Revisão: Oscilador Harmônico

(Dated: 4 de maio de 2015)

O objetivo desta lista é reforçar os conhecimentos adquiridos sobre o oscilador harmônico e aplicá-los nos exercícios. Para guiar os estudos, não gaste mais que 15 minutos por exercício. Escreva suas dúvidas e discuta com seus colegas ou me procure no lab 408.

HAMILTONIANO

Seja o operador hamiltoniano

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2m}\mathbb{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\mathbb{x}^2. \tag{1}$$

Dividindo-se por $\hbar\omega$ (dimensão de energia), um operador adimensional é obtido:

$$\frac{\mathbb{H}}{\hbar\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbb{p}}{p_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbb{x}}{x_0}\right)^2, \tag{2}$$

onde

$$(x_0)^2 = \frac{\hbar\omega}{m\omega^2}, \quad (p_0)^2 = m\hbar\omega = \left(\frac{\hbar}{x_0}\right)^2. \tag{3}$$

Note que $p_0 x_0 = \hbar$.

OPERADORES LEVANTAMENTO E ABAIXAMENTO (DE NÍVEIS)

Operadores levantamento e abaixamento:

$$a^\dagger = \frac{(\mathbb{x}/x_0) - i(\mathbb{p}/p_0)}{\sqrt{2}}, \tag{4}$$

$$a = \frac{(\mathbb{x}/x_0) + i(\mathbb{p}/p_0)}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

Relação de comutação:

$$[a, a^\dagger] = \mathbb{1}. \tag{6}$$

Na prática, a relação de comutação surge como uma correção quando trocamos a ordem de atuação e operadores. Por exemplo,

$$aa^\dagger = a^\dagger a + [a, a^\dagger] = a^\dagger a + \mathbb{1}. \tag{7}$$

A relação de comutação é calculada a partir de $[\mathbb{x}, \mathbb{p}] = i\hbar$, pois

$$[a, a^\dagger] = \frac{-i}{2x_0p_0}([\mathbb{x}, \mathbb{p}] - [\mathbb{p}, \mathbb{x}]) = \frac{-i(2i\hbar)}{2x_0p_0} = \mathbb{1}. \tag{8}$$

OPERADOR NÚMERO E AUTOESTADOS

$$\mathbb{N} = a^\dagger a. \tag{9}$$

O operador hamiltoniano (energia) é proporcional ao operador número $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{H} = \hbar\omega\left(\mathbb{N} + \frac{1}{2}\right). \tag{10}$$

Autoestados e autovalores: Os autoestados $|n\rangle$ de $\mathbb{N}$ também são autoestados de $\mathbb{H}$, ou seja, são observáveis compatíveis $[\mathbb{N}, \mathbb{H}] = 0$. Seus respectivos autovalores são

$$\mathbb{N}|n\rangle = n|n\rangle, \tag{11}$$

onde $n = 0, 1, \ldots$ A partir dessa relação, determina-se as autoenergias

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{12}$$

Relações de comutação:

$$[\mathbb{N}, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [\mathbb{N}, a] = -a. \tag{13}$$

AUTOESTADOS

São construídos a partir da aplicação sucessiva dos operadores $a^\dagger$,

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \tag{14}$$

Exemplo: $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$; $|2\rangle = \left(1/\sqrt{2}\right)a^\dagger|1\rangle$. De modo geral,

$$|n\rangle = \prod_{m=0}^{n-1}\left(\frac{a^\dagger}{\sqrt{m+1}}\right)|0\rangle = \sqrt{\frac{1}{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle. \tag{15}$$

A ação do operador abaixamento é

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \tag{16}$$

Função de onda espacial:

A representação do autoestado $|n\rangle$ na base das posições $|x\rangle$ é dada pela função de onda $\varphi_n(x)$:

$$|n\rangle = \int dx\,|x\rangle\langle x|n\rangle \equiv \int dx\,\varphi_n(x)|x\rangle. \tag{17}$$

Assim, a probabilidade de encontrar o estado n na entre a posição x e $x + dx$ é $p_n(x)dx = |\varphi_n(x)|^2dx$ ou $p_n(x) = |\langle x|n\rangle|^2$. Por exemplo, *se* uma partícula encontra-se no estado $n = 1$, a probabilidade de encontrá-la na origem é $|\langle x = 0|n = 1\rangle|^2 = |\langle 0_x|1_n\rangle|^2$.

A função de onda do estado fundamental é calculada a partir da equação $a|0\rangle = 0$,

$$\langle x|a|0\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0}\right) + \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)\right]\varphi_0(x) = 0. \tag{18}$$

A solução desta equação é

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi x_0^2}\right)^{1/4} \mathrm{e}^{-x^2/2x_0^2}, \tag{19}$$

que é nada mais que uma gaussiana centrada na origem, com x_0 desempenhando o papel de desvio padrão.

O estado $\varphi_1(x)$ é

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{x}{x_0} - x_0\frac{d}{dx}\right]\varphi_0(x). \tag{20}$$

Essa é a relação de recorrência dos polinômios de Hermite de ordem n. De modo geral,

$$\varphi_n(x) = C_n H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2/2x_0^2}. \tag{21}$$

Operador posição:

$$\mathbb{x} = x_0\left(\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}\right).$$

Exemplo: valor esperado

$$\langle n|\mathbb{x}|n\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\langle n|a+a^\dagger|n\rangle = 0. \tag{22}$$

COMBINAÇÃO LINEAR

O estado mais geral possível, $|\psi\rangle$, que descreve um certo sistema físico sujeito a um potencial harmônico é

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle. \tag{23}$$

Função de onda espacial:

$$|\psi\rangle = \int dx\,\psi(x)|x\rangle = \int dx\sum_n c_n\varphi_n(x)|x\rangle$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \tag{24}$$

onde $\varphi_n(x)$ é a função de onda espacial do autoestado $|n\rangle$.

Densidade de probabilidade espacial:

$$P(x) = |\psi(x)|^2 = |\langle x|\psi\rangle|^2 = \left|\sum_{n=0} c_n\varphi_n(x)\right|^2. \tag{25}$$

Note que estamos tomando o módulo quadrado da *soma*. Por exemplo, considere um estado $|\psi\rangle$ que é a combinação linear de dois estados:

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow P(x) = \frac{|\varphi_0(x) + \varphi_1(x)|^2}{2}$$

$$\neq \frac{p_0(x) + p_1(x)}{2}. \tag{26}$$

Isto é um efeito de interferência entre os níveis: em algumas posições x, as ondas podem interferir de modo construtivo ou destrutivo.

EXERCÍCIOS

Exercise 1 Calcule

a) $a^7|12\rangle$.

b) $a^\dagger a^2(aa^\dagger - 1)^2|n\rangle$ para qualquer valor de n.

c) $\langle\varphi|\varphi\rangle$ onde $|\varphi\rangle = a^\dagger|n\rangle$.

d) $\langle x=0|n=0\rangle$ e $\langle x=0|n=1\rangle$.

e) $\langle x|\mathbb{x}^k|n_x\rangle$, $k=\pm 1$.

f) $\langle\psi|\mathbb{x}^2|\psi\rangle$ com $|\psi\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$.

g) $[\mathbb{x}, \mathbb{N}]$.

Exercise 2 Calcule as autoenergias e autoestados para o caso 3D com frequências naturais $\omega_x \neq \omega_y \neq \omega_z$. Existem estados degenerados? Qual a condição?

Exercise 3 Calcule as autoenergias e autoestados para o caso 3D com uma única frequência natural ω. Determine a degenerescência $\Omega(E)$ para uma dada energia E.

Exercise 4 Mostre que, se $c_n(t=0) = \xi$, o deslocamento médio do oscilador harmônico unidimensional no tempo t', conhecido seu estado no tempo t, é dado por

$$\langle\psi(t')|\mathbb{x}|\psi(t)\rangle = \sqrt{2}x_0\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n+1}|\xi|^2\cos(\omega n(t'-t) + \omega t'). \tag{27}$$

Exercise 5 Suponha que, em adição ao potencial harmônico 1D, exista um potencial linear $V(\mathbb{x}) = \beta\mathbb{x}$. Mostre que tal potencial não afeta o sistema a menos de um deslocamento na posição de repouso.

Exercise 6 Suponha que, em adição ao potencial harmônico 1D, exista um potencial $V(\mathbb{x}) = (m\omega'^2/2)\mathbb{x}^2$. Mostre que tal potencial afeta a frequência natural do sistema mas mantém a estrutura de autovetores intacta.

Exercise 7 Encontre as autoenergias de um dipolo elétrico sujeito a um potencial harmônico imerso num campo elétrico constante $\vec{E} = E_0\hat{z}$.

Exercise 8 Um elétron encontra-se confinado sob ação de um potencial harmônico 3D esférico. Determine a densidade de carga $\rho(r,t)$ assumindo que o estado inicial seja combinação linear dos 4 estados de mais baixa energia. A partir deste resultado, calcule o potencial elétrico e o campo elétrico resultante. Este resultado é compatível com a física clássica?