino} + {representantes possíveis do sexo feminino}
- n(B) = $A_2^1 \times A_1^1 + A_3^1 \times A_2^1 = \frac{2!}{1!} \times \frac{1!}{0!} + \frac{3!}{2!} \times \frac{2!}{1!}$
  $= 2 \times 1 + 3 \times 2 = 2 + 6 = 8$ pares possíveis

Número de Elementos do Evento

- n(B) = {representantes possíveis do sexo masculino} + {representantes possíveis do sexo feminino}
- n(B) = $A_2^1 \times A_1^1 + A_3^1 \times A_2^1 = \frac{2!}{1!} \times \frac{1!}{0!} + \frac{3!}{2!} \times \frac{2!}{1!}$ $= 2 \times 1 + 3 \times 2 = 2 + 6 = 8$ pares possíveis

Cálculo da Probabilidade

Sorteando ao acaso um dos pares possíveis de representantes (equiprobabilidade), obtemos

Número de Elementos do Evento

- n(B) = {representantes possíveis do sexo masculino} + {representantes possíveis do sexo feminino}
- n(B) = $A_2^1 \times A_1^1 + A_3^1 \times A_2^1 = \frac{2!}{1!} \times \frac{1!}{0!} + \frac{3!}{2!} \times \frac{2!}{1!}$
  $= 2 \times 1 + 3 \times 2 = 2 + 6 = 8$ pares possíveis

Cálculo da Probabilidade

Sorteando ao acaso um dos pares possíveis de representantes (equiprobabilidade), obtemos

- $P(B) = \frac{8}{20} = 0,40$

Definição

Combinação simples de n elementos tomados x a x, em que $n \geq 1$ e $x \leq n$, corresponde a todos os subconjuntos de x elementos distintos, que diferem entre si apenas pela natureza.

Definição

Combinação simples de n elementos tomados x a x, em que $n \geq 1$ e $x \leq n$, corresponde a todos os subconjuntos de x elementos distintos, que diferem entre si apenas pela natureza.
Notação: $C_n^x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!x!}$.

Definição

Combinação simples de n elementos tomados x a x, em que $n \geq 1$ e $x \leq n$, corresponde a todos os subconjuntos de x elementos distintos, que diferem entre si apenas pela natureza.
Notação: $C_n^x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!x!}$.

Exemplo

Num campeonato de futebol 6 equipes foram classificadas para a fase final, em que todos enfrentam todos. Quantas partidas deverão ocorrer nesse hexagonal final?

Exemplo

Aqui como a ordem não é importante, podemos resolver através de combinação. Portanto, teremos

Exemplo

Aqui como a ordem não é importante, podemos resolver através de combinação. Portanto, teremos

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

partidas possíveis.

Aplicação

Supor que dessas 6 equipes, 4 são do estado 1 e as outras duas do estado 2.

Aplicação

Supor que dessas 6 equipes, 4 são do estado 1 e as outras duas do estado 2.

Eventos

Aplicação

Supor que dessas 6 equipes, 4 são do estado 1 e as outras duas do estado 2.

Eventos

- A: a partida ser entre equipes do mesmo estado

Aplicação

Supor que dessas 6 equipes, 4 são do estado 1 e as outras duas do estado 2.

Eventos

- A: a partida ser entre equipes do mesmo estado
- B: a partida ser entre equipes de estados diferentes

Número de Elementos do Evento

Número de Elementos do Evento

- n(A) = {jogos possíveis entre equipes do estado 1} + {jogos possíveis entre equipes do estado 2}

Número de Elementos do Evento

- n(A) = $\{$jogos possíveis entre equipes do estado 1$\}$ + $\{$jogos possíveis entre equipes do estado 2$\}$
- n(A) = $\binom{4}{2} + \binom{2}{2}$ = $\frac{4!}{2!2!} + \frac{2!}{2!0!}$ = $6 + 1 = 7$ partidas

Número de Elementos do Evento

- $n(A)$ = {jogos possíveis entre equipes do estado 1} + {jogos possíveis entre equipes do estado 2}
- $n(A) = \binom{4}{2} + \binom{2}{2} = \frac{4!}{2!2!} + \frac{2!}{2!0!} = 6 + 1 = 7$ partidas

Cálculo da Probabilidade

Sorteando ao acaso uma das partidas possíveis, temos que

Número de Elementos do Evento

- n(A) = {jogos possíveis entre equipes do estado 1} + {jogos possíveis entre equipes do estado 2}
- n(A) = $\binom{4}{2} + \binom{2}{2}$ = $\frac{4!}{2!2!} + \frac{2!}{2!0!}$ = $6 + 1 = 7$ partidas

Cálculo da Probabilidade

Sorteando ao acaso uma das partidas possíveis, temos que

- $P(A) = \frac{7}{15}$

Número de Elementos do Evento

Número de Elementos do Evento

- $n(B) = \{\text{equipes do estado 1}\} \times \{\text{equipes do estado 2}\}$
  $= \binom{4}{1} \times \binom{2}{1}$

Combinação

Número de Elementos do Evento

- n(B) = {equipes do estado 1} $\times$ {equipes do estado 2} $=\binom{4}{1} \times \binom{2}{1}$
- n(B) = $\frac{4!}{3!1!} \times \frac{2!}{1!1!} = 4 \times 2 = 8$ partidas

Número de Elementos do Evento

- n(B) = {equipes do estado 1} $\times$ {equipes do estado 2} $=\binom{4}{1} \times \binom{2}{1}$
- n(B) = $\frac{4!}{3!1!} \times \frac{2!}{1!1!}$ = $4 \times 2 = 8$ partidas

Cálculo da Probabilidade

Sorteando ao acaso uma das partidas possíveis, temos que

Número de Elementos do Evento

- n(B) = {equipes do estado 1} $\times$ {equipes do estado 2} $=\binom{4}{1} \times \binom{2}{1}$
- n(B) = $\frac{4!}{3!1!} \times \frac{2!}{1!1!}$ = $4 \times 2 = 8$ partidas

Cálculo da Probabilidade

Sorteando ao acaso uma das partidas possíveis, temos que

- $P(B) = \frac{8}{15}$

Número de Elementos do Evento

- n(B) = $\{$equipes do estado 1$\}$ $\times$ $\{$equipes do estado 2$\}$ $=\binom{4}{1} \times \binom{2}{1}$
- n(B) = $\frac{4!}{3!1!} \times \frac{2!}{1!1!}$ = $4 \times 2 = 8$ partidas

Cálculo da Probabilidade

Sorteando ao acaso uma das partidas possíveis, temos que

- $P(B) = \frac{8}{15}$

Note que $P(B) = 1 - P(A)$.

Exercício

Loterias

Exercício

Loterias

Calcule a probabilidade do evento A descrito abaixo

Loterias

Calcule a probabilidade do evento A descrito abaixo

- A: um apostador que jogar 8 números ganhar na Megasena

Exercício

Loterias

Calcule a probabilidade do evento A descrito abaixo

- A: um apostador que jogar 8 números ganhar na Megasena

$$P(A) = \frac{\binom{8}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{1.787.995}$$

Loterias

Calcule a probabilidade do evento A descrito abaixo

- A: um apostador que jogar 8 números ganhar na Megasena

$$P(A) = \frac{\binom{8}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{1.787.995}$$

- A: um apostador que jogar 8 números acertar a quadra na Megasena

Loterias

Calcule a probabilidade do evento A descrito abaixo

- A: um apostador que jogar 8 números ganhar na Megasena

$$P(A) = \frac{\binom{8}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{1.787.995}$$

- A: um apostador que jogar 8 números acertar a quadra na Megasena

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4}\binom{54}{4}}{\binom{60}{8}} \cong \frac{1}{539}$$

Exercício

Loterias

Exercício

Loterias

Loterias

- A: um apostador que jogar 18 números ganhar na Lotofácil

Loterias

- A: um apostador que jogar 18 números ganhar na Lotofácil

$$P(A) = \frac{\binom{18}{15}}{\binom{25}{15}} \cong \frac{1}{4006}$$

Loterias

- A: um apostador que jogar 18 números ganhar na Lotofácil

$$P(A) = \frac{\binom{18}{15}}{\binom{25}{15}} \cong \frac{1}{4006}$$

- A: um apostador que jogar 18 números acertar 14 pontos na Lotofácil

Loterias

- A: um apostador que jogar 18 números ganhar na Lotofácil

$$P(A) = \frac{\binom{18}{15}}{\binom{25}{15}} \cong \frac{1}{4006}$$

- A: um apostador que jogar 18 números acertar 14 pontos na Lotofácil

$$P(A) = \frac{\binom{15}{14}\binom{10}{4}}{\binom{25}{18}} \cong \frac{1}{153}$$

Definição

Sejam A e B dois eventos quaisquer do espaço amostral Ω. Então

Definição

Sejam A e B dois eventos quaisquer do espaço amostral Ω. Então

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \ P(B) > 0.$$

Definição

Sejam A e B dois eventos quaisquer do espaço amostral Ω. Então

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; P(B) > 0.$$

Consequências

Definição

Sejam A e B dois eventos quaisquer do espaço amostral Ω. Então

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; P(B) > 0.$$

Consequências

- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

Definição

Sejam A e B dois eventos quaisquer do espaço amostral Ω. Então

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; P(B) > 0.$$

Consequências

- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$
- $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$

Aplicação

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Eventos

- M: aluno se formou no ensino médio

Aplicação

Descrição

Vamos supor que um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Eventos

- M: aluno se formou no ensino médio
- G: aluno se formou em instituição pública

Aplicação

Qual a probabilidade do aluno escolhido ser formado no ensino médio sabendo-se que é de instituição pública?

Qual a probabilidade do aluno escolhido ser formado no ensino médio sabendo-se que é de instituição pública?

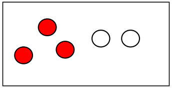
Cálculo da Probabilidade

$$
\begin{aligned}
P(M|G) &= \frac{P(M \cap G)}{P(G)} \\
&= \frac{\frac{117.945}{385.497}}{\frac{267.652}{385.497}} \\
&= \frac{117.945}{267.652} = 0,441.
\end{aligned}
$$

Sumário

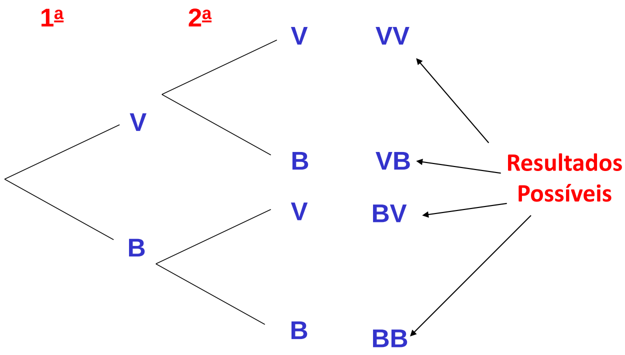
Descrição

Em uma urna há 5 bolas, sendo 2 bolas brancas e 3 bolas vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, *sem reposição*.

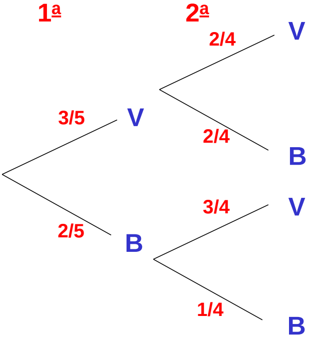


Qual a probabilidade da 2ª bola sorteada ser da cor vermelha?

Diagrama de Árvore



Cálculo de Probabilidades



VV P(VV) = 3/5x2/4=6/20

VB P(VB) = 3/5x2/4=6/20

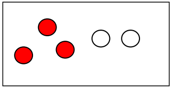
BV P(BV) = 2/5x3/4=6/20

BB P(BB) = 2/5x1/4=2/20

P(2ª bola vermelha) = P(VV) + P(BV) = 6/20 + 6/20 = 12/20 = 0,60

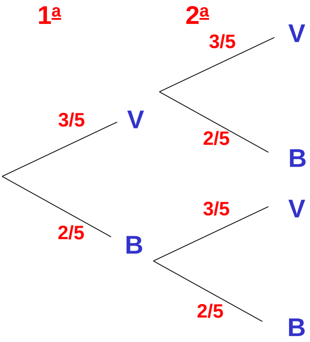
Descrição

Em uma urna há 5 bolas, sendo 2 bolas brancas e 3 bolas vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, *com reposição*.



Qual a probabilidade da 2ª bola sorteada ser da cor vermelha?

Cálculo de Probabilidades



VV P(VV) = 3/5x3/5=9/25

VB P(VB) = 3/5x2/5=6/25

BV P(BV) = 2/5x3/5=6/25

BB P(BB) = 2/5x2/5=4/25

P(2ª bola vermelha) = P(VV) + P(BV) = 9/25 + 6/25 = 15/25 = 0,60

Sumário

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$P(A|B) = P(A), \; P(B) > 0.$$

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$P(A|B) = P(A), \; P(B) > 0.$$

Consequência

Da definição de probabilidade condicional temos que

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$P(A|B) = P(A), \; P(B) > 0.$$

Consequência

Da definição de probabilidade condicional temos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; P(B) > 0.$$

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$P(A|B) = P(A),\ P(B) > 0.$$

Consequência

Da definição de probabilidade condicional temos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0.$$

Logo, a independência entre A e B é equivalente a

Definição

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$P(A|B) = P(A), \ P(B) > 0.$$

Consequência

Da definição de probabilidade condicional temos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \ P(B) > 0.$$

Logo, a independência entre A e B é equivalente a

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemplo 1

Eventos

Eventos

- $V1$: ocorrência de bola vermelha na 1ª retirada

Exemplo 1

Eventos

- $V1$: ocorrência de bola vermelha na 1ª retirada
- $V2$: ocorrência de bola vermelha na 2ª retirada

Exemplo 1

Eventos

- $V1$: ocorrência de bola vermelha na 1ª retirada
- $V2$: ocorrência de bola vermelha na 2ª retirada

Sem Reposição

Exemplo 1

Eventos

- $V1$: ocorrência de bola vermelha na 1ª retirada
- $V2$: ocorrência de bola vermelha na 2ª retirada

Sem Reposição

Temos que $P(V2|V1) = 2/4 = 0,50$ e $P(V2) = 0,60$. Portanto, os eventos $V1$ e $V2$ não são independentes.

Exemplo 1

Eventos

- $V1$: ocorrência de bola vermelha na $1^{\underline{a}}$ retirada
- $V2$: ocorrência de bola vermelha na $2^{\underline{a}}$ retirada

Sem Reposição

Temos que $P(V2|V1) = 2/4 = 0,50$ e $P(V2) = 0,60$. Portanto, os eventos $V1$ e $V2$ não são independentes.

Com Reposição

Exemplo 1

Eventos

- $V1$: ocorrência de bola vermelha na 1ª retirada
- $V2$: ocorrência de bola vermelha na 2ª retirada

Sem Reposição

Temos que $P(V2|V1) = 2/4 = 0,50$ e $P(V2) = 0,60$. Portanto, os eventos $V1$ e $V2$ não são independentes.

Com Reposição

Temos que $P(V2|V1) = 3/5$ e $P(V2) = 3/5$. Portanto, os eventos $V1$ e $V2$ são independentes.

Sumário

Exemplo 2

Descrição

A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é 1/3 e a de Madalena é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

Exemplo 2

Descrição

A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é 1/3 e a de Madalena é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

Eventos

- A: Jonas ser aprovado

Exemplo 2

Descrição

A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é 1/3 e a de Madalena é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

Eventos

- A: Jonas ser aprovado
- B: Madalena ser aprovada

Exemplo 2

Descrição

A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é 1/3 e a de Madalena é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

Eventos

- A: Jonas ser aprovado
- B: Madalena ser aprovada

Supondo que ambos resolvem as provas de forma independente

Exemplo 2

Descrição

A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é 1/3 e a de Madalena é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

Eventos

- A: Jonas ser aprovado
- B: Madalena ser aprovada

Supondo que ambos resolvem as provas de forma independente

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/3 \times 2/3 = 2/9.$$

Sumário

Exemplo 3

Descrição

Numa pesquisa sobre hábitos de fumar de uma população, constatou-se que 75% dos homens entrevistados fumam, 47% das mulheres fumam e 60% dos entrevitados eram homens.

Exemplo 3

Descrição

Numa pesquisa sobre hábitos de fumar de uma população, constatou-se que 75% dos homens entrevistados fumam, 47% das mulheres fumam e 60% dos entrevitados eram homens.

Eventos

- F: ser fumante

Exemplo 3

Descrição

Numa pesquisa sobre hábitos de fumar de uma população, constatou-se que 75% dos homens entrevistados fumam, 47% das mulheres fumam e 60% dos entrevitados eram homens.

Eventos

- F: ser fumante
- M: ser do sexo feminino

Exemplo 3

Descrição

Numa pesquisa sobre hábitos de fumar de uma população, constatou-se que 75% dos homens entrevistados fumam, 47% das mulheres fumam e 60% dos entrevitados eram homens.

Eventos

- F: ser fumante
- M: ser do sexo feminino
- H: ser do sexo masculino

Exemplo 3

Descrição

Numa pesquisa sobre hábitos de fumar de uma população, constatou-se que 75% dos homens entrevistados fumam, 47% das mulheres fumam e 60% dos entrevitados eram homens.

Eventos

- F: ser fumante
- M: ser do sexo feminino
- H: ser do sexo masculino

Qual a probabilidade de uma pessoa sorteada ao acaso dessa população ser fumante?

Exemplo 3

Descrição

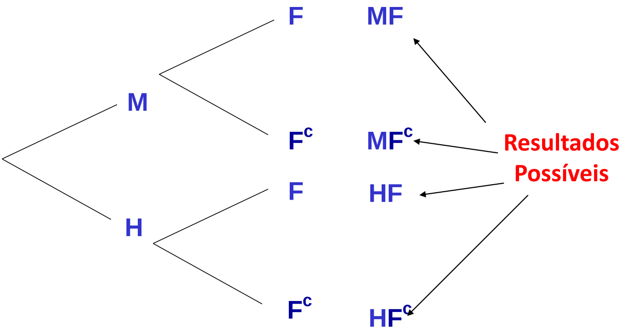
Numa pesquisa sobre hábitos de fumar de uma população, constatou-se que 75% dos homens entrevistados fumam, 47% das mulheres fumam e 60% dos entrevitados eram homens.

Eventos

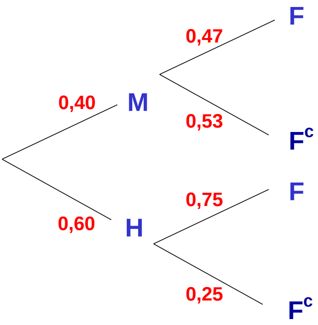
- F: ser fumante
- M: ser do sexo feminino
- H: ser do sexo masculino

Qual a probabilidade de uma pessoa sorteada ao acaso dessa população ser fumante?

Diagrama de Árvore



Cálculo de Probabilidades



MF P(MF) = 0,40x0,47=0,188

MF^c $P(MF^c)$= 0,40x0,53=0,212

HF P(HF) = 0,60x0,75=0,450

HF^c $P(HF^c)$ = 0,60x0,25=0,150

P(Fumante) = P(MF) + P(HF) = 0,188 + 0,450 = 0,638

Partição do Espaço Amostral

Sejam Ω um espaço amostral e $A_1, \ldots, A_n$ eventos dois a dois disjuntos e exaustivos de Ω, isto é

Partição do Espaço Amostral

Sejam Ω um espaço amostral e $A_1, \ldots, A_n$ eventos dois a dois disjuntos e exaustivos de Ω, isto é

- $\Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i$

Partição do Espaço Amostral

Sejam Ω um espaço amostral e $A_1, \ldots, A_n$ eventos dois a dois disjuntos e exaustivos de Ω, isto é

- $\Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$

Partição do Espaço Amostral

Sejam Ω um espaço amostral e $A_1, \ldots, A_n$ eventos dois a dois disjuntos e exaustivos de Ω, isto é

- $\Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$

Então dizemos que $\{A_1, ..., A_n\}$ é uma partição de Ω.

Regra da Probabilidade Total

Sejam Ω um espaço amostral e $\{A_1, ..., A_n\}$ uma partição de Ω.

Regra da Probabilidade Total

Sejam Ω um espaço amostral e $\{A_1, ..., A_n\}$ uma partição de Ω. Para um evento quealquer B temos que

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

Regra da Probabilidade Total

Sejam Ω um espaço amostral e $\{A_1, ..., A_n\}$ uma partição de Ω. Para um evento quealquer B temos que

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

Assim, pela regra de Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}.$$

Sumário

Exemplo 4

Descrição

O portifólio de uma seguradora de veículos é formado por apólices para automóveis e para caminhões na proporção de 70% e 30%, respectivamente.

Descrição

O portifólio de uma seguradora de veículos é formado por apólices para automóveis e para caminhões na proporção de 70% e 30%, respectivamente.
No setor de automóveis 30% dos sinistros resultam em perda total, 60% em perda parcial e 10% são dedutíveis.

Descrição

O portifólio de uma seguradora de veículos é formado por apólices para automóveis e para caminhões na proporção de 70% e 30%, respectivamente.
No setor de automóveis 30% dos sinistros resultam em perda total, 60% em perda parcial e 10% são dedutíveis.
No setor de caminhões 40% dos sinistros resultam em perda total, 50% em perda parcial e 10% são dedutíveis.

Exemplo 4

Descrição

O portifólio de uma seguradora de veículos é formado por apólices para automóveis e para caminhões na proporção de 70% e 30%, respectivamente.
No setor de automóveis 30% dos sinistros resultam em perda total, 60% em perda parcial e 10% são dedutíveis.
No setor de caminhões 40% dos sinistros resultam em perda total, 50% em perda parcial e 10% são dedutíveis.

Eventos

Exemplo 4

Descrição

O portifólio de uma seguradora de veículos é formado por apólices para automóveis e para caminhões na proporção de 70% e 30%, respectivamente.
No setor de automóveis 30% dos sinistros resultam em perda total, 60% em perda parcial e 10% são dedutíveis.
No setor de caminhões 40% dos sinistros resultam em perda total, 50% em perda parcial e 10% são dedutíveis.

Eventos

- A: automóvel

Exemplo 4

Descrição

O portifólio de uma seguradora de veículos é formado por apólices para automóveis e para caminhões na proporção de 70% e 30%, respectivamente.
No setor de automóveis 30% dos sinistros resultam em perda total, 60% em perda parcial e 10% são dedutíveis.
No setor de caminhões 40% dos sinistros resultam em perda total, 50% em perda parcial e 10% são dedutíveis.

Eventos

- A: automóvel
- C: caminhão

Exemplo 4

Descrição

O portifólio de uma seguradora de veículos é formado por apólices para automóveis e para caminhões na proporção de 70% e 30%, respectivamente.
No setor de automóveis 30% dos sinistros resultam em perda total, 60% em perda parcial e 10% são dedutíveis.
No setor de caminhões 40% dos sinistros resultam em perda total, 50% em perda parcial e 10% são dedutíveis.

Eventos

- A: automóvel
- C: caminhão
- T: perda total

Exemplo 4

Descrição

O portifólio de uma seguradora de veículos é formado por apólices para automóveis e para caminhões na proporção de 70% e 30%, respectivamente.
No setor de automóveis 30% dos sinistros resultam em perda total, 60% em perda parcial e 10% são dedutíveis.
No setor de caminhões 40% dos sinistros resultam em perda total, 50% em perda parcial e 10% são dedutíveis.

Eventos

- A: automóvel
- C: caminhão
- T: perda total
- P: perda parcial

Exemplo 4

Descrição

O portifólio de uma seguradora de veículos é formado por apólices para automóveis e para caminhões na proporção de 70% e 30%, respectivamente.
No setor de automóveis 30% dos sinistros resultam em perda total, 60% em perda parcial e 10% são dedutíveis.
No setor de caminhões 40% dos sinistros resultam em perda total, 50% em perda parcial e 10% são dedutíveis.

Eventos

- A: automóvel
- C: caminhão
- T: perda total
- P: perda parcial
- D: dedutível

Exemplo 4

Descrição

O portifólio de uma seguradora de veículos é formado por apólices para automóveis e para caminhões na proporção de 70% e 30%, respectivamente.
No setor de automóveis 30% dos sinistros resultam em perda total, 60% em perda parcial e 10% são dedutíveis.
No setor de caminhões 40% dos sinistros resultam em perda total, 50% em perda parcial e 10% são dedutíveis.

Eventos

- A: automóvel
- C: caminhão
- T: perda total
- P: perda parcial
- D: dedutível

Exemplo 4

Descrição

Se em determinado acidente houve perda parcial, qual a probabilidade de que o veículo acidentado foi um automóvel?

Exemplo 4

Descrição

Se em determinado acidente houve perda parcial, qual a probabilidade de que o veículo acidentado foi um automóvel? Portanto, queremos calcular $P(A|P) = P(A \cap P)/P(P)$.

Exemplo 4

Descrição

Se em determinado acidente houve perda parcial, qual a probabilidade de que o veículo acidentado foi um automóvel? Portanto, queremos calcular $P(A|P) = P(A \cap P)/P(P)$.

Probabilidades

Exemplo 4

Descrição

Se em determinado acidente houve perda parcial, qual a probabilidade de que o veículo acidentado foi um automóvel? Portanto, queremos calcular $P(A|P) = P(A \cap P)/P(P)$.

Probabilidades

- $P(A) = 0,70$ e $P(C) = 0,30$

Exemplo 4

Descrição

Se em determinado acidente houve perda parcial, qual a probabilidade de que o veículo acidentado foi um automóvel? Portanto, queremos calcular $P(A|P) = P(A \cap P)/P(P)$.

Probabilidades

- $P(A) = 0,70$ e $P(C) = 0,30$
- no setor de automóveis $P(T|A) = 0,30$, $P(P|A) = 0,60$ e $P(D|A) = 0,10$

Exemplo 4

Descrição

Se em determinado acidente houve perda parcial, qual a probabilidade de que o veículo acidentado foi um automóvel? Portanto, queremos calcular $P(A|P) = P(A \cap P)/P(P)$.

Probabilidades

- $P(A) = 0,70$ e $P(C) = 0,30$
- no setor de automóveis $P(T|A) = 0,30$, $P(P|A) = 0,60$ e $P(D|A) = 0,10$
- no setor de caminhões $P(T|C) = 0,40$, $P(P|C) = 0,50$ e $P(D|C) = 0,10$

Cálculo da Probabilidade

Temos que

Cálculo da Probabilidade

Temos que

$$\begin{aligned} P(A \cap P) &= P(P|A) \times P(P) \\ &= 0,60 \times 0,70 = 0,42. \end{aligned}$$

Exemplo 4

Cálculo da Probabilidade

Temos que

$$\begin{aligned}
P(A \cap P) &= P(P|A) \times P(P) \\
&= 0,60 \times 0,70 = 0,42. \\
P(P) &= P(P|A)P(A) + P(P|C)P(C) \\
&= 0,60 \times 0,70 + 0,50 \times 0,30 \\
&= 0,42 + 0,15 = 0,57.
\end{aligned}$$

Exemplo 4

Cálculo da Probabilidade

Temos que

$$\begin{aligned} P(A \cap P) &= P(P|A) \times P(P) \\ &= 0,60 \times 0,70 = 0,42. \\ P(P) &= P(P|A)P(A) + P(P|C)P(C) \\ &= 0,60 \times 0,70 + 0,50 \times 0,30 \\ &= 0,42 + 0,15 = 0,57. \end{aligned}$$

Logo

$$P(A|P) = \frac{0,42}{0,57} \cong 0,737.$$