Representação em frequência discreta de sinais discretos (TDF)

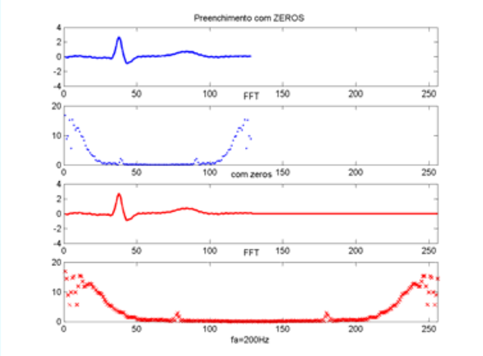
Prof. Sérgio S Furuie

Referência específica: cap. 5 da Apostila (C Itiki, V Nascimento)

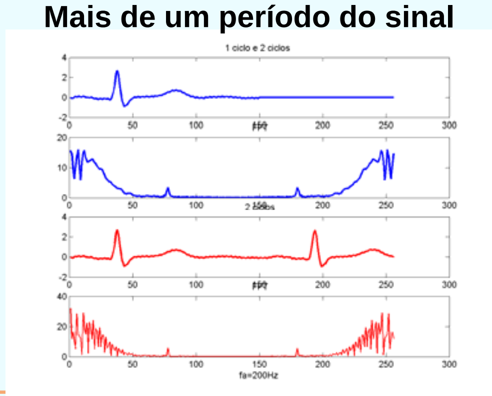
FFT: aspectos práticos

- Precauções na interpretação:A periodicidade está implícita
- O que acontece se preenchermos com zeros o resto do sinal? Ex. se N=400 pontos e quisermos FFT com 512 pontos?
- O que acontece se aplicarmos a FFT para uma duração do sinal maior do que 1 período de repetição? Ex. duração=2 períodos?
- O que acontece se a duração for um número não inteiro de períodos (>1)?

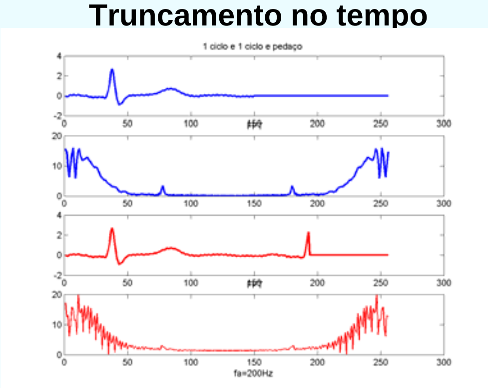
Efeito do acréscimo de zeros no sinal



Mais de um período do sinal



Truncamento no tempo



Efeitos da TDF em situações reais

- Acrescimo de zeros: interpolação no domínio da frequência (demonstrar!)
- Efeito cerca: amostragem deslocada no domínio da frequencia => aumentar a duração do sinal
- Efeito vazamento: componentes de alta frequência devido à descontinuidade (truncamento do sinal) => janelamento no tempo. Diminuir o truncamento abrupto.

Aplicações da TDF: convolução

- Deseja-se convolução linear dos sinais discretos e finitos: x(n) e h(n)
- Direto: envolve $(N_x+N_h-1).N_x$ multiplicações e somas
- Por FFT envolveria em torno de **N.log(N)**
  - Seja $N= N_x+N_h-1$
  - Implícito: segundo sinal periódico (=> ambos) em N pontos
    - Zero padding
  - Comutativo

$$x(n) \quad n = 0, N_x - 1$$
$$h(n) \quad n = 0, N_h - 1$$
$$x(n) * h(n) \equiv \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r).h(n-r)$$
$$= \sum_{r=0}^{Nx-1} x(r).h(n-r)$$
$$n = 0, N_x + N_h - 1$$

$$x(n) \otimes_N h(n) \equiv \sum_{r=0}^{N_x-1} x(r).h_N(n-r)$$
$$n = 0, N-1$$

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Transformada Discreta de Fourier

Filtro: convolução linear com FFT

Dados:

$$x(n) \quad n = 0, N_x - 1$$
$$h(n) \quad n = 0, N_h - 1$$
$$N \geq N_x + N_h - 1$$

Obter:

$$y(n) = x(n) * y(n) \qquad n = 0, N-1$$

1. N: potência de 2
2. Zero padding em x(n)
3. Zero padding em h(n)
4. $X(k)=FFT\{x_N(n)\}$
5. $H(k)=FFT\{h_N(n)\}$
6. Y(k)=X(k).H(k)
7. $y(n)=FFT^{-1}\{Y(k)\}$

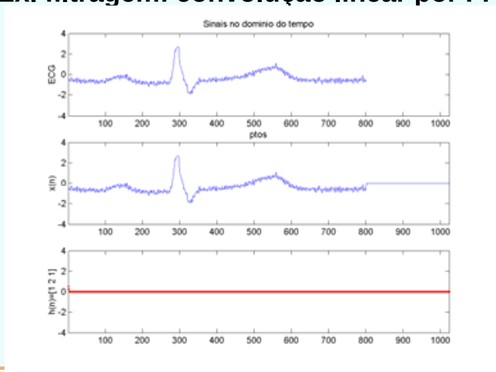
$$x_N(n) = \begin{cases} x(n) & \text{para } n = 0, N_x - 1 \\ 0 & \text{para } n = N_x, N-1 \end{cases}$$

$$h_N(n) = \begin{cases} h(n) & \text{para } n = 0, N_h - 1 \\ 0 & \text{para } n = N_h, N-1 \end{cases}$$

Temos agora resultado com mais pontos do que o sinal original. Se desejarmos ter Nx: ?

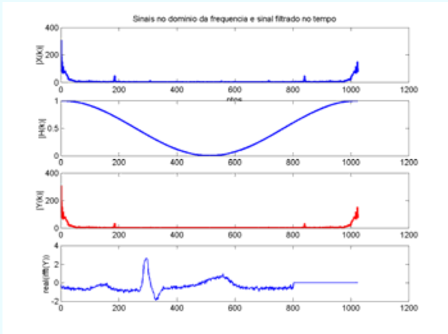
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Transformada Discreta de Fourier

Ex. filtragem: convolução linear por FFT



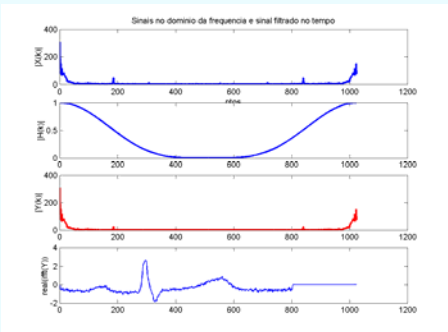
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Transformada Discreta de Fourier

Convolução com [1 2 1]



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Transformada Discreta de Fourier

Convolução com [1 4 6 4 1]



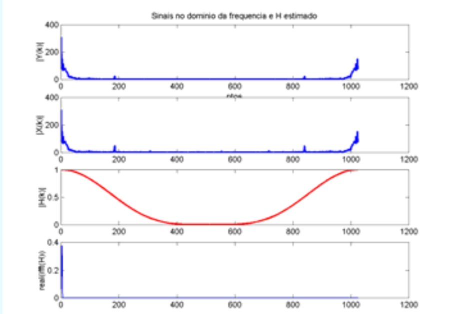
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Transformada Discreta de Fourier

Aplicações da TDF: Função de transferência de filtro

Dadas as sequências discretas da entrada e da saída, x(n) e y(n), determinar a função de transferencia do filtro e a resposta impulsiva

1. $Y(k)= FFT\{y_N(n)\}$
2. $X(k)=FFT\{x_N(n)\}$
3. H(k)=Y(k)/X(k)
4. $h(n)=FFT^{-1}\{H(k)\}$
   - Abordagem não recomendada pois se |X(k)| for próximo de 0 => erros

Ex. obtenção de H e h por FFT




```
>> h(1:10)'*16

 1   4   6   4   1   0   0   0   0   0
```


Processamento de imagens

Imagem: f(x,y) contínua
(u,v): freq. espacial

Direta:

$$F(u,v)=\iint_{-\infty} f(x,y).\exp(-j2\pi(ux+vy)).dx.dy$$

Inversa:

$$f(x,y)=\iint_{-\infty} F(u,v).\exp(j2\pi(ux+vy)).du.dv$$

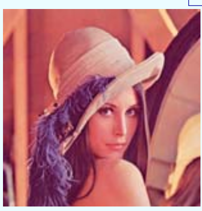
Imagem: f(x,y) discreta

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y).\exp\left(-j2\pi\left(u\frac{x}{M}+v.\frac{y}{N}\right)\right)$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v).\exp\left(j2\pi\left(u\frac{x}{M}+v.\frac{y}{N}\right)\right)$$

Filtragem: convolução/FFT

$$h(n,m)=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 8 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$



Exemplo: TDF

Dada resposta impulsiva h(n) abaixo de um filtro digital:

1. Obtenha a resposta em frequencia (função de transferência) analítica do filtro
2. Qual a frequencia de corte do filtro considerando freq. de amostragem dada abaixo (fa=1000 Hz)?
3. Obtenha a função de transferência numericamente e em Hz usando FFT
4. Supondo um sinal de entrada x(n) abaixo, obtenha a resposta do filtro y(n) (em ms) usando o FFT

$$h(n)=\begin{bmatrix}1 & 4 & 6 & 4 & 1\end{bmatrix}/16$$
$$=\frac{1}{16}[\delta(n)+4.\delta(n-1)+6.\delta(n-2)+4.\delta(n-3)+\delta(n-4)]$$

$$x(n)=\begin{cases}1 \text{ para } 0\le n<n_0\\ 0 \text{ para } n_0\le n<N\end{cases}$$
$$n=0,N-1$$

$$f_a=1000\ Hz\ \Rightarrow\ \Delta=1ms$$
$$T=512\ ms\ \Rightarrow\ N=512$$
$$N=\frac{f_a}{\delta}\ \Rightarrow\ \delta=1.95\ Hz$$
$$n_0=32$$

Solução: 1, 2

$$H(z)=\frac{1}{16}[1+4.z^{-1}+6.z^{-2}+4.z^{-3}+z^{-4}]$$
$$=\frac{z^{-2}}{16}[z^2+4.z+6+4.z^{-1}+z^{-2}]$$
$$H(e^{jw})=\frac{e^{-2jw}}{16}[e^{j2w}+4.e^{jw}+6+4.e^{-jw}+e^{-j2w}]$$
$$=\frac{e^{-2jw}}{16}[2\cos(2w)+8\cos(w)+6]$$
$$\left|H(e^{jw})\right|=\frac{1}{8}[\cos(2w)+4\cos(w)+3]$$
$$fase\ (H)=-2w\ \text{(fase linear com a freq => sem distorção)}$$
$$delay=-2\ \text{(pontos no tempo)}$$

$$\left|H(e^{jw})\right|=\frac{1}{8}[\cos(2w)+4\cos(w)+3]$$
$$-3\,dB\ \Rightarrow\ energia\ \text{cai p/ metade}$$
$$-3=20\log(\left|H(e^{jw})\right|)$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{8}[\cos(2w_c)+4\cos(w_c)+3]$$
$$=\frac{1}{8}[2\cos^2(w_c)-1+4\cos(w_c)+3]$$
$$\cos(w_c)=2^{\frac{3}{4}}-1$$
$$w_c=0.8206=\frac{2\pi f_c}{f_a}\ \Rightarrow\ f_c=131\ Hz$$