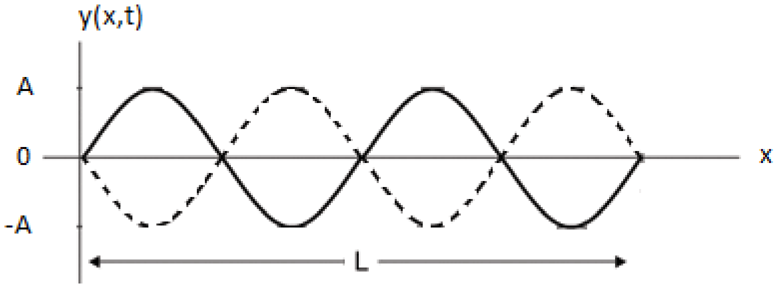
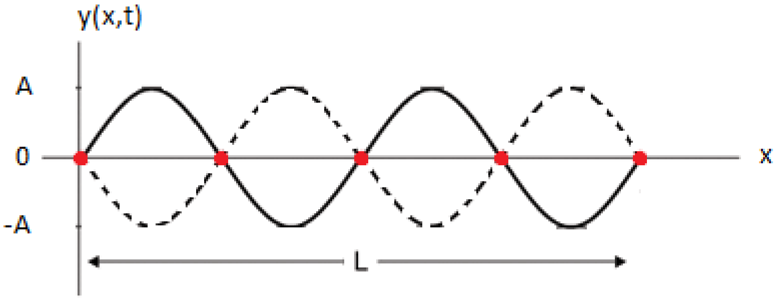
Provinha 1 – Gabarito

a) Em certo instante t

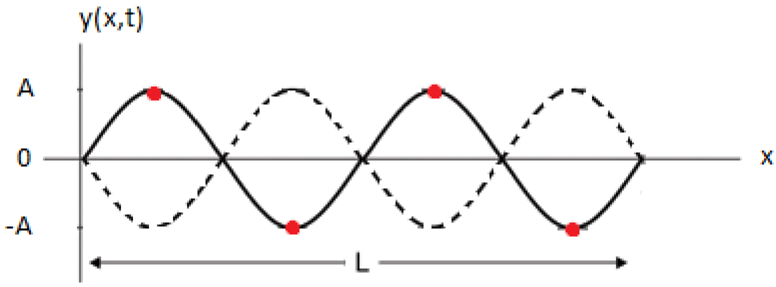


b) Nós



0, L/4, L/2, 3L/4 e L

Ventres



L/8, 3L/8, 5L/8 e 7L/8

c) Equação geral (equação [5.7.10] - Moysés):

$$y_n(x,t) = b_n sen(k_n x)\cos(\omega_n t + \delta_n)$$

com

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}; k_n = \frac{n\pi}{L};\ \omega_n = k_n\, v = \frac{n\pi}{L} v;\ v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Como a corda está no quarto modo de oscilação, então n=4, e daí:

$$k_4 = \frac{4\pi}{L};\ \omega_4 = \frac{4\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

E ainda temos que a amplitude da onda é A, então:

$$b_n = A$$

Condições de contorno:

$$y_4(0,t) = y_4(L,t) = 0\ condições\ de\ contorno$$

$$\frac{\partial y_4(x,t=0)}{\partial t} = 0\ condição\ inicial$$

Vamos calcular $\frac{\partial y_4(x,t)}{\partial t}$:

$$\frac{\partial y_4(x,t)}{\partial t} = -A\omega_4 sen(k_4 x) sen(\omega_4 t + \delta_4\ ) = 0$$

Daí temos que, em t=0:

$$sen(\delta_4) = 0\ \Rightarrow\ \delta_4 = 0$$

Então a equação da onda fica:

$$y_4(x,t) = \ A\ sen\left(\frac{4\pi}{L}x\right)\cos(\frac{4\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}t)$$

d) A velocidade transversal é dada por:

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y_4(x,t)}{\partial t} = \ -A\frac{4\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}sen\left(\frac{4\pi}{L}x\right)sen\left(\frac{4\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}t\right)$$

e) Os pontos em que a velocidade transversal é máxima são dados por:

$$\frac{\partial v_y(x,t)}{\partial x} = 0$$

Ou seja

$$\frac{\partial v_y(x,t)}{\partial x} = -A\left(\frac{4\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{T}{\mu}}cos\left(\frac{4\pi}{L}x\right)sen\left(\frac{4\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}t\right)\ =\ 0$$

$$cos\left(\frac{4\pi}{L}x\right) = 0\ \Longrightarrow\ \frac{4\pi}{L}x = (2n+1)\frac{\pi}{2}; com\ n = 0,1,2,3\ \dots .\ então\ x = (2n+1)\frac{L}{8}$$

Como 0≤ x ≤L temos:

$$n = 0\ \rightarrow x = \frac{L}{8}$$
$$n = 1\ \rightarrow x = \frac{3L}{8}$$
$$n = 2\ \rightarrow x = \frac{5L}{8}$$
$$n = 3\ \rightarrow x = \frac{7L}{8}$$

Que correspondem aos ventres da onda.

Num ponto infinitesimal da corda temos que:

$$dm = \mu\, dx$$

E a energia cinética nesse ponto é dada por:

$$dT = \frac{1}{2}\, dm \left(\frac{\partial y_4(x,t)}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\, \mu \left(\frac{\partial y_4(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\, \mu \left(v_y(x,t)\right)^2 dx$$

Do item anterior, temos $v_y(x,t)$ e ai ficamos com:

$$dT = \frac{1}{2}\, \mu \left(-A\frac{4\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} sen\left(\frac{4\pi}{L}x\right) sen\left(\frac{4\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}t\right)\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\, \mu\, A^2\, \frac{16\pi^2}{L^2}\, \frac{T}{\mu}\, sen^2\left(\frac{4\pi}{L}x\right)\, sen^2\left(\frac{4\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}t\right) dx$$

$$dT = A^2\, \frac{8\pi^2}{L^2}\, T\, sen^2\left(\frac{4\pi}{L}x\right)\, sen^2\left(\frac{4\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}t\right) dx$$

O valor máximo ocorre quando os senos valem 1, ou seja, a velocidade máxima é dada pela constante que os multiplica.Então

$$dT_{máx} = A^2\, \frac{8\pi^2}{L^2}\, T\, dx$$