PEF2603
Estruturas na Arquitetura III –
Sistemas Reticulados e Laminares

Deformações na Flexão

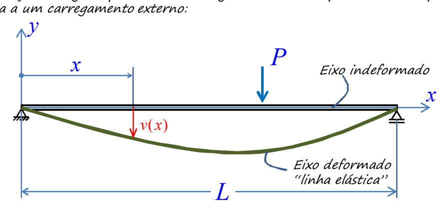
(27/03/2017)

Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti , Leila Meneghetti Valverdes, Luís Bitencourt

1º Semestre 2017

Deformações na Flexão

- *O conhecimento das deformações de uma estrutura têm um interesse intrínseco, uma vez que essas deformações devem ser limitadas;*
- *O estudo das deformações permite a resolução de problemas hiperestáticos, para os quais não bastam as equações de equilíbrio;*
- *Inicialmente, definimos alguma notação, tomando como exemplo o caso da deformação da viga biapoiada de eixo originalmente reto, que se deforma quando sujeita a um carregamento externo:*

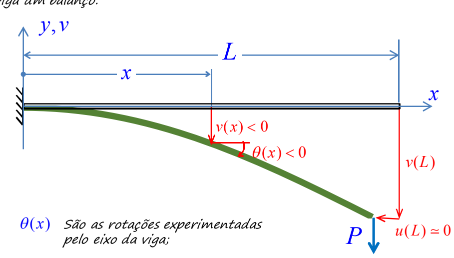


$v(x)$ *Descreve os deslocamentos transversais da viga;*

No sistema de coordenadas adotado, um deslocamento para baixo corresponde a $v(x) < 0$

Deformações na Flexão

Introduzimos mais alguma notação, e hipóteses cinemáticas, considerando o caso de uma viga dm balanço:



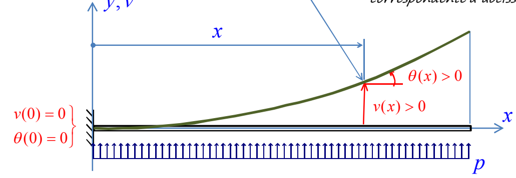
$\theta(x)$ *São as rotações experimentadas pelo eixo da viga;*

- *Vamos desprezar os deslocamentos longitudinais u(x), pois sua consideração leva a um problema não-linear, de resolução complicada;*
- *Essa é uma simplificação razoável para as vigas de uma edificação, mas não o seria para o caso de uma vara de pesca de fibra de vidro ou carbono, por exemplo.*

Deformações na Flexão

$O(x)$ *Centro de curvatura do eixo deformado, correspondente à abcissa x*

$\rho(x)$ *Raio de curvatura do eixo deformado, correspondente à abcissa x*



$$\boxed{\tan\theta(x) = \frac{dv}{dx}}$$

Deformações na Flexão

$$\tan\theta = \frac{dv}{dx}$$ é a derivada da função v(x) (ou seja da linha elástica da viga), em relação à abscissa x

(Assunto do cálculo diferencial, pré-requisito para as disciplinas do PEF)

Recordando, por exemplo:

$$f(x) = \sin ax \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = a\cos ax$$

$$f(x) = ax^n + b \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dx} = n \cdot ax^{(n-1)}$$

Nota: Recomenda-se aos alunos uma breve revisão das definições de derivadas e integrais, mas o trabalho de cálculo de nossa disciplina será reduzido ao mínimo necessário para bem definir o problema da linha elástica!

Deformações na Flexão

Em PEF2601, durante o estudo da flexão simples, chega-se à fórmula das tensões normais:

$$\sigma(y) = \frac{M}{EI}y$$

onde $\sigma(y)$ são as tensões normais devidas ao momento M

y é a distância da fibra considerada ao baricentro da seção transversal

E é o módulo de elasticidade do material

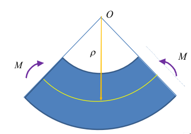
$I = I_{z0}$ é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo baricêntrico z_O.

Durante a dedução dessa fórmula, encontra-se um resultado intermediário, relacionando a curvatura da linha elástica da viga com as grandezas acima:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad (✪)$$

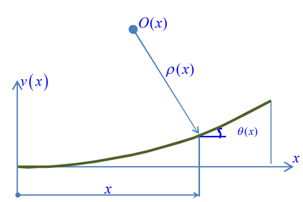
Onde κ é a curvatura da linha elástica

ρ é o raio de curvatura da linha elástica



Demonstração em aula:

Do estudo das curvas planas, dadas por $v = v(x)$



Sabe-se que a curvatura pode ser calculada pela expressão:

$$k(x) = \frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Admitindo a hipótese de pequenas rotações $\theta << 1$

Tem-se ainda que $\tan\theta = \dfrac{dv}{dx} \simeq \theta << 1$

E logo $k\left(x\right) \simeq \dfrac{d^2v}{dx^2}$ (✪ ✪)

Substituindo (✪ ✪) em (✪) chega-se a uma relação entre a segunda derivada da linha elástica v(x) e o momento fletor M(x) $\dfrac{d^2v}{dx^2} \simeq \dfrac{M}{EI}$

Sob a hipótese de pequenas rotações, é lícito admitir a igualdade, resultando a

EQUAÇÃO DA LINHA ELÁSTICA $\boxed{\dfrac{d^2v}{dx^2} = \dfrac{M}{EI}}$

Trata-se de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, com coeficientes constantes, de integração muito simples para as funções M(x) usuais, requerendo o conhecimento de duas condições de contorno, para determinar as constantes de integração:

Para entendermos melhor essa nomenclatura, vamos considerar, por exemplo, as derivadas da função polinomial

$$f\left(x\right) = x^3 + 2x^2 + 3x + 3$$

A sua primeira derivada é dada por: $\dfrac{df}{dx} = 3x^2 + 4x + 3$

E a sua segunda derivada: $\dfrac{d^2f}{dx^2} = 6x + 4$

Suponha-se que ao invés de $f\left(x\right)$ conheçamos apenas a segunda derivada $\dfrac{d^2f}{dx^2}$

Como podemos fazer para conhecer a função original?

$$f = \int\left(\frac{df}{dx}\right)dx + \mathbb{C}$$

Onde $\mathbb{C}$ é uma constante de integração.

Por exemplo para o monômio ax^n tem-se $\displaystyle\int\left(ax^n\right)dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + \mathbb{C}$

Aplicando esta regra para nossa função $\dfrac{d^2f}{dx^2} = 6x + 4$

$$\frac{df}{dx} = \int\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)dx = \int\left(6x+4\right)dx = \frac{6x^2}{2} + 4x + \mathbb{C}$$

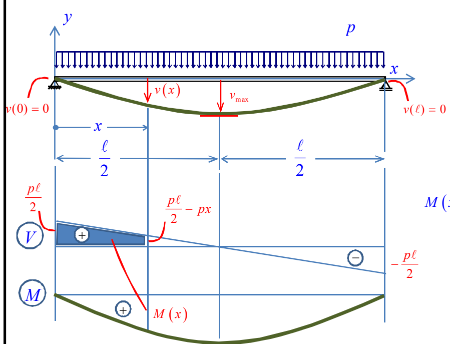
$$f = \int\left(\frac{df}{dx}\right)dx = \int\left(3x^2 + 4x + \mathbb{C}\right)dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + \mathbb{C}x + \mathbb{D}$$

$$\boxed{f = x^3 + 2x^2 + \mathbb{C}x + \mathbb{D}}$$

Para f(x) ser integralmente conhecida, precisa-se conhecer duas "condições de contorno", por exemplo

$$\begin{cases} f\left(0\right) = 3 \\ f(1) = 9 \end{cases} \qquad \text{Ou então} \qquad \begin{cases} f\left(0\right) = 3 \\ \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=0} = 3 \end{cases}$$

Exemplo: Determinar o máximo deslocamento da viga biapoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída.



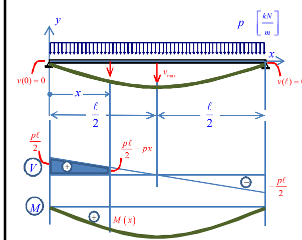
$$\begin{cases} v(0)=0 \\ v(\ell)=0 \\ v_{max}=v\left(\frac{\ell}{2}\right) \\ \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=\frac{\ell}{2}}=0 \end{cases}$$

$$M(x)=\frac{\left(\frac{p\ell}{2}\right)+\left(\frac{p\ell}{2}-px\right)}{2}\times x$$

$$\therefore$$

$$\boxed{M(x)=\frac{p\ell}{2}x-\frac{px^2}{2}}$$

Exemplo: Determinar o máximo deslocamento da viga biapoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída.



Equação da linha elástica:

$$\boxed{\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EI}=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{2}x-\frac{px^2}{2}\right)}$$

$$\theta=\frac{dv}{dx}=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{4}x^2-\frac{px^3}{6}\right)+\mathbb{C}$$

$$v=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{12}x^3-\frac{px^4}{24}\right)+\mathbb{C}x+\mathbb{D}$$

$$v=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{12}x^3-\frac{px^4}{24}\right)+\mathbb{C}x+\mathbb{D}$$

Condições de contorno:
$$\begin{cases} v(0)=0 & \therefore\ v(0)=\mathbb{D}=0 \\ v(\ell)=0 & \therefore\ v(\ell)=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell^4}{12}-\frac{p\ell^4}{24}\right)+\mathbb{C}\ell+\mathbb{D}=0 \end{cases}$$

$$\mathbb{C}=-\frac{p\ell^3}{24EI}$$

$$\boxed{v(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{12}x^3-\frac{px^4}{24}-\frac{p\ell^3}{24}x\right)}$$

$$\boxed{\theta=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{4}x^2-\frac{px^3}{6}-\frac{p\ell^3}{24}\right)}$$

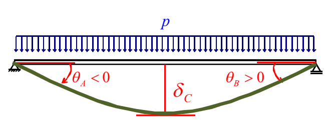
Por simetria, v(x) é máximo para x=l/2:

$$v_{max}=v\left(\frac{\ell}{2}\right)=\frac{1}{EI}\left(\frac{p\ell}{12}\left(\frac{\ell}{2}\right)^3-\frac{p}{24}\left(\frac{\ell}{2}\right)^4-\frac{p\ell^3}{24}\left(\frac{\ell}{2}\right)\right)$$

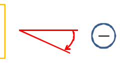
$$\boxed{v_{max}=-\frac{5}{384}\frac{p\ell^4}{EI}}$$

É usual expressar a flecha máxima em módulo:

$$\boxed{\delta_C=\left|v_{max}\right|=\frac{5}{384}\frac{p\ell^4}{EI}}$$

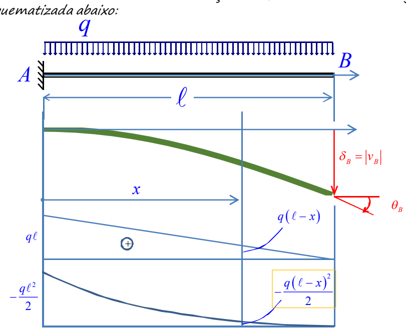


$$\boxed{\theta_A=-\frac{p\ell^3}{24EI}}$$



$$\boxed{\theta_B=+\frac{p\ell^3}{24EI}}$$

Exemplo: Determinar o deslocamento e a rotação da extremidade livre da viga em balanço esquematizada abaixo:



$$\boxed{M(x) = -\frac{q\ell^2}{2} + q\ell x - \frac{qx^2}{2}}$$

Momentos fletores: $M(x) = -\frac{q\ell^2}{2} + q\ell x - \frac{qx^2}{2}$

Equação da Linha Elástica: $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{q\ell^2}{2} + q\ell x - \frac{qx^2}{2}\right)$

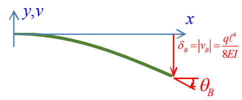
Integrando uma vez: $\frac{dv}{dx} = \theta(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{q\ell^2}{2}x + \frac{q\ell x^2}{2} - \frac{qx^3}{6}\right) + \mathbb{C}$

Condição de contorno $\theta(0) = \theta_A = 0 \Rightarrow \mathbb{C} = 0$

As rotações ficam determinadas: $\frac{dv}{dx} = \theta(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{q\ell^2}{2}x + \frac{q\ell x^2}{2} - \frac{qx^3}{6}\right)$

Integrando uma segunda vez: $v(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{q\ell^2}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{q\ell}{2}\frac{x^3}{6} - \frac{q}{6}\frac{x^4}{4}\right) + \mathbb{D}$

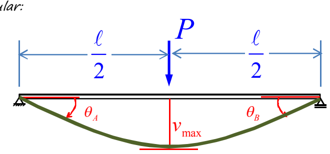
Condição de contorno $v(0) = v_A = 0 \Rightarrow \mathbb{D} = 0$ $\quad \boxed{v(x) = -\frac{qx^2}{24EI}\left(x^2 - 4\ell x + 6\ell^2\right)}$



$$\boxed{\delta_B = |v(\ell)| = \frac{q\ell^4}{8EI}} \qquad \boxed{\theta_B = |\theta(\ell)| = \frac{q\ell^3}{6EI}}$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

Outro caso particular:



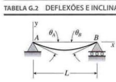
$$\boxed{v_{\max} = \frac{P\ell^4}{48EI}}$$ *(em módulo!):*

$$\boxed{\theta_A = -\frac{P\ell^2}{16EI}} \qquad \boxed{\theta_B = +\frac{P\ell^2}{16EI}}$$

É possível, tabular os resultados para diferentes casos de condições de apoio e carregamentos, por exemplo, as tabelas dos slides seguintes!

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares

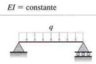
TABELA G.2 DEFLEXÕES E INCLINAÇÕES DE VIGAS SIMPLESMENTE APOIADAS



v = deflexão na direção y (positiva para cima)
$v' = dv/dx$ = inclinação da curva de deflexão
$\delta_C = -v(L/2)$ = deflexão no ponto médio C da viga (positiva para cima)
x_1 = distância do suporte A até o ponto de deflexão máxima
$\delta_{max} = -v_{max}$ = deflexão máxima (positiva para cima)
$\theta_A = -v'(0)$ = ângulo de rotação na extremidade esquerda da viga (positiva no sentido horário)
$\theta_B = v'(L)$ = ângulo de rotação da extremidade direita da viga (positivo no sentido anti-horário)

EI = constante

1

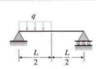


$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$

$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$

$\delta_C = \delta_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$

2



$v = -\frac{qx}{384EI}(9L^3 - 24Lx^2 + 16x^3) \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$

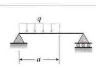
$v' = -\frac{q}{384EI}(9L^3 - 72Lx^2 + 64x^3) \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$

$v = -\frac{qL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3) \qquad \left(\frac{L}{2} \le x \le L\right)$

$v' = -\frac{qL}{384EI}(24x^2 - 48Lx + 17L^2) \qquad \left(\frac{L}{2} \le x \le L\right)$

$\delta_C = \frac{5qL^4}{768EI} \qquad \theta_A = \frac{3qL^3}{128EI} \qquad \theta_B = \frac{7qL^3}{384EI}$

3



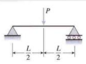
$v = -\frac{qx}{24LEI}(a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 2a^2x^2 - 4aLx^2 + Lx^3) \qquad (0 \le x \le a)$

$v' = -\frac{q}{24LEI}(a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 6a^2x^2 - 12aLx^2 + 4Lx^3) \qquad (0 \le x \le a)$

$v = -\frac{qa^2}{24LEI}(-a^2L + 4L^2x + a^2x - 6Lx^2 + 2x^3) \qquad (a \le x \le L)$

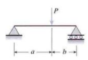
$v' = -\frac{qa^2}{24LEI}(4L^2 + a^2 - 12Lx + 6x^2) \qquad (a \le x \le L)$

$\theta_A = \frac{qa^2}{24LEI}(2L - a)^2 \qquad \theta_B = \frac{qa^2}{24LEI}(2L^2 - a^2)$

4 

$v = -\frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \qquad v' = -\frac{P}{16EI}(L^2 - 4x^2) \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$

$\delta_C = \delta_{max} = \frac{PL^3}{48EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$

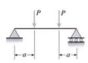
5 

$v = -\frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2) \qquad v' = -\frac{Pb}{6LEI}(L^2 - b^2 - 3x^2) \qquad (0 \le x \le a)$

$\theta_A = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \qquad \theta_B = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$

Se $a \ge b$, $\delta_C = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI}$ Se $a \le b$, $\delta_C = \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{48EI}$

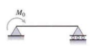
Se $a \ge b$, $x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$ e $\delta_{max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$

6 

$v = -\frac{Px}{6EI}(3aL - 3a^2 - x^2) \qquad v' = -\frac{P}{2EI}(aL - a^2 - x^2) \qquad (0 \le x \le a)$

$v = -\frac{Pa}{6EI}(3Lx - 3x^2 - a^2) \qquad v' = -\frac{Pa}{2EI}(L - 2x) \qquad (a \le x \le L - a)$

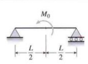
$\delta_C = \delta_{max} = \frac{Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2) \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{Pa(L-a)}{2EI}$

7 

$v = -\frac{M_0x}{6LEI}(2L^2 - 3Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{M_0}{6LEI}(2L^2 - 6Lx + 3x^2)$

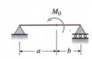
$\delta_C = \frac{M_0L^2}{16EI} \qquad \theta_A = \frac{M_0L}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{M_0L}{6EI}$

$x_1 = L\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e $\delta_{max} = \frac{M_0L^2}{9\sqrt{3}EI}$

8 

$v = -\frac{M_0x}{24LEI}(L^2 - 4x^2) \qquad v' = -\frac{M_0}{24LEI}(L^2 - 12x^2) \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$

$\delta_C = 0 \qquad \theta_A = \frac{M_0L}{24EI} \qquad \theta_B = -\frac{M_0L}{24EI}$

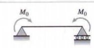
9 

$v = -\frac{M_0x}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2 - x^2) \qquad (0 \le x \le a)$

$v' = -\frac{M_0}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2 - 3x^2) \qquad (0 \le x \le a)$

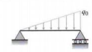
Em $x = a$: $v = -\frac{M_0ab}{3LEI}(2a - L) \qquad v' = -\frac{M_0}{3LEI}(3aL - 3a^2 - L^2)$

$\theta_A = \frac{M_0}{6LEI}(6aL - 3a^2 - 2L^2) \qquad \theta_B = \frac{M_0}{6LEI}(3a^2 - L^2)$

10 

$v = -\frac{M_0x}{2EI}(L - x) \qquad v' = -\frac{M_0}{2EI}(L - 2x)$

$\delta_C = \delta_{max} = \frac{M_0L^2}{8EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{M_0L}{2EI}$

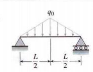
11 

$v = -\frac{q_0x}{360LEI}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$

$v' = -\frac{q_0}{360LEI}(7L^4 - 30L^2x^2 + 15x^4)$

$\delta_C = \frac{5q_0L^4}{768EI} \qquad \theta_A = \frac{7q_0L^3}{360EI} \qquad \theta_B = \frac{q_0L^3}{45EI}$

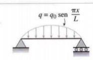
$x_1 = 0{,}5193L \qquad \delta_{max} = 0{,}00652\frac{q_0L^4}{EI}$

12 

$v = -\frac{q_0x}{960LEI}(5L^2 - 4x^2)^2 \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$

$v' = -\frac{q_0}{192LEI}(5L^2 - 4x^2)(L^2 - 4x^2) \qquad \left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$

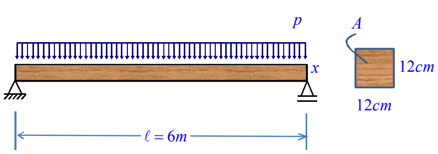
$\delta_C = \delta_{max} = \frac{q_0L^4}{120EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{5q_0L^3}{192EI}$

13 

$v = -\frac{q_0L^4}{\pi^4EI}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{L} \qquad v' = -\frac{q_0L^3}{\pi^3EI}\cos\frac{\pi x}{L}$

$\delta_C = \delta_{max} = \frac{q_0L^4}{\pi^4EI} \qquad \theta_A = \theta_B = \frac{q_0L^3}{\pi^3EI}$

Exemplo 1: Determinar a flecha devida ao peso próprio e verificar o limite de utilização $\delta \le \frac{\ell}{300}$



Madeira (valores típicos): $E = 10GPa; \quad \rho = 10kN/m^3$

$p = \rho A = 10\frac{kN}{m^3} \times (0{,}12m \times 0{,}12m) = 0{,}144\frac{kN}{m}$

$E = 10GPa = 10 \times 10^9 \frac{N}{m^2} = 10 \times 10^6 \frac{kN}{m^2} = 10^7 \frac{kN}{m^2}$

$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{a^4}{12} = \frac{0{,}12^4}{12} = 1{,}728 \times 10^{-5} m^4$

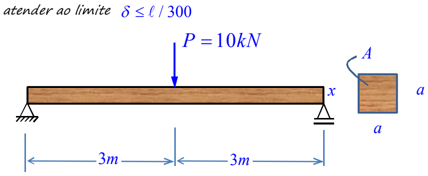
$\delta = v_{max} = \frac{5}{384}\frac{p\ell^4}{EI}$

$\delta = \frac{5}{384} \times \frac{0{,}144 \times 6^4}{10^7 \times 1{,}728 \times 10^{-5}}$

$\delta = 1{,}41 \times 10^{-2} m = 1{,}41cm$

$\delta_{lim} = \frac{6}{300} = 2 \times 10^{-2} m > \delta \quad , OK!$

Exemplo 2 – Dimensionar a seção transversal da viga de madeira (E=10GPa), para atender ao limite $\delta \le \ell / 300$

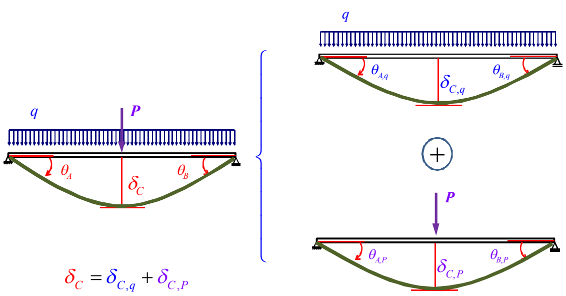


$\delta = \frac{P\ell^3}{48EI} = \frac{10 \times 6^3}{48 \times 10^7 \times \left(\frac{a^4}{12}\right)} \le \frac{6}{300}$

$a^4 \ge 12 \times \frac{300}{6} \times \frac{10 \times 6^3}{48 \times 10^7} = 2{,}7 \times 10^{-3} m^4$

$a \ge \sqrt[4]{2{,}7 \times 10^{-3}} = 0{,}228m \qquad \boxed{a \ge 23cm}$

Superposição de Efeitos



$$\delta_C = \delta_{C,q} + \delta_{C,P}$$

$$\theta_A = \theta_{A,q} + \theta_{A,P}$$

$$\theta_B = \theta_{B,q} + \theta_{B,P}$$

PEF2603 : Estruturas na Arquitetura III - Sistemas Reticulados e Laminares