CONCEITOS BÁSICOS E PRINCÍPIOS DE ESTATÍSTICA

1. Conceitos Básicos de Probabilidade

Variável aleatória: é um número (ou vetor) determinado por uma resposta, isto é, uma função definida em pontos do espaço amostral. Uma variável aleatória pode ser discreta (como no lançamento de um dado) ou contínua (como na medição de temperatura).

Valor esperado (expectativa,significado): é a média ponderada dos possíveis valores de X, cada valor ponderado por sua probabilidade. É representada por E(X) ou μ_x, sendo definida por

$$E(X) = x_1\ f(x_1) + x_2\ f(x_2) + ... + x_n\ f(x_n)$$
$$E(X) = \Sigma_i\ x_i P(X = x_i), \qquad \text{para} \quad i=1, 2, ..., n.$$

Variância: é uma medida da dispersão de X. É representada por Var(X) e por σ^2 e é definida por

$$Var(X) = \Sigma(x_i - m)^2\ f(x_i) = E\left[(X - m)^2\right]\ ou$$
$$Var(X) = E\left(X^2\right) - m_x^2$$

Desvio padrão*:* é a raiz quadrada não-negativa da variância. É representado por σ.

Variável aleatória padronizada: seja x a variável aleatória com significado μ e desvio padrão σ. A variável aleatória padronizada (z), que corresponde à x é definida por $z = (x - m)/s$. Uma variável padronizada tem valor esperado igual a 0 e variância igual a 1 (desvio padrão igual a 1).

Teste amostral simples: constitui-se de uma sucessão de leituras tomadas sob condições idênticas (mesmo observador e mesmo instrumento de medição), exceto o tempo.

Teste multiamostral: ocorre quando são feitas medições repetidas de uma quantidade, utilizando diferentes instrumentos de medição e diferentes observadores. As trocas, tanto de observador como de instrumento, causam mudanças na distribuição dos erros e, consequentemente, tem-se um conjunto de variáveis aleatórias.

Distribuição multivariada: é a distribuição conjunta de duas ou mais variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço amostral, própria de um teste multiamostral. Um exemplo é a distribuição associada com a observação simultânea de temperatura, pressão, direção e velocidade do vento. A função distribuição de uma distribuição bivariada é:

$P(X \leq x, Y \leq y)$ e é, usualmente, simbolizada por $F_{X,Y}(x, y)$

Valor verdadeiro de uma variável*:* é aquele que seria obtido na medição se não houvesse característica estocástica (aleatória) associada com a medição.

Erro aleatório: é um erro que representa a diferença entre o valor medido da variável aleatória e seu valor verdadeiro.

Erro sistemático: é um erro introduzido continuamente, devido, por exemplo, a erro de calibração, desvios instrumentais, erro de técnica e, também, devido à representação inadequada de um processo (como a não-consideração da ocorrência de vazamentos, depósitos).

Variáveis aleatórias independentes: um número finito de variáveis aleatórias X, Y,..., Z, num espaço amostral definido, são consideradas independentes se:

$$P\left(X = x_i, Y = y_j, ..., Z = z_k\right) = P\left(X = x_i\right)P\left(Y = y_j\right)...P\left(Z = z_k\right)$$

para quaisquer valores de $x_i, y_j, \ldots, z_k$. Elas têm as seguintes propriedades:

i)E(XY) = E(X) E(Y)

ii)Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)

iii)Cov(X,Y) = 0

onde Cov(X,Y) = covariância.

Covariância: é o conceito que relaciona duas variáveis aleatórias, X e Y, definidas num mesmo espaço amostral, representada por Cov(X,Y). É definida por

$$Cov(X, Y) = E\left[\left(X - m_x\right)\left(Y - m_y\right)\right]$$

ou equivalentemente,

$$Cov(X, Y) = E(XY) - m_x m_y$$

Coeficiente de correlação: fornece a correlação entre duas variáveis aleatórias, X e Y, definidas num mesmo espaço amostral, representada por $\rho_{X,Y}$. É definido por

$$r_{X,Y} = Cov(X, Y) / s_x s_y$$

Autocovariância: ao lidar com o registro contínuo da temperatura X(t) em função do tempo, pode-se estar interessado na relação entre X(t) nos tempos t_1 e t_2 .A covariância entre variáveis aleatórias $X(t_1)$ e $X(t_2)$, que representam pontos sobre um mesmo caminho, mas em diferentes tempos, é chamada de autocovariância .

Covariância cruzada: é a covariância entre dois processos estocásticos contínuos, sendo que um deles é referente a um ponto no tempo $X(t_1)$ e o outro a um ponto e tempo possivelmente diferentes, $Y(t_2)$.

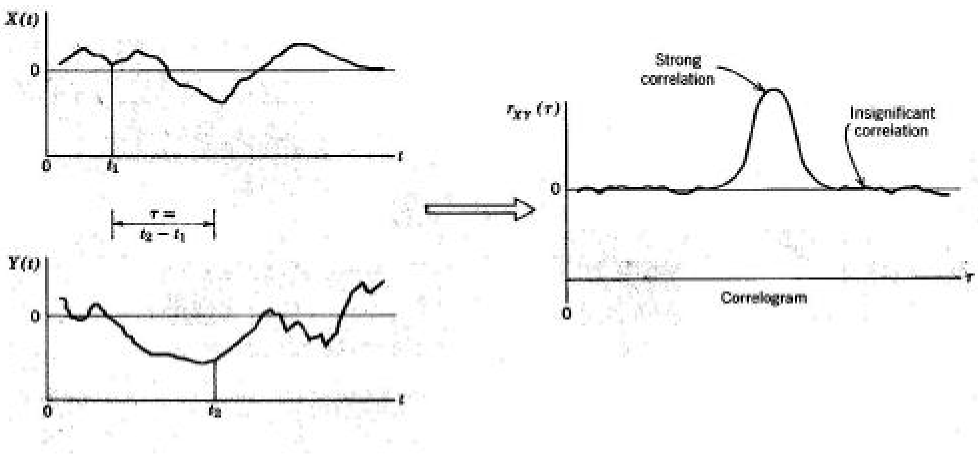


Fig. 2.2. Crosscorrelation function.

2. A Variância e a Distribuição de Erros Aleatórios

Se uma medição experimental é repetida um número de vezes, os valores registrados das quantidades medidas diferem, quase sempre, uns dos outros. A dispersão de medições sucessivas de uma quantidade x é comumente expressa em termos da variância ou do desvio padrão do conjunto de medidas. Essas quantidades são definidas de forma que sejam úteis na estimativa da probabilidade de ocorrência de erros aleatórios de intensidade definida nas medidas.

A variância da amostra é simplesmente o desvio ao quadrado médio, de n valores medidos de x, em relação à média da amostra $\overline{x}$:

$$s_a^2 = \frac{\sum^n (x - \overline{x})^2}{n} \tag{1}$$

onde a média ($\overline{x}$) é obtida por

$$\overline{x} = \frac{\sum^n x}{n} \tag{2}$$

O desvio padrão é obtido através da variância:

$$\sigma_a = \sqrt{\sigma_a^2} \tag{3}$$

Na definição da variância das Eq.(1), desvios positivos e negativos em torno da média não se cancelam uns aos outros. A última forma desta equação, que define a variância, é a mais conveniente, quando cálculos reais estão sendo feitos.

O valor da variância se torna mais confiável quanto mais medições forem obtidas e a exatidão real do procedimento de medição é indicada pelo valor da variância, calculada a partir de uma quantidade muito grande de dados. Quando o número de pontos experimentais obtido se tornar infinito, o conjunto infinito é chamado uma população de valores. Para tal população, a média da população (μ) é definida como:

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum^{n} x}{n} \tag{4}$$

e a variância da população σ^2 é definida como

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum^{n} (x-\mu)^2}{n} \tag{5}$$

O desvio padrão da população é a raiz quadrada não-negativa da variância da população.

A média da população é o melhor, ou mais provável, valor de x, desde que as variações de x sejam resultantes de efeitos pequenos, aleatórios, independentes e aditivos. Se, entretanto, erros de método e/ou erros não-aleatórios forem inerentes às medidas, então a média pode diferir substancialmente do valor verdadeiro de x.

Se em um conjunto infinito de dados, as variações de x forem aleatórias, diz-se que a distribuição de valores de x em torno da média é uma Distribuição Normal ou Gaussiana.

3.1 *Distribuição Normal* ou *Gaussiana*.

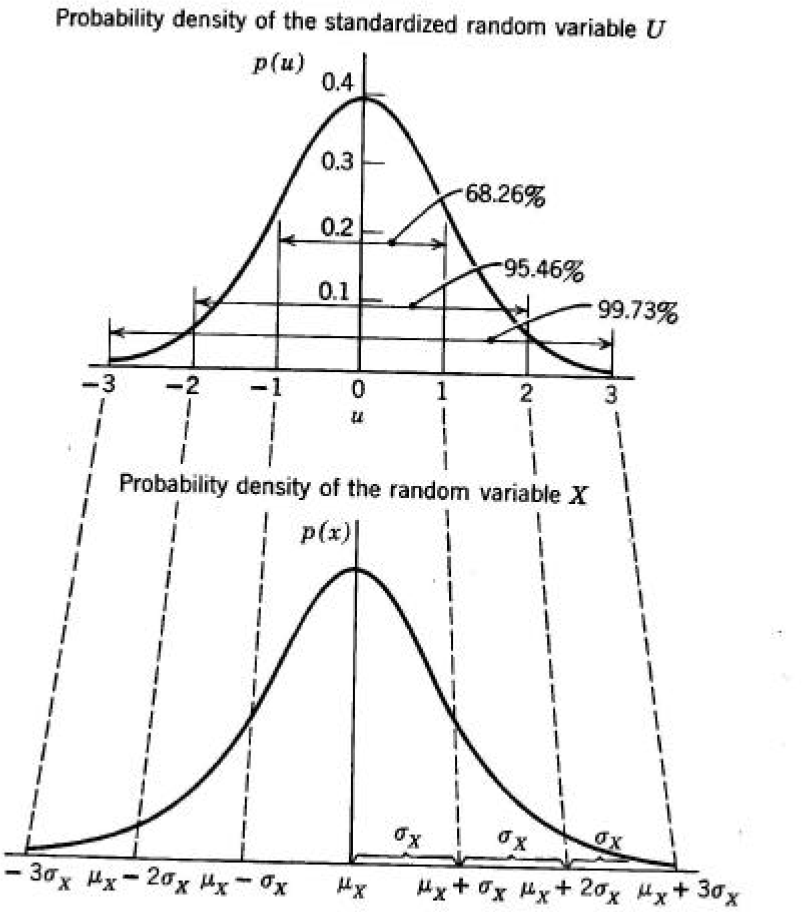
As distribuições de fenômenos observados assumem, frequentemente, uma forma simétrica em torno da média. Uma função desse tipo, de extrema importância em estatística, é chamada de Distribuição Normal ou Distribuição de Gauss, que é descrita pela função

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2\right\}$$

De forma abreviada, se a variável aleatória x apresenta distribuição normal, com média μ e variância σ^2, diz-se, simplesmente,

$$x = N(\mu, \sigma^2)$$

Do exame da função densidade, verifica-se que:



!.3. Relation between the standardized normal random variable
the normal random variable X. The percentages refer to the
nder the curve within the indicated bounds on the basis of a
area of 100 percent.

i) ela é simétrica em torno do eixo vertical que passa por μ;

ii) o valor máximo de F(x) ocorreu quando $x = \mu$;

iii) tem por assíntota o eixo das abscissas;

iv) tem pontos de inflexão em $x = \mu \pm \sigma$.

Quando a variável aleatória x é padronizada, ela passa a ter uma Distribuição Normal Padronizada, que tem média zero e desvio padrão unitário, ou equivalentemente, uma distribuição N(0,1).

Os valores desta função distribuição são tabelados e com eles se tem um meio de obter as probabilidades associadas a qualquer variável normal, conhecidos a média e o desvio padrão e a definição de variável aleatória padronizada (z),

$$z = \frac{(x - \mu)}{\sigma}$$

Considerando, agora, o conjunto de variáveis aleatórias independentes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cada uma normalmente distribuída, com mesma média (μ) e mesma variância (σ^2). Então, a média de uma amostra de n elementos, extraída de uma população $N(\mu, \sigma^2)$, representada por

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

é normalmente distribuída, com média μ e variância σ^2/n. Este resultado é muito importante e é chamado de Teorema do Limite Central. Em consequência,

$$z = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

tem uma distribuição normal padronizada. Esta situação corresponde a um teste amostral simples.

A variância da população, definida pela Eq..5, é baseada numa amostra hipotética, contendo um número infinito de replicatas de uma medida. Todavia, para objetivos práticos, é necessário lidar com um número finito de valores da quantidade em questão.

A média da amostra ($\overline{x}$) é a melhor estimativa da média da população (μ). Entretanto, a variância da amostra (σ_a^2) não é a melhor estimativa da variância da população (σ^2). A melhor estimativa da variância da população é dada por,

$$s^2 = \frac{\sum^{n}(x - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{\sum^{n} x^2 - \left(\sum^{n} x\right)^2 \Big/ n}{n-1} = \frac{n}{n-1} s_a^2 \tag{6}$$

Considerando, agora um teste multiamostral envolvendo n variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_n$, que são normalmente distribuídas, com suas médias $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ e variâncias $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, respectivamente. A variável aleatória Z é uma combinação linear dessas variáveis

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n$$

Na hipótese de Z ser normalmente distribuída, sua média μ_z é a média ponderada das médias das variáveis aleatórias individuais, que podem ou não ser independentes, que é dada por

$$m_z = (a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots + a_n m_n)$$

A variância é dada por

$$s_z^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 s_i^2 + \sum_{i \neq j} \sum a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

onde a $Cov(X_i, X_j)$ é zero, se as variáveis X_i e X_j são independentes uma da outra.

Os chamados testes nodal e de medida, muito utilizados para detectar e identificar fontes de erros grosseiros, são testados contra uma distribuição normal padronizada.

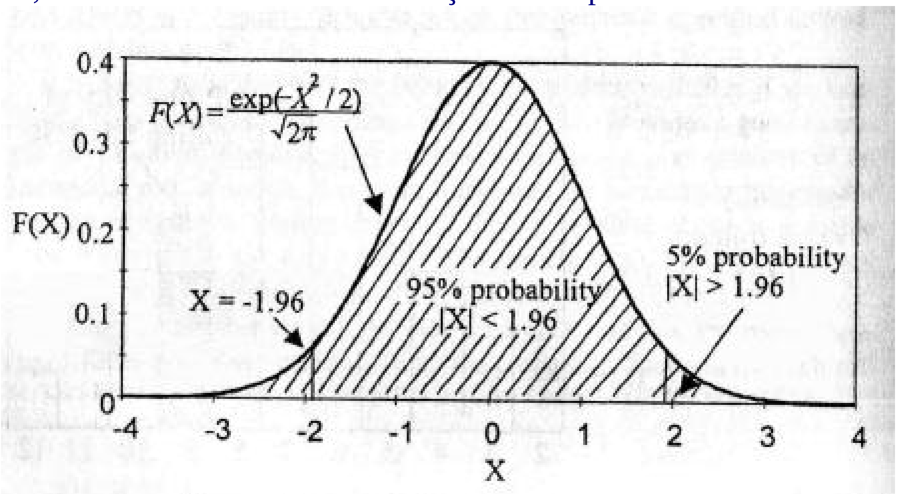


Figure C-2. Normal distribution density function.

3.2. Distribuição Qui-quadrado

A variável aleatória, formada pela soma dos quadrados de *n* variáveis aleatórias independentes Z_i, definida por

$$c^2 = \sum_i^n Z_i^2 , \quad \left(Z_i = N(0,1)\right)$$

tem uma distribuição χ^2.

O valor n é também conhecido como o número de graus de liberdade da χ^2.

A média e a variância dessa distribuição são expressas em graus de liberdade, sendo iguais, respectivamente, a *n* e 2*n*.

A função densidade de probabilidade qui-quadrado é representada por χ^2_ν, onde ν designa o número de graus de liberdade da χ^2. Se ν observações de uma variável são independentes, então o número de graus de liberdade é igual a ν. Entretanto, um grau de liberdade é perdido para cada restrição sobre as ν observações.

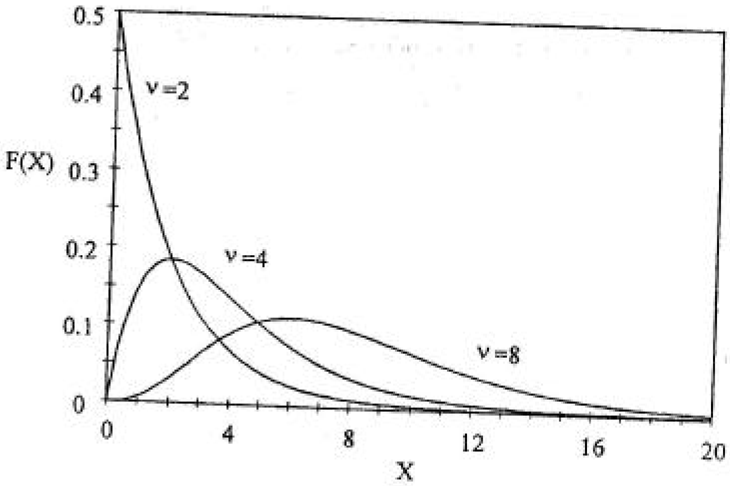


Figure C-3. Chi-square distribution density function.

A função distribuição $F\left(c_a^2\right)$ é tabulada de forma a fornecer valores $\chi^2_{\alpha,\nu}$, que são disponíveis na maioria dos livros de estatística, para os quais

$$P\left(c^2 \geq c^2_{a,n}\right) = a$$

onde α é a probabilidade de somas dos quadrados iguais ou superiores ao valor correspondente tabelado. O nível de significância α é, geralmente, fixado em torno do valor 0,05. Quanto maior α, maior é o risco de rejeitar hipóteses boas; inversamente, o risco de aceitar hipóteses falsas aumenta, na medida que o valor de α diminue.

Se o valor calculado da variável aleatória χ^2 for maior do que o valor tabelado $\chi^2_{\alpha,\nu}$, rejeita-se a hipótese de que as variáveis Z_i sejam aleatórias, entretanto, se ele for menor ou igual, a hipótese é aceita.

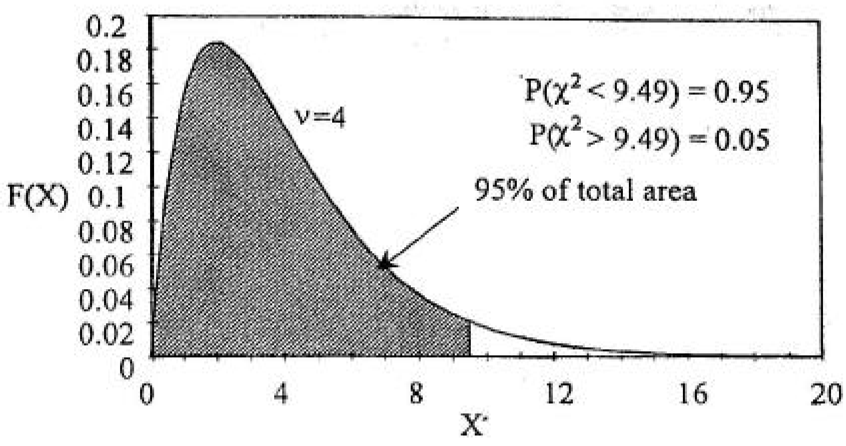


Figure C-4. Confidence intervals for chi-square distribution.

Esta distribuição é usada para a detecção de erros grosseiros em dados de processo, onde se verifica se a variável aleatória constituída pela soma ponderada (pelo inverso das variâncias) dos quadrados dos erros da variáveis individuais segue uma distribuição qui-quadrado. Se isto for verdade, é válida a hipótese de que os erros de medida são variáveis aleatórias normalmente distribuídas e, portanto, o conjunto de medidas testadas não contém erro sistemático.

Caso isto não seja verdade, deve(m) ser identificada(s) a(s) medida(s) que conté(ê)m erros grosseiros, submetendo-se o conjunto resultante ao teste em questão. Para realizar o teste, deve-se calcular o valor de χ^2 e compará-lo com valores tabelados, uma vez definido um nível de significância α, que exprime a probabilidade de somas dos quadrados iguais ou superiores ao valor correspondente da tabela. Se o valor calculado for maior do que o valor tabelado, rejeita-se a hipótese e se for menor ou igual ao valor tabelado, aceita-se a hipótese.A distribuição qui-quadrado é usada no chamado teste global de Almásy e Sztanó (1975) e também no teste do desbalanço nodal de Romagnoli et al.(1980).

4. Testes de Hipóteses

Um teste de hipóteses estatístico é um procedimento para decidir se deve ser aceita ou rejeitada a hipótese H_0 contra uma ou mais hipóteses alternativas.

Conhecida a função densidade de probabilidade F de uma estimativa (que é uma estimativa não-tendenciosa de θ, uma variável aleatória qualquer), faz-se a suposição de que a representação desta variável aleatória θ por F($\hat{\theta}$) é correta e que a média (ou valor esperado) de θ é θ_0.

Coloca-se, então a seguinte questão: Se é verdadeira a hipótese de que $\theta = \theta_0$, por quanto θ pode diferir de θ_0, antes que esta hipótese seja rejeitada por parecer errada ?

Se a hipótese $\theta = \theta_0$ for verdadeira, $E(\theta) = \theta_0$ e a probabilidade de que o valor de $\hat{\theta}$ seja menor ou igual a $\theta_{\alpha/2}$ é

$$P\left(\hat{q} \leq q_{a/2}\right) = \frac{a}{2}$$

e devido à simetria da curva da Distribuição Normal

$$P\left(\hat{q} \rangle q_{1-a/2}\right) = \frac{a}{2}$$

Para tomar uma decisão concernente à hipótese, seleciona-se um valor de α, que é chamado nível de confiança para o teste. Por exemplo, α pode ser 0,01 ou 0,05.

Então, a amostra é coletada e $\hat{\theta}$ é calculado. Se $\hat{\theta}$ for maior do que $\theta_{1-\alpha/2}$ ou menor do que $\theta_{\alpha/2}$, a hipótese é rejeitada. Caso contrário, ela é aceita.

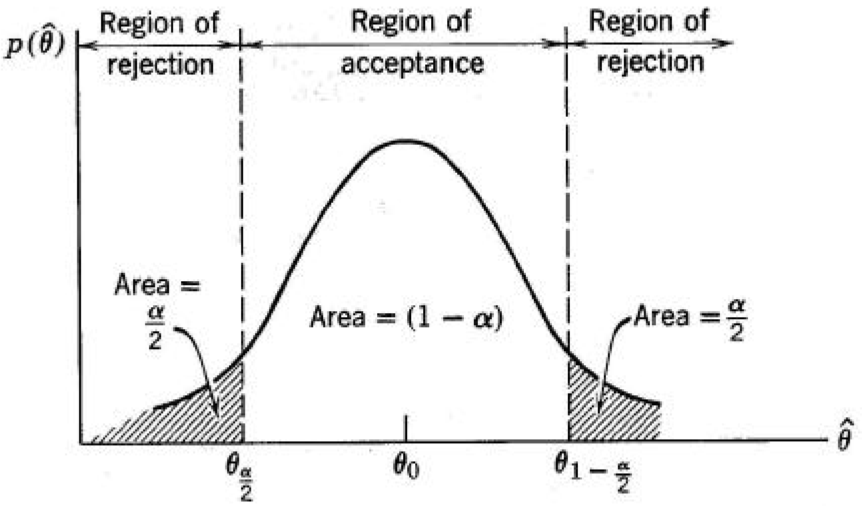


Fig. 2.13. Regions of rejection and acceptance for a symmetric hypothesis test.

$H_0 : \hat{\theta} = \theta_0$

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow$ em 5 % dos casos H_0 será rejeitada (decisão errada)

A faixa de valores de $\hat{\theta}$ em que a hipótese é rejeitada é chamada região de rejeição; a faixa de $\hat{\theta}$ em que a hipótese é aceita é chamada de região de aceitação. O teste descrito é um teste de dois lados, também chamado bilateral ou bicaudal.

Um teste unilateral pode ser baseado em duas possibilidades, sendo que numa delas $\hat{\theta}$ seria maior do que algum $\theta_{1-\alpha}$, onde a hipótese seria rejeitada, se $\hat{\theta}$ fosse de fato maior do que $\theta_{1-\alpha}$; a outra seria supor que $\hat{\theta}$ seja menor do que θ_{α}.

Himmelblau (1978) observa que a rejeição da hipótese não implica num resultado definitivo, mas indica que os dados e o procedimento experimental devem ser submetidos a um exame cauteloso para averiguar se ocorreu alguma coisa errada com a coleta de medidas ou com a instrumentação.

A estrutura de teste mais simples é imaginar que haja uma dicotomia de estado para as variáveis aleatórias:

i) H_o : x é o valor verdadeiro da variável aleatória (que é a *hipótese nula*);

ii) H_1: x não é o valor verdadeiro da variável (que é a hipótese alternativa).

No teste de hipóteses, a decisão é tomada da seguinte forma: com base na suposição de que a hipótese nula é verdadeira, se a estatística calculada a partir da amostra experimental aleatória cair fora da região de aceitação, a hipótese nula é rejeitada e a hipótese alternativa é aceita. Caso contrário, a hipótese H_o é aceita e H_1 é rejeitada.

Podem-se distinguir dois tipos de erros ao testar uma hipótese:

i) *Erro Tipo I*, que é o risco de declarar falsa uma hipótese verdadeira;

ii) *Erro Tipo II*, que é o risco de não rejeitar uma hipótese, quando ela é falsa.

Isto pode ser resumido no esquema abaixo, onde a hipótese que está sendo testada é a hipótese *H.*

Hipótese	Aceitar H	Rejeitar H
H é verdadeira	Decisão correta	Erro do Tipo I
H é falsa	Erro do Tipo II	Decisão correta

Certamente, o erro do Tipo I existe porque α é selecionado para ser um valor não-zero. Quando a hipótese é verdadeira e α = 0,05, por exemplo, em 5 % dos testes a hipótese será rejeitada, o que é uma decisão errada.

A probabilidade β é a probabilidade de não rejeitar uma diferença quando ela existe. Existem curvas, chamadas curvas de operação características, para determinar a probabilidade β. A probabilidade (1-β) é chamada *potência do teste* e representa a probabilidade de tomar-se a decisão correta (rejeitar a hipótese), quando ela é realmente errada. Quando a diferença entre as médias (δ) aumenta, (1-β) aumenta e β diminue. A seguir, apresenta-se de forma resumida um exemplo:

Se	Probabilidade de concluir que	
	$\mu = \mu_A$	$\mu \neq \mu_A$
$\mu = \mu_A$	$1-\alpha$	α
$\mu = \mu_A + \delta$	β	$1-\beta$

Himmelblau (1978) relata que, pela descrição dos dois tipos de erros, pode-se observar que a tentativa de diminuir um tipo de erro resulta em um aumento no outro tipo de erro. O único modo de diminuir os dois tipos de erro, simultâneamente, é aumentar o tamanho da amostra, o que pode ser caro, na prática. Observa que talvez um tipo de erro tenha consequências menos sérias do que o outro e, neste caso, há alguma decisão adequada referente à seleção de valores de α e ao número de observações a ser feito. A experiência leva em conta os instrumentos, o projeto do processo e os custos, de modo a tomar-se uma decisão econômica para α e β.

Em geral, os estudos descritos na literatura para detecção e identificação de erros grosseiros, na reconciliação de dados de processo, consideram a probabilidade de ocorrência de erro Tipo I.

Um teste de hipótese é usado na reconciliação de dados para testar a hipótese nula:

H_0 : não há erro grosseiro nos dados de processo,

versus a hipótese alternativa:

H_1 : existe pelo menos um erro grosseiro nos dados de processo,

ou, especificamente,

H_{1j} : existe um erro grosseiro na medição j

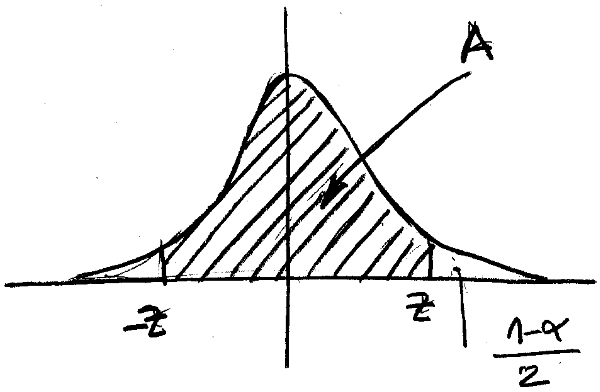


Table 1-19. Ordinates and Areas between Abscissa Values $-z$ and $+z$ of the Normal Distribution Cu

z	X	Y	A	$1-A$	z	X	Y	A	$1-A$
0	μ	0.399	0.0000	1.0000	±1.50	$\mu \pm 1.50\sigma$	0.1295	0.8664	0.1336
±0.05	$\mu \pm 0.05\sigma$	.398	.0399	0.9601	±1.55	$\mu \pm 1.55\sigma$	.1200	.8789	.1211
± .10	$\mu \pm .10\sigma$	.397	.0797	.9203	±1.60	$\mu \pm 1.60\sigma$	.1109	.8904	.1096
± .15	$\mu \pm .15\sigma$	.394	.1192	.8808	±1.65	$\mu \pm 1.65\sigma$	.1023	.9011	.0989
± .20	$\mu \pm .20\sigma$	.391	.1585	.8415	±1.70	$\mu \pm 1.70\sigma$	.0940	.9109	.0891
± .25	$\mu \pm .25\sigma$	.387	.1974	.8026	±1.75	$\mu \pm 1.75\sigma$	.0863	.9199	.0801
± .30	$\mu \pm .30\sigma$	.381	.2358	.7642	±1.80	$\mu \pm 1.80\sigma$	.0790	.9281	.0719
± .35	$\mu \pm .35\sigma$	.375	.2737	.7263	±1.85	$\mu \pm 1.85\sigma$	.0721	.9357	.0643
± .40	$\mu \pm .40\sigma$	.368	.3108	.6892	±1.90	$\mu \pm 1.90\sigma$	.0656	.9426	.0574
± .45	$\mu \pm .45\sigma$	.361	.3473	.6527	±1.95	$\mu \pm 1.95\sigma$	.0596	.9488	.0512
± .50	$\mu \pm .50\sigma$	.352	.3829	.6171	±2.00	$\mu \pm 2.00\sigma$	.0540	.9545	.0455
± .55	$\mu \pm .55\sigma$	.343	.4177	.5823	±2.05	$\mu \pm 2.05\sigma$	.0488	.9596	.0404
± .60	$\mu \pm .60\sigma$	.333	.4515	.5485	±2.10	$\mu \pm 2.10\sigma$	.0440	.9643	.0357
± .65	$\mu \pm .65\sigma$	.323	.4843	.5157	±2.15	$\mu \pm 2.15\sigma$	.0396	.9684	.0316
± .70	$\mu \pm .70\sigma$	.312	.5161	.4839	±2.20	$\mu \pm 2.20\sigma$	.0355	.9722	.0278
± .75	$\mu \pm .75\sigma$	.301	.5467	.4533	±2.25	$\mu \pm 2.25\sigma$	.0317	.9756	.0244
± .80	$\mu \pm .80\sigma$	.290	.5763	.4237	±2.30	$\mu \pm 2.30\sigma$	.0283	.9786	.0214
± .85	$\mu \pm .85\sigma$	.278	.6047	.3953	±2.35	$\mu \pm 2.35\sigma$	.0252	.9812	.0188
± .90	$\mu \pm .90\sigma$	.266	.6319	.3681	±2.40	$\mu \pm 2.40\sigma$	.0224	.9836	.0164
± .95	$\mu \pm .95\sigma$	.254	.6579	.3421	±2.45	$\mu \pm 2.45\sigma$	.0198	.9857	.0143
±1.00	$\mu \pm 1.00\sigma$	.242	.6827	.3173	±2.50	$\mu \pm 2.50\sigma$	.0175	.9876	.0124
±1.05	$\mu \pm 1.05\sigma$	.230	.7063	.2937	±2.55	$\mu \pm 2.55\sigma$	.0154	.9892	.0108
±1.10	$\mu \pm 1.10\sigma$	.218	.7287	.2713	±2.60	$\mu \pm 2.60\sigma$	.0136	.9907	.0093
±1.15	$\mu \pm 1.15\sigma$	.206	.7499	.2501	±2.65	$\mu \pm 2.65\sigma$	.0119	.9920	.0080
±1.20	$\mu \pm 1.20\sigma$	.194	.7699	.2301	±2.70	$\mu \pm 2.70\sigma$	.0104	.9931	.0069
±1.25	$\mu \pm 1.25\sigma$	.183	.7887	.2113	±2.75	$\mu \pm 2.75\sigma$	.0091	.9940	.0060
±1.30	$\mu \pm 1.30\sigma$	.171	.8064	.1936	±2.80	$\mu \pm 2.80\sigma$	.0079	.9949	.0051
±1.35	$\mu \pm 1.35\sigma$	.160	.8230	.1770	±2.85	$\mu \pm 2.85\sigma$	.0069	.9956	.0044
±1.40	$\mu \pm 1.40\sigma$	.150	.8385	.1615	±2.90	$\mu \pm 2.90\sigma$	.0060	.9963	.0037
±1.45	$\mu \pm 1.45\sigma$	.139	.8529	.1471	±2.95	$\mu \pm 2.95\sigma$	.0051	.9968	.0032
±1.50	$\mu \pm 1.50\sigma$	.130	.8664	.1336	±3.00	$\mu \pm 3.00\sigma$	.0044	.9973	.0027
					±4.00	$\mu \pm 4.00\sigma$	.0001	.99994	.00006