



PEF2603
*Estruturas na Arquitetura III -
 Sistemas Reticulados e Laminares*



Estados Duplos de Tensão

(Aula 20/03/2017)

Professores:

Ruy Marcelo O. Pauletti, Leila Meneghetti, Luís Bitencourt

1º Semestre 2017

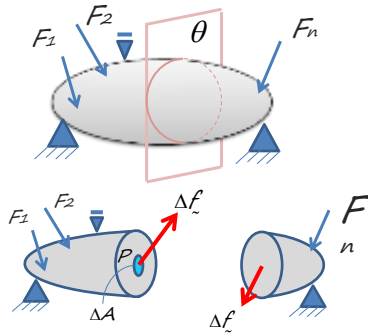
Sumário

- ✓Princípio de Euler Cauchy
- ✓Tensão normal e tangencial
- ✓Estado de tensão em um ponto
- ✓Tensor das tensões de Cauchy
- ✓Estado duplo de tensão
- ✓Tensão plana
- ✓Tensões atuando em um plano inclinado
- ✓Equações de transformação
- ✓Tensões e planos principais
- ✓Tensões de cisalhamento máximas
- ✓Círculo de Mohr
- ✓Estados de tensões especiais



Tensão

Princípio de Euler e Cauchy

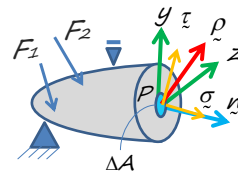


- ✓ Sólido em equilíbrio
- ✓ Corte imaginário em um plano θ

$$\underline{\rho}(P, \theta) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{f}}{\Delta A}$$

Importante!!!
tensão depende do ponto de aplicação (P) e do plano de atuação (θ)

$\|\underline{n}\| = 1$ (versor que define o plano θ)



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



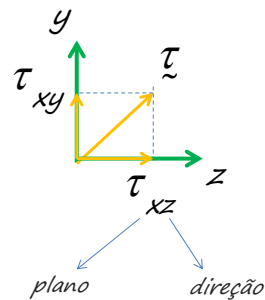
Tensão

Tensão Normal

$$\underline{\sigma} = \underbrace{(\underline{\rho} \cdot \underline{n})}_{\text{produto escalar}} \underline{n} = \sigma \underline{n}, \text{ onde } \sigma = \|\underline{\sigma}\| = \underline{\rho} \cdot \underline{n}$$

Tensão Tangencial

$$\underline{\tau} = \underline{\rho} - \underline{\sigma}$$

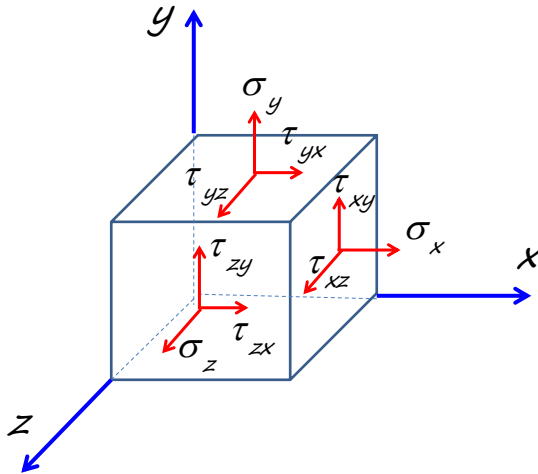


PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Tensão

- Estado de tensão em um ponto



✓ Convenção de sinais
(teoria da elasticidade)

$\sigma > 0 \rightarrow$ tração

$\tau_{xy} > 0 \rightarrow$ sentido positivo
em ambos os eixos



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Tensão

- Tensor das tensões (Cauchy)

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

- ✓ Obs: Conhecendo as tensões em 3 planos ortogonais quaisquer, é possível se obter as tensões em qualquer outro plano
- ✓ Def.: Plano principal $\Rightarrow \underline{T} = \underline{Q}$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

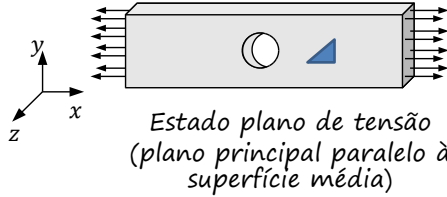


Estado Duplo de Tensão

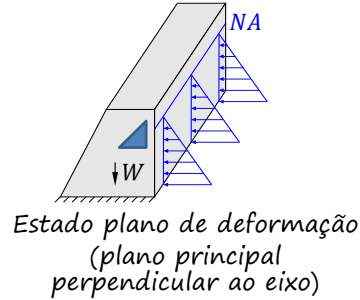
- ✓ Em diversos problemas é possível reconhecer a priori um dos planos principais ($\tau = 0$). Nesses casos, diz-se que o sólido está submetido a um **ESTADO DUPLO DE TENSÃO**

Exemplos

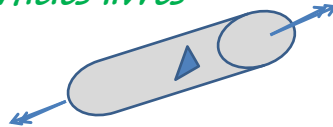
chapas finas



barragens



Superfícies livres

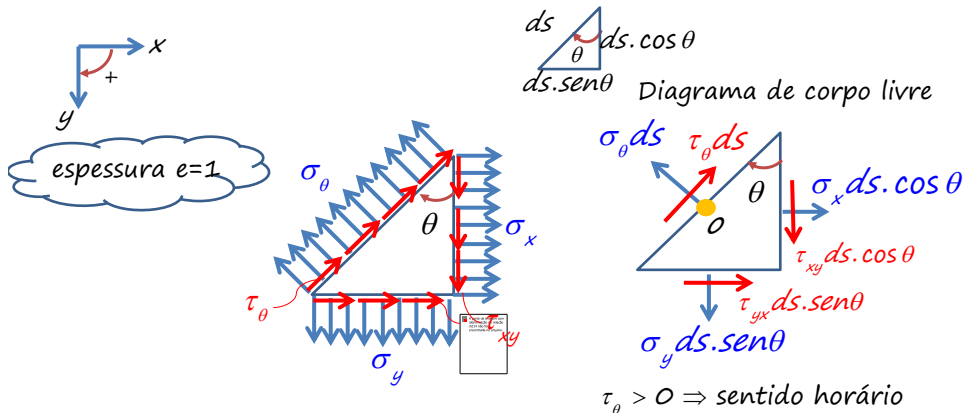


PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

Estado Duplo de Tensão

Tensão plana

- ✓ No estado duplo, o equilíbrio de um prisma triangular infinitesimal contendo o ponto P permite obter as tensões em qualquer plano ortogonal ao plano da face triangular



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

Estado Duplo de Tensão

Tensão em seções inclinadas

✓ Equilíbrio do prisma

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

As tensões tangenciais em dois planos ortogonais são iguais em módulo e têm sentidos opostos junto à aresta comum aos planos.

$$\sum F(\sigma_\theta) = 0 \Rightarrow \sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sum F(\tau_\theta) = 0 \Rightarrow \tau_\theta = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Equações de transformação para tensão plana

*Relações
trigonométricas*

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

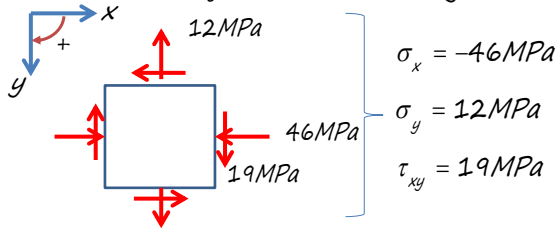


PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Exercício 01

Um elemento sob tensão plana na superfície de uma estrutura carregada é ilustrado na figura abaixo. Determine as tensões atuando em um elemento que está orientado a um ângulo de 15° no sentido horário em relação ao elemento original



Substituindo nas equações de transformação:

$$\sigma_{\theta=15^\circ} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{-17 \text{ MPa}} + \underbrace{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}_{-29 \text{ MPa}} \underbrace{\cos 2\theta}_{0,8660} + \tau_{xy} \underbrace{\frac{\text{sen} 2\theta}{0,5}}_{0,5} = -32,6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\theta=15^\circ} = - \underbrace{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)}_{-29 \text{ MPa}} \underbrace{\frac{\text{sen} 2\theta}{0,5}}_{0,5} + \tau_{xy} \underbrace{\frac{\cos 2\theta}{0,8660}}_{0,8660} = 31 \text{ MPa}$$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

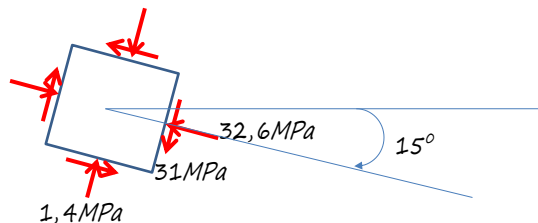


Exercício 01

Tensão normal atuando em um plano ortogonal: $\theta + 90^\circ = 105^\circ$

$$\sigma_{\theta=105^\circ} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{-17 \text{ MPa}} + \underbrace{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}_{-29 \text{ MPa}} \underbrace{\cos 2\theta}_{-0,8660} + \tau_{xy} \underbrace{\frac{\text{sen} 2\theta}{-0,5}}_{-0,5} = -1,4 \text{ MPa}$$

Verificar que: $\sigma_x + \sigma_y = \underbrace{\sigma_{\theta=15^\circ}}_{-32,6} + \underbrace{\sigma_{\theta=105^\circ}}_{-1,4} = -34 \text{ MPa}$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Tensões e planos principais

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Planos principais

✓ *Obs.:*

$$\tau_{\theta} = 0 \Rightarrow -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



Os planos onde atuam as tensões máximas e mínimas são também planos principais (tensão de cisalhamento é nula)



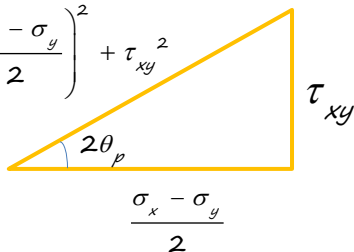
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Tensões e planos principais

✓ *Tensões principais*

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$


$$\cos 2\theta_p = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2r}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{r}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2$$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Tensões de cisalhamento máximas

$$\frac{\partial \tau_{\theta}}{\partial \theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2r}$$

$$\cos 2\theta_s = \frac{\tau_{xy}}{r}$$

Planos de tensões de cisalhamento máximas positiva e negativa



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Tensões de cisalhamento máximas

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Os planos de tensão de cisalhamento máxima também contêm tensões normais



$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



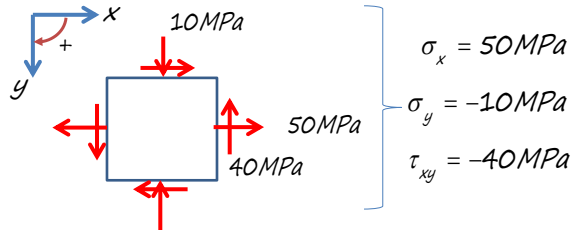
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Exercício 02

Para o elemento sob tensão plana abaixo, pede-se:

- Determine as tensões principais e faça um esboço do elemento
- Determine as tensões de cisalhamento máximas e faça um esboço do elemento



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Exercício 02

a) Solução: alternativa 1

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times (-40)}{50 - (-10)} = -1,33 \Rightarrow 2\theta_p = -53,13^\circ$$

$$2\theta_p = -53,13^\circ \quad e \quad \theta_p = -26,6^\circ$$

$$2\theta_p = 126,87^\circ \quad e \quad \theta_p = 63,4^\circ$$

Substituindo nas equações de transformação:

$$\sigma_{\theta=-26,6^\circ} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{20 \text{ MPa}} + \underbrace{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}_{30 \text{ MPa}} \underbrace{\cos 2\theta}_{0,6} + \tau_{xy} \underbrace{\frac{\sin 2\theta}{-0,8}}_{-0,8} = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\theta=63,4^\circ} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{20 \text{ MPa}} + \underbrace{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}_{30 \text{ MPa}} \underbrace{\cos 2\theta}_{-0,6} + \tau_{xy} \underbrace{\frac{\sin 2\theta}{0,8}}_{0,8} = -30 \text{ MPa}$$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Exercício 02

a) Solução: alternativa 2

$$\sigma_{1,2} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{20 \text{ MPa}} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}_{50 \text{ MPa}} = 20 \pm 50 \begin{cases} \sigma_1 = 70 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -30 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sin 2\theta_{p_1} = \frac{\tau_{xy}}{r} = \frac{-40}{50} = -0,8$$

$$\cos 2\theta_{p_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2r} = \frac{50 - (-10)}{2 \times 50} = 0,6$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \Rightarrow 2\theta_{p_1} = -53,13^\circ \Rightarrow \theta_{p_1} = -26,6^\circ$$

$$\theta_{p_2} = \theta_{p_1} + 90^\circ = 63,4^\circ$$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

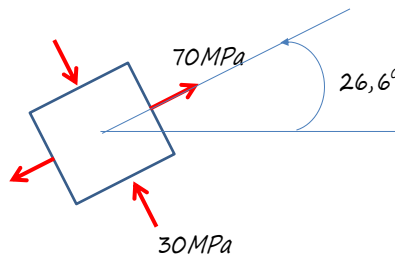
**Exercício 02**

a) Solução: alternativa 2

$$\sigma_{1,2} = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}_{20 \text{ MPa}} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}_{50 \text{ MPa}} = 20 \pm 50 \begin{cases} \sigma_1 = 70 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -30 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 70 \text{ MPa} \quad e \quad \theta_{p_1} = -26,6^\circ$$

$$\sigma_2 = -30 \text{ MPa} \quad e \quad \theta_{p_2} = 63,4^\circ$$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Exercício 02

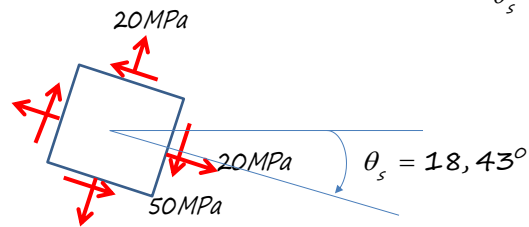
b)

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 20 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{50 - (-10)}{2 \times (-40)} = 0,75 \Rightarrow 2\theta_s = 36,86^\circ$$

$$\theta_s = 18,43^\circ$$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

**Estado Duplo de Tensão****Círculo de Mohr para tensão plana**

$$\left[\sigma - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \right]^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

↓ círculo

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$\text{centro: } \sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{ e } \tau_o = 0 \quad \text{raio: } r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

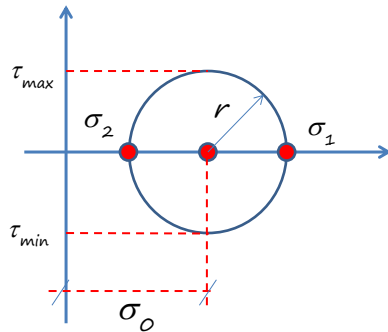


PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Círculo de Mohr para tensão plana



$$\text{centro: } \sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{ e } \tau_o = 0$$

$$\text{raio: } r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



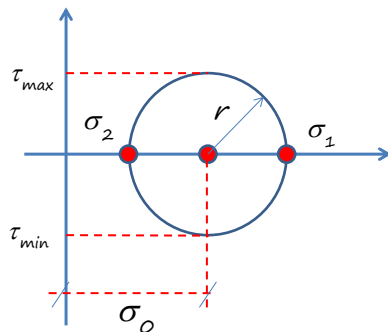
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Círculo de Mohr para tensão plana

✓ **Tensões principais**



$$\text{centro: } \sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{ e } \tau_o = 0$$

$$\text{raio: } r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

✓ **Tensões normal máxima**

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

✓ **Tensões normal mínima**

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

✓ **Tensão de cisalhamento máxima e mínima**

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Propriedades do estado duplo de tensão

- ✓ As tensões de cisalhamento são nulas nos planos onde atuam as tensões principais:

$$\sigma_{\max} \text{ e } \sigma_{\min}$$

- ✓ Os planos principais são ortogonais;

- ✓ A soma das tensões normais em 2 planos ortogonais quaisquer é constante:

$$\sigma_{(\theta)} + \sigma_{(\theta + \frac{\pi}{2})} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$$

- ✓ As tensões de cisalhamento extremas valem:

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

- ✓ As tensões normais nos planos de τ_{\max} e τ_{\min} valem:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



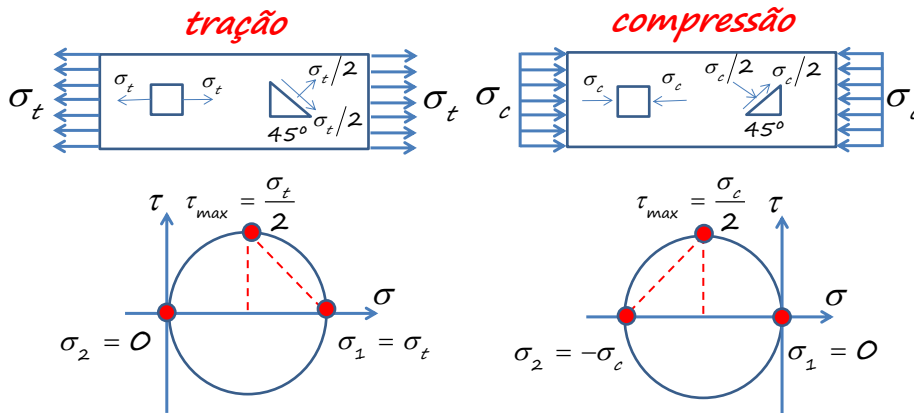
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Estados de tensão especiais

- ✓ Estado simples de tensão



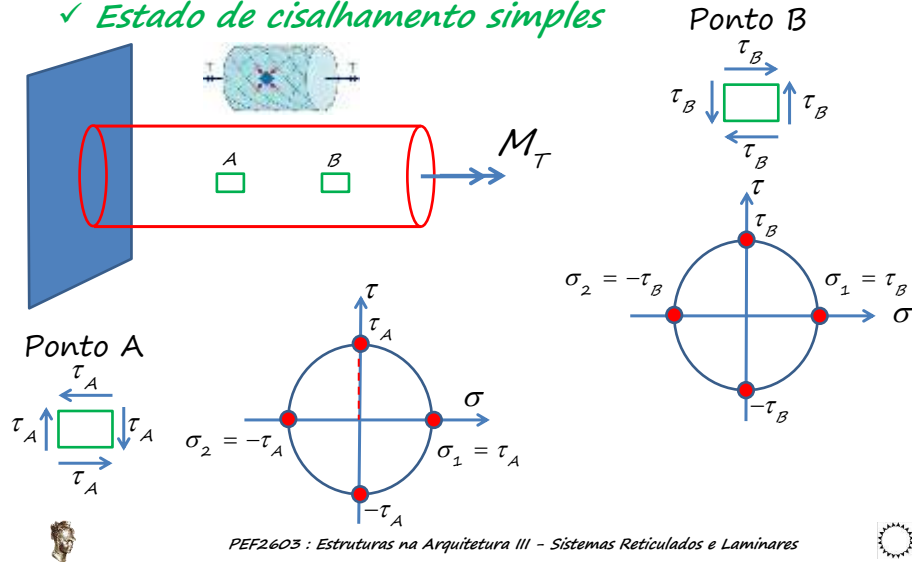
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Estados de tensão especiais

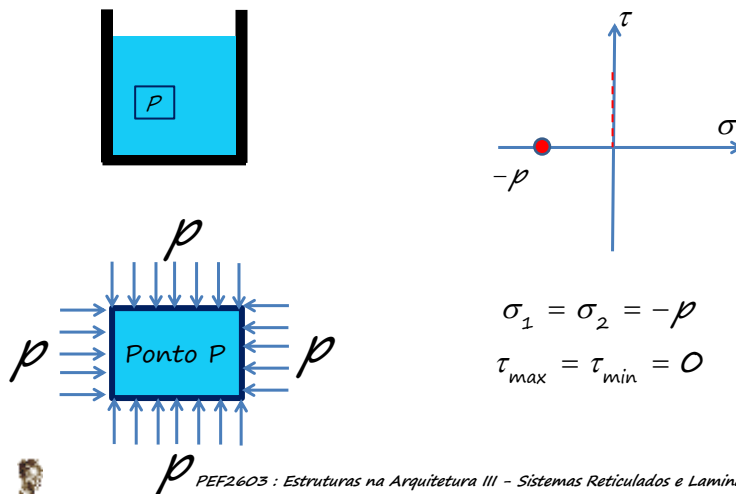
✓ Estado de cisalhamento simples



Estado Duplo de Tensão

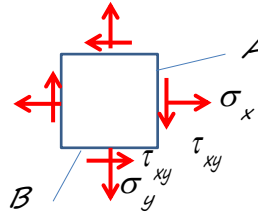
Estados de tensão especiais

✓ Estado hidrostático de tensão

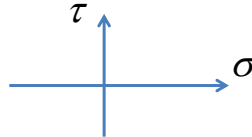


Estado Duplo de Tensão

Construção do círculo de Mohr

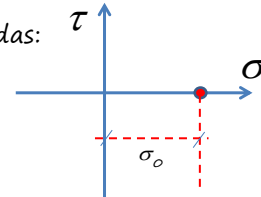


1. Desenhar um sistema de coordenadas conforme desenho esquemático abaixo:



2. Localizar o centro C do círculo com coordenadas:

$$\sigma_o = \sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \text{ e } \tau_o = 0$$



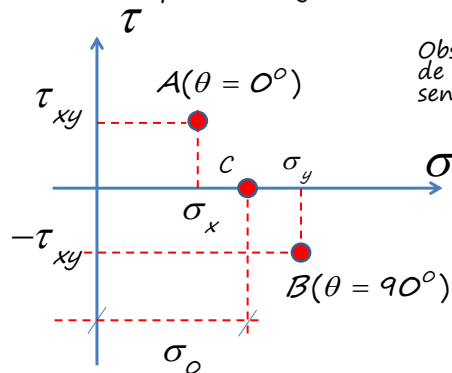
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Construção do círculo de Mohr

3. Localize os pontos A e B a partir das suas componentes de tensões atuantes nesses dois planos ortogonais



Obs: No círculo de Mohr a tensão de cisalhamento é positiva no sentido horário:



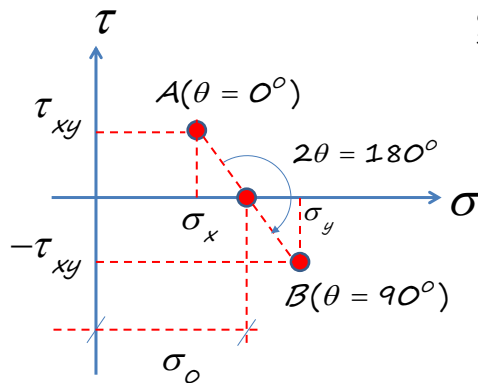
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Construção do círculo de Mohr

4. Desenhe uma linha do ponto A ao ponto B. Essa linha é o diâmetro do círculo e passa pelo centro C. Lembre que os pontos representam as tensões em planos ortogonais (90°) e no círculo estão 180° separados.



Obs: No círculo de Mohr a tensão de cisalhamento é positiva no sentido horário:



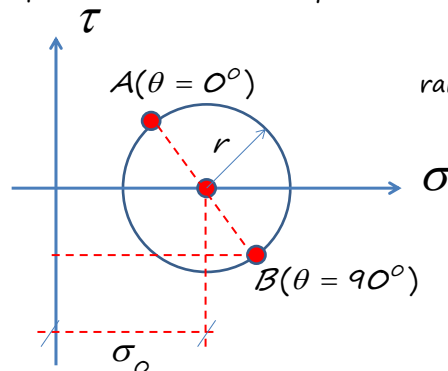
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Construção do círculo de Mohr

5. Usando o ponto C como centro, desenhe o círculo através dos pontos A e B. Note que o círculo desenhado possui raio r.



$$\text{raio: } r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



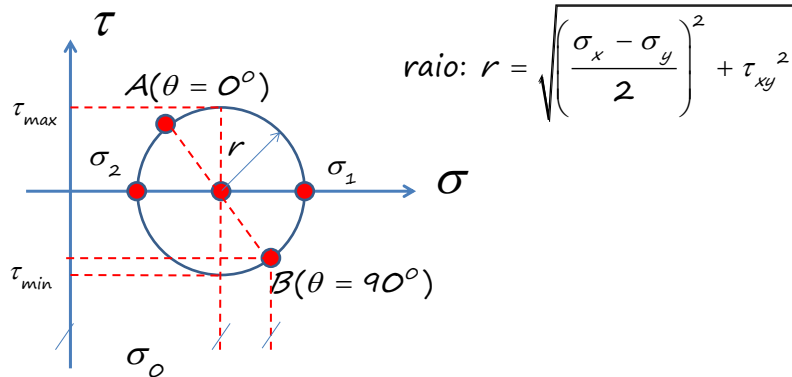
PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



Estado Duplo de Tensão

Construção do círculo de Mohr

6. Pode-se determinar por inspeção as tensões principais e tensões de cisalhamento máximas e seus respectivos ângulos (considerando o sentido horário como positivo) a partir do plano.



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares



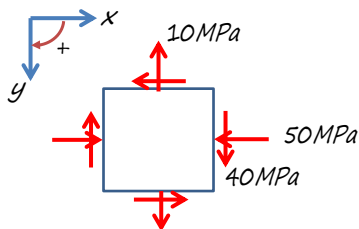
Estado Duplo de Tensão

Exercício 03

Para um ponto na superfície de um sólido ilustrado abaixo sob estado duplo de tensões, calcule as quantidades a seguir com base no círculo de Mohr:

- Tensões agindo em um plano inclinado a um ângulo de 45°
- As tensões principais
- Tensões de cisalhamento máximas

Obs: desenhar os resultados obtidos nos elementos infinitesimais



PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

