



## Estados Duplos de Tensão

(Aula 13/03/2017)

Professores:  
Ruy Marcelo O. Pauletti, Leila Meneghetti, Luís Bitencourt  
1º Semestre 2017

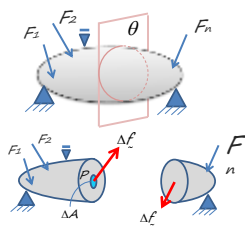
## Sumário

- ✓ Princípio de Euler Cauchy
- ✓ Tensão normal e tangencial
- ✓ Estado de tensão em um ponto
- ✓ Tensor das tensões de Cauchy
- ✓ Estado duplo de tensão
- ✓ Tensão plana
- ✓ Tensões atuando em um plano inclinado
- ✓ Equações de transformação
- ✓ Tensões e planos principais
- ✓ Tensões de cisalhamento máximas
- ✓ Círculo de Mohr
- ✓ Estados de tensões especiais



## Tensão

### • Princípio de Euler e Cauchy

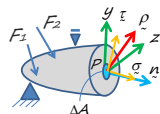


- ✓ Sólido em equilíbrio
- ✓ Corte imaginário em um plano  $\theta$

$$\underline{\rho}(\mathcal{P}, \theta) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{f}}{\Delta A}$$

*importante!!!*  
tensão depende do ponto de aplicação (P) e do plano de atuação ( $\theta$ )

$\|\underline{n}\| = 1$  (versor que define o plano  $\theta$ )



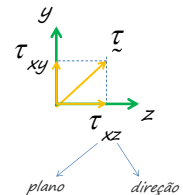
## Tensão

### • Tensão Normal

$$\underline{\sigma} = \underbrace{(\underline{\rho} \cdot \underline{n})}_{\text{produto escalar}} \underline{n} = \sigma \underline{n}, \text{ onde } \sigma = \|\underline{\sigma}\| = \underline{\rho} \cdot \underline{n}$$

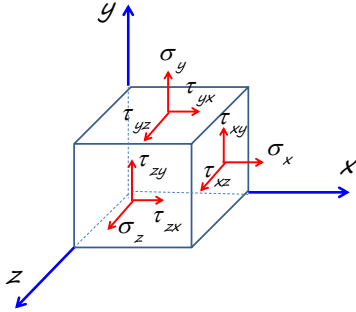
### • Tensão Tangencial

$$\underline{\tau} = \underline{\rho} - \underline{\sigma}$$



### Tensão

- Estado de tensão em um ponto



✓ Convenção de sinais (teoria da elasticidade)

$\sigma > 0 \rightarrow$  tração  
 $\tau_{xy} > 0 \rightarrow$  sentido positivo em ambos os eixos



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



### Tensão

- Tensor das tensões (Cauchy)

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

- ✓ Obs: Conhecendo as tensões em 3 planos ortogonais quaisquer, é possível se obter as tensões em qualquer outro plano
- ✓ Def.: Plano principal  $\Rightarrow \underline{\tau} = 0$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

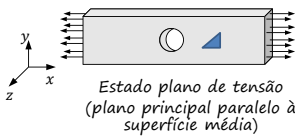


### Estado Duplo de Tensão

- ✓ Em diversos problemas é possível reconhecer a priori um dos planos principais ( $\underline{\tau} = 0$ ). Nesses casos, diz-se que o sólido está submetido a um ESTADO DUPLO DE TENSÃO

#### Exemplos

#### chapas finas



#### barragens



#### Superfícies livres



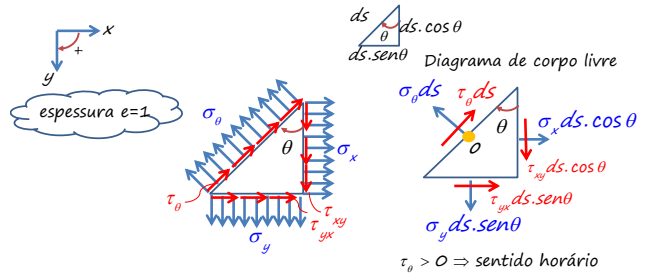
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



### Estado Duplo de Tensão

#### Tensão plana

- ✓ No estado duplo, o equilíbrio de um prisma triangular infinitesimal contendo o ponto P permite obter as tensões em qualquer plano ortogonal ao plano da face triangular



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



### Estado Duplo de Tensão

#### Tensão em seções inclinadas

✓ Equilíbrio do prisma

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

As tensões tangenciais em dois planos ortogonais são iguais em módulo e têm sentidos opostos junto à aresta comum aos planos.

$$\sum F(\sigma_\theta) = 0 \Rightarrow \sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sum F(\tau_\theta) = 0 \Rightarrow \tau_\theta = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

### Estado Duplo de Tensão

#### Equações de transformação para tensão plana

Relações trigonométricas

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

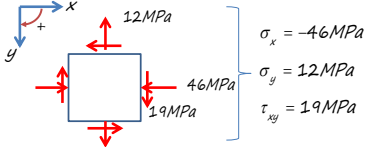
$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

#### Exercício 01

Um elemento sob tensão plana na superfície de uma estrutura carregada é ilustrado na figura abaixo. Determine as tensões atuando em um elemento que está orientado a um ângulo de 15° no sentido horário em relação ao elemento original



Substituindo nas equações de transformação:

$$\sigma_{\theta=15^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \frac{\sin 2\theta}{0,5} = -32,6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\theta=15^\circ} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \frac{\sin 2\theta}{0,5} + \tau_{xy} \frac{\cos 2\theta}{0,8660} = 31 \text{ MPa}$$

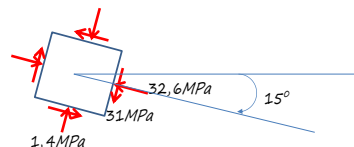
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

#### Exercício 01

Tensão normal atuando em um plano ortogonal:  $\theta + 90^\circ = 105^\circ$

$$\sigma_{\theta=105^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \frac{\sin 2\theta}{-0,5} = -1,4 \text{ MPa}$$

Verificar que:  $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{\theta=15^\circ} + \sigma_{\theta=105^\circ} = -34 \text{ MPa}$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

**Estado Duplo de Tensão**

*Tensões e planos principais*

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \text{sen} 2\theta + 2\tau_{xy} \text{cos} 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Planos principais

✓ Obs:

$$\tau_{\theta} = 0 \Rightarrow -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \text{sen} 2\theta + \tau_{xy} \text{cos} 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

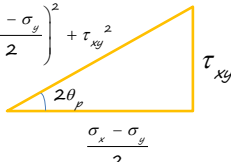
Os planos onde atuam as tensões máximas e mínimas são também planos principais (tensão de cisalhamento é nula)

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

**Estado Duplo de Tensão**

*Tensões e planos principais*

✓ Tensões principais

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$


$$\cos 2\theta_p = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2r}$$

$$\text{sen} 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{r}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

**Estado Duplo de Tensão**

*Tensões de cisalhamento máximas*

$$\frac{\partial \tau_{\theta}}{\partial \theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \text{cos} 2\theta - 2\tau_{xy} \text{sen} 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

Planos de tensões de cisalhamento máximas positiva e negativa

$$\text{sen} 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2r}$$

$$\text{cos} 2\theta_s = \frac{\tau_{xy}}{r}$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

**Estado Duplo de Tensão**

*Tensões de cisalhamento máximas*

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Os planos de tensão de cisalhamento máxima também contêm tensões normais

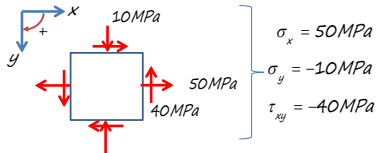
$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

**Exercício 02**

Para o elemento sob tensão plana abaixo, pede-se:

- Determine as tensões principais e faça um esboço do elemento
- Determine as tensões de cisalhamento máximas e faça um esboço do elemento



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

**Exercício 02**

a) Solução: alternativa 1

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times (-40)}{50 - (-10)} = -1,33 \Rightarrow 2\theta_p = -53,13^\circ$$

$$2\theta_p = -53,13^\circ \quad e \quad \theta_p = -26,6^\circ$$

$$2\theta_p = 126,87^\circ \quad e \quad \theta_p = 63,4^\circ$$

Substituindo nas equações de transformação:

$$\sigma_{\theta=-26,6^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \frac{\sin 2\theta}{-0,8} = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\theta=63,4^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \frac{\sin 2\theta}{0,8} = -30 \text{ MPa}$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

**Exercício 02**

a) Solução: alternativa 2

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 20 \pm 50 \begin{cases} \sigma_1 = 70 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -30 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sin 2\theta_{p_1} = \frac{\tau_{xy}}{r} = \frac{-40}{50} = -0,8$$

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2r} = \frac{50 - (-10)}{2 \times 50} = 0,6$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \Rightarrow 2\theta_{p_1} = -53,13^\circ \Rightarrow \theta_{p_1} = -26,6^\circ$$

$$\theta_{p_2} = \theta_{p_1} + 90^\circ = 63,4^\circ$$

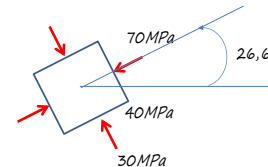
**Exercício 02**

a) Solução: alternativa 2

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 20 \pm 50 \begin{cases} \sigma_1 = 70 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -30 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 70 \text{ MPa} \quad e \quad \theta_{p_1} = -26,6^\circ$$

$$\sigma_2 = -30 \text{ MPa} \quad e \quad \theta_{p_2} = 63,4^\circ$$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

**Exercício 02**

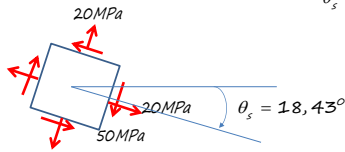
b) Solução: alternativa 2

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 20 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{50 - (-10)}{2 \times (-40)} = 0,75 \Rightarrow 2\theta_s = 36,86^\circ$$

$$\theta_s = 18,43^\circ$$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



**Estado Duplo de Tensão**  
**Círculo de Mohr para tensão plana**

$$\left[ \sigma - \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \right]^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

↓ círculo

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

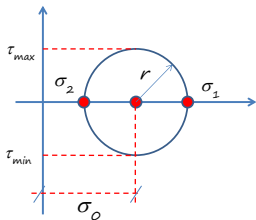
centro:  $\sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$  e  $\tau_o = 0$       raio:  $r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



**Estado Duplo de Tensão**  
**Círculo de Mohr para tensão plana**



centro:  $\sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$  e  $\tau_o = 0$

raio:  $r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



**Estado Duplo de Tensão**  
**Círculo de Mohr para tensão plana**

✓ **Tensões principais**

✓ **Tensões normal máxima**

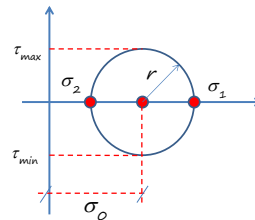
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

✓ **Tensões normal mínima**

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

✓ **Tensão de cisalhamento máxima e mínima**

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



centro:  $\sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$  e  $\tau_o = 0$

raio:  $r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



### Estado Duplo de Tensão

#### Propriedades do estado duplo de tensão

✓ As tensões de cisalhamento são nulas nos planos onde atuam as tensões principais:  $\sigma_{max}$  e  $\sigma_{min}$ .

✓ Os planos principais são ortogonais;

✓ A soma das tensões normais em 2 planos ortogonais quaisquer é constante:

$$\sigma_{(\theta)} + \sigma_{(\theta+\frac{\pi}{2})} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$$

✓ As tensões de cisalhamento extremas valem:

$$\tau_{max} = -\tau_{min} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

✓ As tensões normais nos planos de  $\tau_{max}$  e  $\tau_{min}$  valem:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



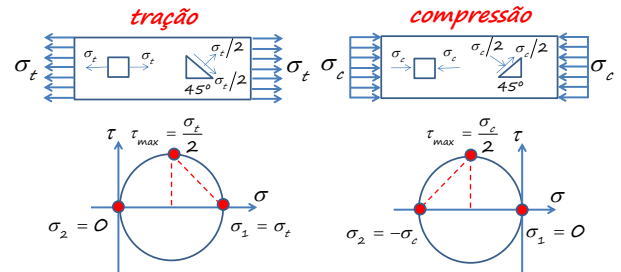
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



### Estado Duplo de Tensão

#### Estados de tensão especiais

✓ Estado simples de tensão



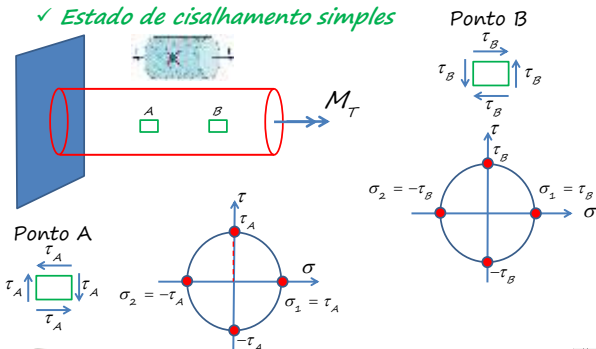
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



### Estado Duplo de Tensão

#### Estados de tensão especiais

✓ Estado de cisalhamento simples



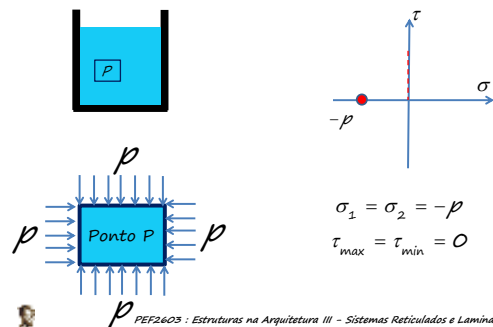
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



### Estado Duplo de Tensão

#### Estados de tensão especiais

✓ Estado hidrostático de tensão

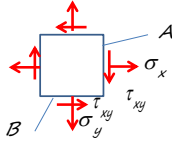


PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

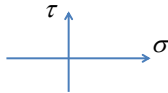


**Estado Duplo de Tensão**

**Construção do círculo de Mohr**

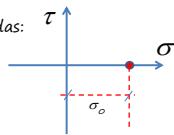


1. Desenhar um sistema de coordenadas conforme desenho esquemático abaixo:



2. Localizar o centro C do círculo com coordenadas:

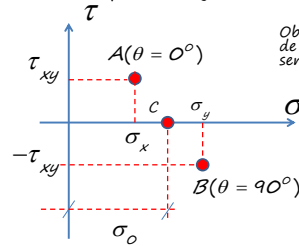
$$\sigma_o = \sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{ e } \tau_o = 0$$



**Estado Duplo de Tensão**

**Construção do círculo de Mohr**

3. Localize os pontos A e B a partir das suas componentes de tensões atuantes nesses dois planos ortogonais

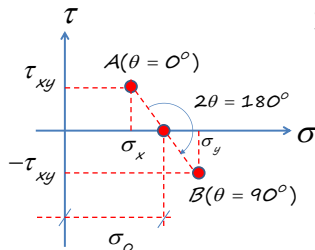


Obs: No círculo de Mohr a tensão de cisalhamento é positiva no sentido horário:

**Estado Duplo de Tensão**

**Construção do círculo de Mohr**

4. Desenhe uma linha do ponto A ao ponto B. Essa linha é o diâmetro do círculo e passa pelo centro C. Lembre que os pontos representam as tensões em planos ortogonais (90°) e no círculo estão 180° separados.

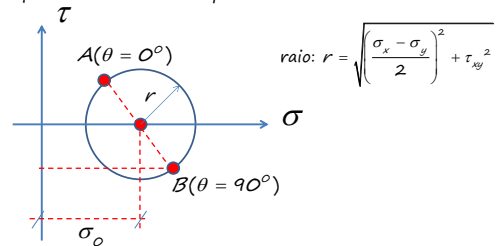


Obs: No círculo de Mohr a tensão de cisalhamento é positiva no sentido horário:

**Estado Duplo de Tensão**

**Construção do círculo de Mohr**

5. Usando o ponto C como centro, desenhe o círculo através dos pontos A e B. Note que o círculo desenhado possui raio r.

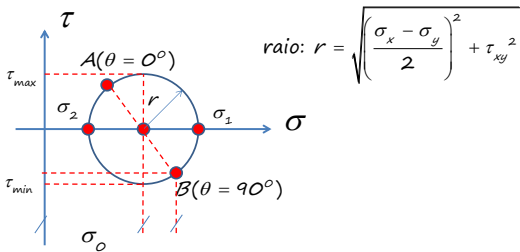




### Estado Duplo de Tensão

#### Construção do círculo de Mohr

6. Pode-se determinar por inspeção as tensões principais e tensões de cisalhamento máximas e seus respectivos ângulos (considerando o sentido horário como positivo) a partir do plano.



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

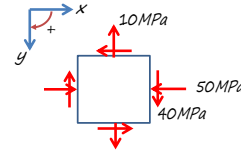


### Estado Duplo de Tensão

#### Exercício 03

Para um ponto na superfície de um sólido ilustrado abaixo sob estado duplo de tensões, calcule as quantidades a seguir com base no círculo de Mohr:

- a) Tensões agindo em um plano inclinado a um ângulo de 45°
  - b) As tensões principais
  - c) Tensões de cisalhamento máximas
- Obs: desenhar os resultados obtidos nos elementos infinitesimais



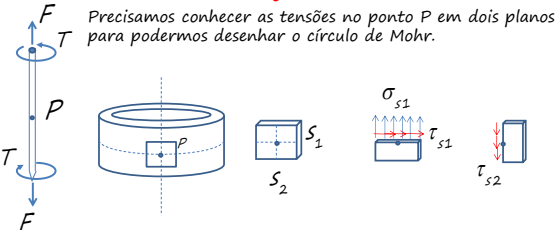
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



#### Exercício 04 (Prof. Martin)

Uma caneta com diâmetro de  $\phi=8$  mm e espessura de parede de  $e=0,5$ mm é submetida simultaneamente a uma torção de  $T=0,1$ Nm e uma força de tração  $F=50$ N. Qual a máxima tensão de cisalhamento que ocorre no ponto P, e qual a sua direção? Desenhe o círculo de Mohr do ponto P.

#### Resolução



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



#### Exercício 04 (Prof. Martin)

#### Resolução (cont...)

$$\text{em } S_1: \sigma_{s1} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi \phi e} = 3,98 \text{MPa}$$

$$\tau_{s1} A \frac{\phi}{2} = T \Rightarrow \tau_{s1} = \frac{2T}{\phi A} = \frac{2T}{\phi \pi \phi e} = 1,99 \text{MPa}$$

$$\text{em } S_2: \tau_{s2} = \tau_{s1} = 1,99 \text{MPa}$$

$$\sigma_{s2} = 0$$

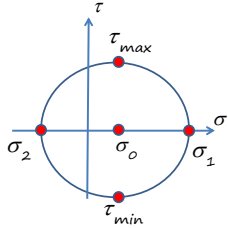


PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



## Exercício 04 (Prof. Martin)

Resolução (cont...)



$$\sigma_0 = \sigma_{\text{médio}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{3,98 + 0}{2} = 1,99 \text{MPa}$$

$$\tau_{\text{max}} = -\tau_{\text{min}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\text{max}} = -\tau_{\text{min}} = \sqrt{1,99^2 + 1,99^2} = 2,81 \text{MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \begin{cases} \sigma_1 = 1,99 + 2,81 = 4,80 \text{MPa} \\ \sigma_2 = 1,99 - 2,81 = -0,82 \text{MPa} \end{cases}$$

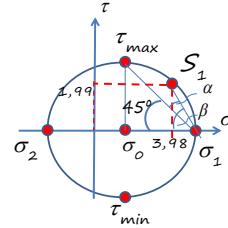


PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



## Exercício 04 (Prof. Martin)

Resolução (cont...)



$$\tan \beta = \frac{\tau_{s1}}{(\sigma_1 - \sigma_{s1})} \Rightarrow \beta = 67,60^\circ$$

$$\alpha = \beta - 45^\circ = 22,60^\circ$$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

