1. Para uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutamente convergente definimos $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$ e $a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$. Mostre que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergem e que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Dê um contra-exemplo de uma série que converge (mas não converge absolutamente) e as séries dos termos negativos e positivos não convergem.

2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e b_n é uma sequência não crescente de números positivos, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

3. Mostre que para todo $a \in \mathbb{R}$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^2}{(1+a^2)^n}$ converge, e calcule a sua soma.

4. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

converge.

5. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ converge então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converge.

6. mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2}$$

converge.

7. Para que valores reais do parâmetro a a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^n}{(2-a)^n}$ converge? Calcule a soma.

8. Se $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2$ convergem e suponha que a_n e b_n sejam positivos, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ também converge.

9. Seja $\alpha \in (0,1)$ um número real. Mostre que existe uma sequência de números inteiros $0 \leq a_n \leq 9$ tal que

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

10. Considere o conjunto $\mathbf{l}_2$ de todas as sequências $X = a_n$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge. E o conjunto $\mathbf{l}_1$ de todas as sequências $Y = b_n$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} \|b_n\|$ converge. Mostre que os dois conjuntos formam um espaço vetorial (têm dimensão infinita). Dê exemplo de uma sequência que está em $\mathbf{l}_2$ mas não está em $\mathbf{l}_1$. Será que $\mathbf{l}_1 \in \mathbf{l}_2$?