

Análise Espectral

outra forma de olhar para os sinais

Conteúdo

- **Análise Espectral**: uma ferramenta indispensável
- Viagem no tempo (Canal História)
- Séries de Fourier(FS) – *Fourier Series (FS)*
- Sinais de Energia e Potência
- Séries de Fourier Discretas (SFD) – *Discrete Fourier Series (DFS)*

Porquê análise espectral?

- Constitui uma forma alternativa de identificar, descrever e analisar sinais que é complementar da análise no tempo.
- Permite a identificação e supressão selectiva de fontes de interferência coerentes.
- Proporciona uma forma rápida e eficiente de identificar as componentes de um sinal.
- Poderá simplificar o problema original - ex.: resolver Eq. Difer. Par. (PDE), auto e correlações cruzadas etc.
- Existem vários algoritmos numéricos que a implementam de forma extremamente eficiente (DSPs, FPGAs etc).

Análise Espectral – uma ferramenta

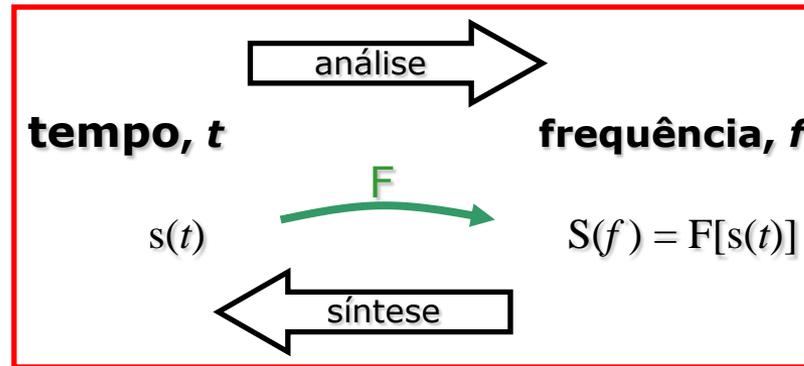
Sinais Eléctricos

Saídas de sensores

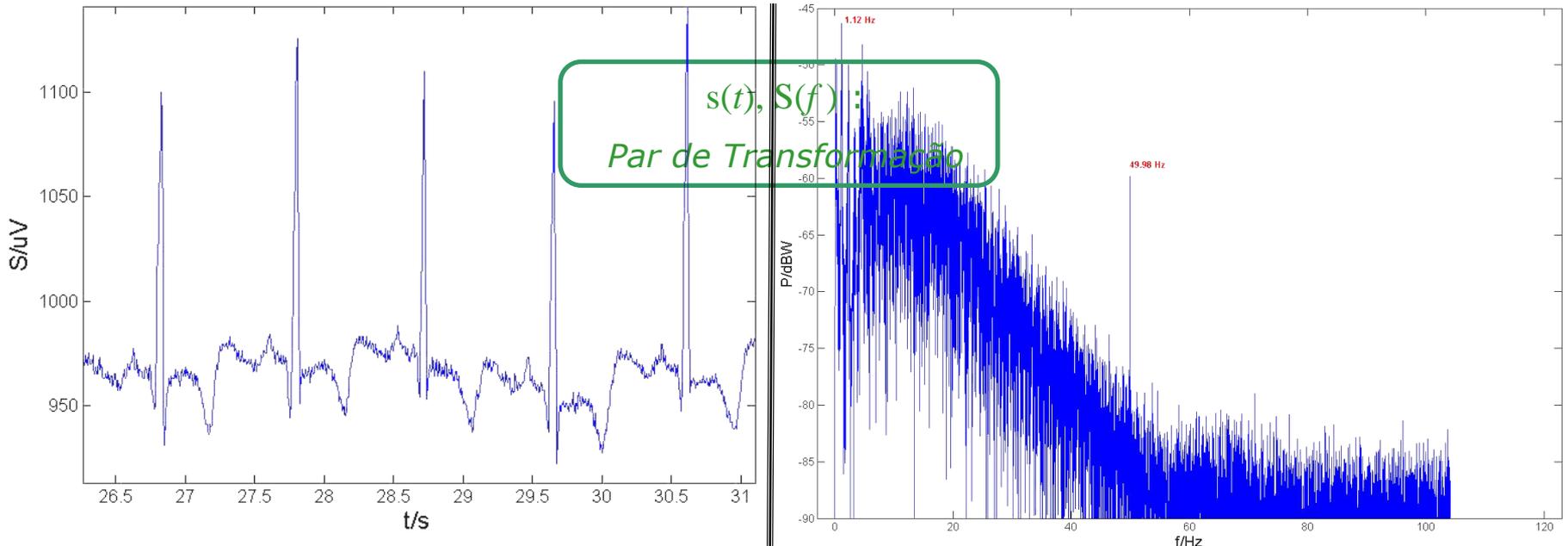
{ Som, Imagem, EMG, ECG, EEG etc. }

Entradas de actuadores

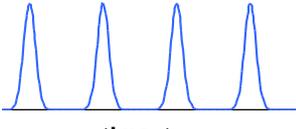
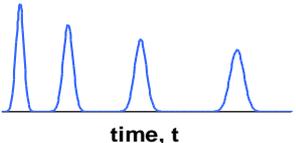
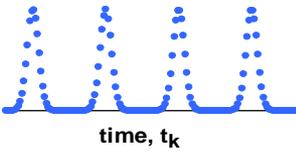
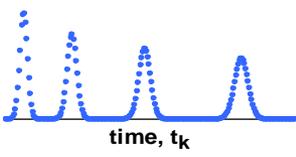
- Excitação de sinais



- Decomposição em frequência (Densidade Espectral de Potência)
- Supressão de Componentes (filtros)
- Determinação de periodicidade



Análise Espectral – uma ferramenta

Sinal de Entrada	tempo	Período	Nome	Espectro	Coef. Espectrais
	Contínuo	Periódico (período T)	FS	Discreto	$c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt$
			Aperiódico	FT	Contínuo
	Discreto	Periódico (período T)	DFS	Discreto	$\tilde{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$
			Aperiódico	DTFT	Contínuo
			DFT	Discreto	$\tilde{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$

Nota: $j = \sqrt{-1}$, $\omega = 2\pi/T$, $s[n] = s(t_n)$, $N = \text{No. de amostras}$

$N \rightarrow \infty$

Canal História

- Previsões de astronomia pelos Babilónios e Egípcios provavelmente recorriam a somas trigonométricas.
- **1669**: Newton tropeça no espectro de luz (specter = fantasma) mas não reconhece o conceito de “frequência” (teoria corpuscular da luz).
- **Século 18**: dois problemas eminentes
 - Órbitas dos corpos celestiais: Lagrange, Euler & Clairaut fazem uma aproximação dos dados de observação com uma combinação de funções periódicas; Clairaut, 1754(!) primeira fórmula DFT.
 - Cordas vibratórias: Euler descreve o movimento de vibração da corda por sinusóides (equação da onda).

Canal História

- **1807**: Fourier apresenta o seu trabalho na condução do calor \Rightarrow Nasce a análise de Fourier.
 - Equação da difusão \Leftrightarrow Séries (infinita) de senos & cosenos. Fortes críticas por pares bloqueia publicação. Trabalho só publicado em 1822 (“Theorie Analytique de la chaleur”).
- **19th / 20th century**: dois caminhos para a análise de Fourier - Contínuo & Discreto.
 - CONTINUO
 - Fourier estende a análise para funções arbitrárias (Transformada de Fourier).
 - Dirichlet, Poisson, Riemann, Lebesgue pegam no problema da convergência da série.
 - Outras variantes da TF nascem de necessidades várias (ex.: Short Time FT – análise da fala).

Canal História

- DISCRETO: métodos de cálculo rápidos (FFT)
 - **1805** - Gauss, primeira utilização da FFT (manuscrito em latim passou despercebido!!! Publicado em 1866).
 - **1965** - Cooley & Tukey da IBM “redescobrem” o algoritmo da FFT (“*An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*”).
 - Outras variantes da DFT para outras aplicações (ex.: *Warped DFT* - filter design & signal compression).
 - Algoritmo FFT refinado & modificado para várias plataformas computacionais.

Séries de Fourier

- Uma função **periódica** $s(t)$ que satisfaça as condições de Dirichlet ⁽¹⁾ pode ser expressa como uma série de Fourier, com termos seno e cosseno harmonicamente relacionados,

síntese

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)]$$

Para todo t , exceptuando discontinuidades

a_0, a_n, b_n : coef. de Fourier.

n : harmónica,

T : período, $\omega = 2\pi/T$

análise

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T s(t) dt$$

(média do sinal num período, i.e. termo DC ou componente de frequência zero.)

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$$

Nota: $\{\cos(n\omega t), \sin(n\omega t)\}_n$ formam uma base ortogonal num espaço funcional.

(1) Próximo acetato

Convergência da Série de Fourier

Condições Dirichlet

Em qualquer período

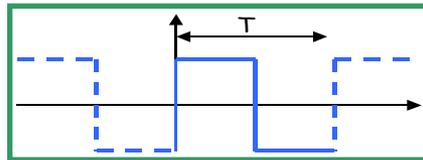
(a) $s(t)$ contínua por troços;

(b) $s(t)$ monotónica por troços;

(c) $s(t)$ absolutamente integrável, $\int_0^T |s(t)| dt < \infty$

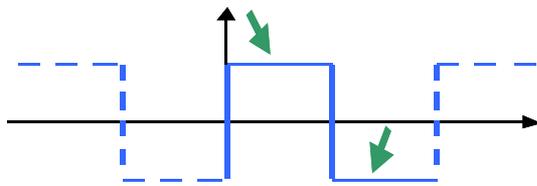
Exemplo:

onda quadrada

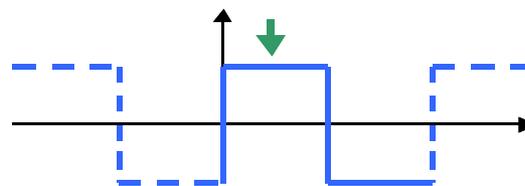


Taxa de convergência

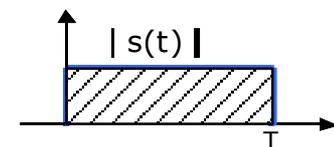
se $s(t)$ não for contínua então $|a_n| < M/n$ para n grande ($M > 0$)



(a)



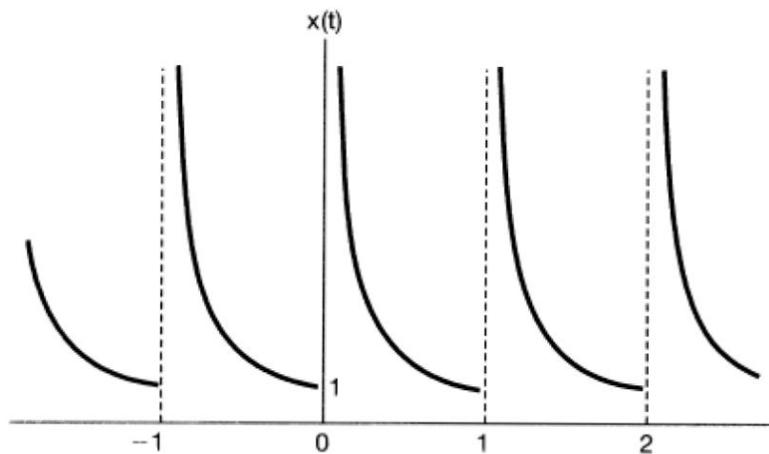
(b)



(c)

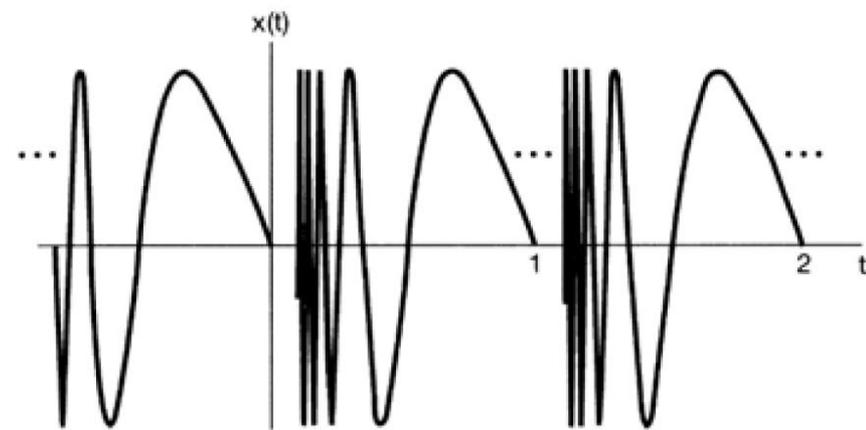
Sinais que violam condições de Dirichlet

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1$$



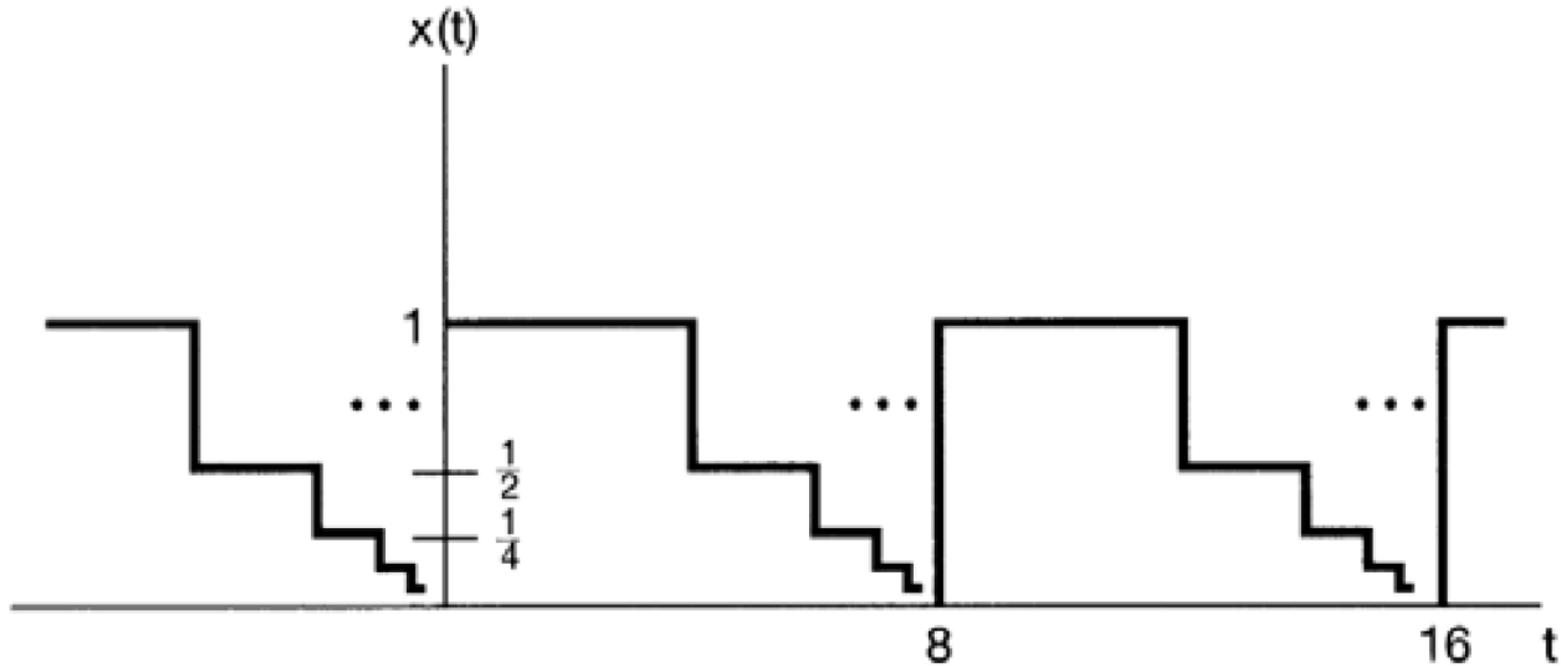
- (a) (b) (c)

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \leq 1$$



- (a) (b) (c)

Sinais que violam condições de Dirichlet



- (a) (b) (c)

Análise da Série de Fourier

SF de função ímpar odd*: onda quadrada.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \left\{ \int_0^{\pi} dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) dt \right\} = 0 \quad (\text{média nula})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \cos nt \, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \cos nt \, dt \right\} = 0 \quad (\text{função ímpar})$$

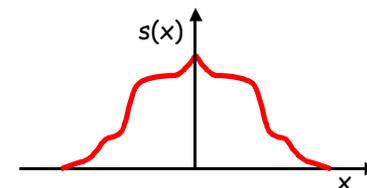
$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \sin nt \, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin nt \, dt \right\} = \dots = \frac{2}{n \cdot \pi} \cdot \{ 1 - \cos n\pi \} =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{n \cdot \pi} & \Leftarrow n \text{ ímpar} \\ 0 & \Leftarrow n \text{ par} \end{cases}$$

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \sin 5t + \dots$$

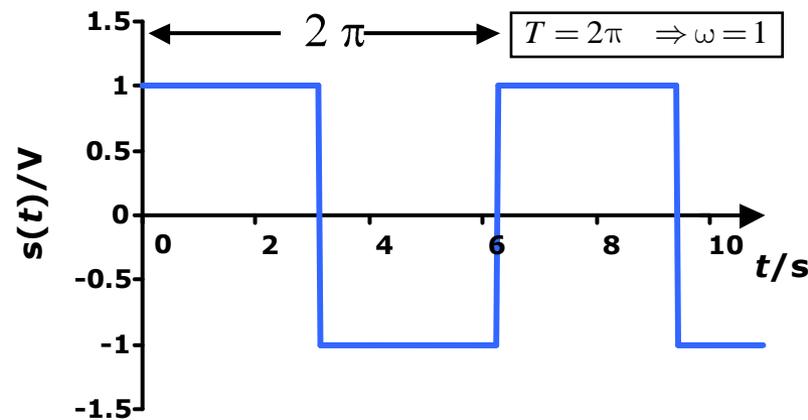
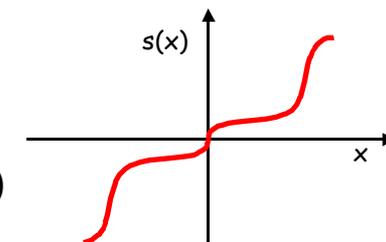
* Funções Pares e Ímpares

Par:
 $s(-x) = s(x)$



Ímpar:

$s(-x) = -s(x)$



Representação da Série de Fourier

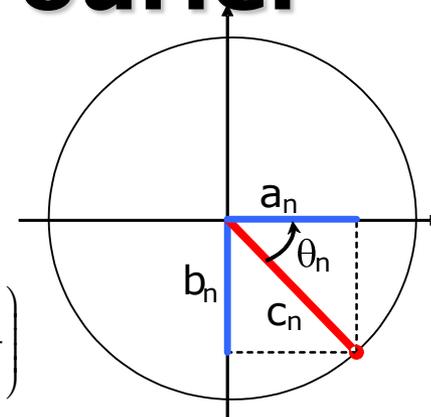
$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \theta_n)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

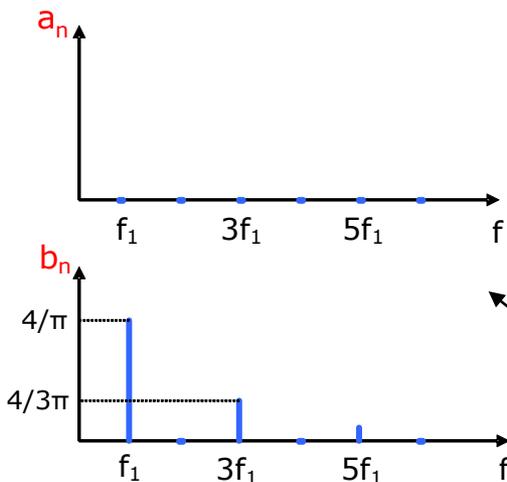
$$\theta_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$[-\pi, \pi]$



Cartesiana

$$v_n = a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)$$



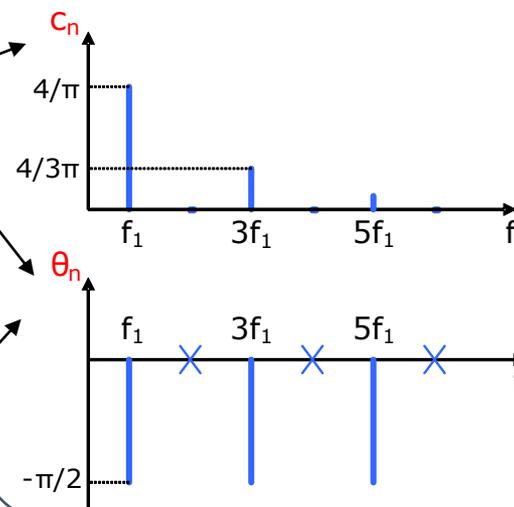
Espectro Frequência

c_n = amplitude
 θ_n = fase

Espectro de Fourier da onda quadrada

Polar

$$v_n = c_n \cos(\omega n t + \theta_n)$$



Análise da Série de Fourier

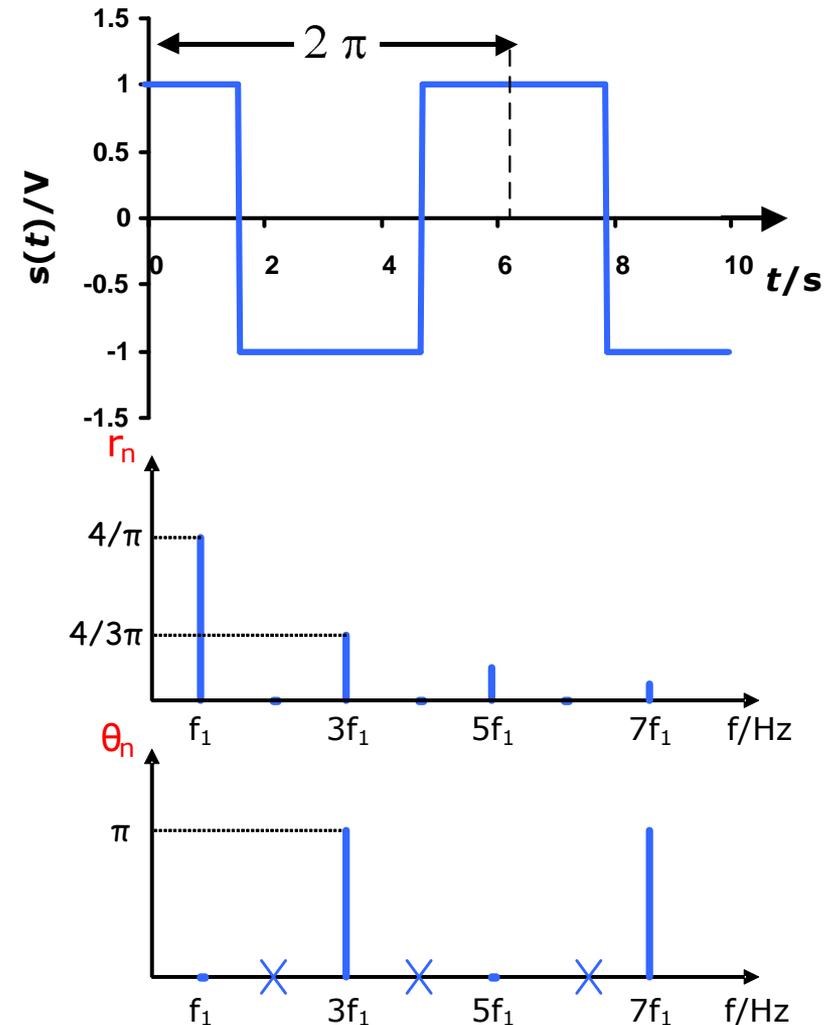
SF de função par: onda quadrada com avanço de $\pi/2$

$$a_0 = 0 \quad (\text{média nula})$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} \leftarrow n \text{ ímpar}, n = 2(\mathbb{N}_0 \text{ par}) + 1 \\ -\frac{4}{n\pi} \leftarrow n \text{ ímpar}, n = 2(\mathbb{N} \text{ ímpar}) + 1 \\ 0 \leftarrow n \text{ par} \end{cases}$$

$$b_n = 0 \quad (\text{função par})$$

amplitudes não mudam, **MAS**
as fases avançam $n \cdot \pi/2$.

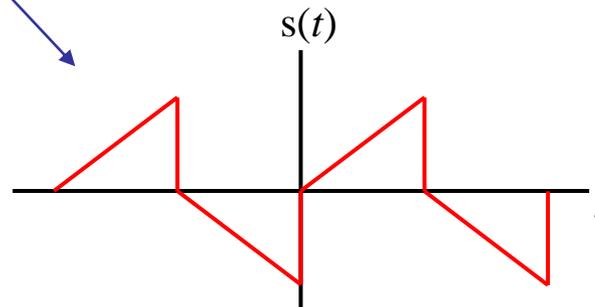


Análise da Série de Fourier

- Simplificações

- Sinais sem componente DC: $a_0 = c_0 = 0$
- Sinais com simetria par: $b_n = 0, c_n = a_n$
- Sinais com simetria ímpar: $a_n = 0, c_n = b_n$
- Sinais com simetria de 1/2 onda: $a_n = b_n = c_n = 0,$
for $n = 2k, k \in \mathbb{N}$

$$s(t) = -s\left(t + \frac{T_0}{2}\right)$$

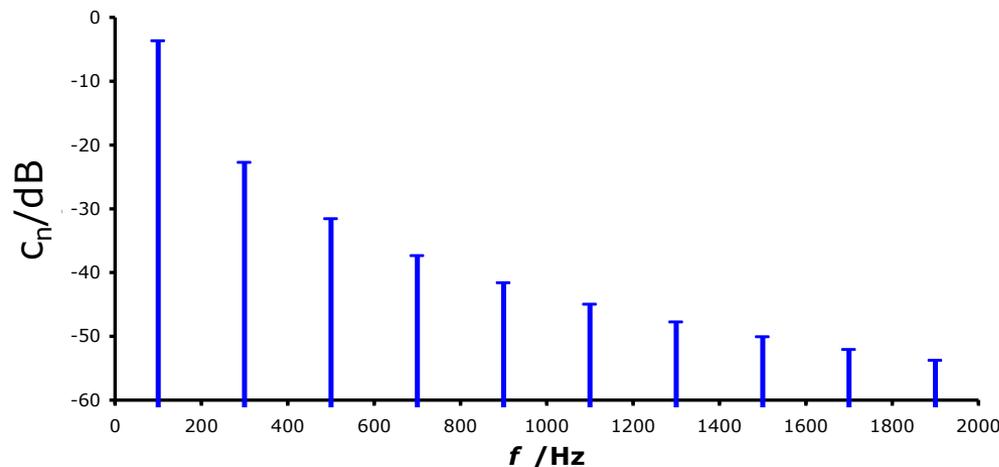
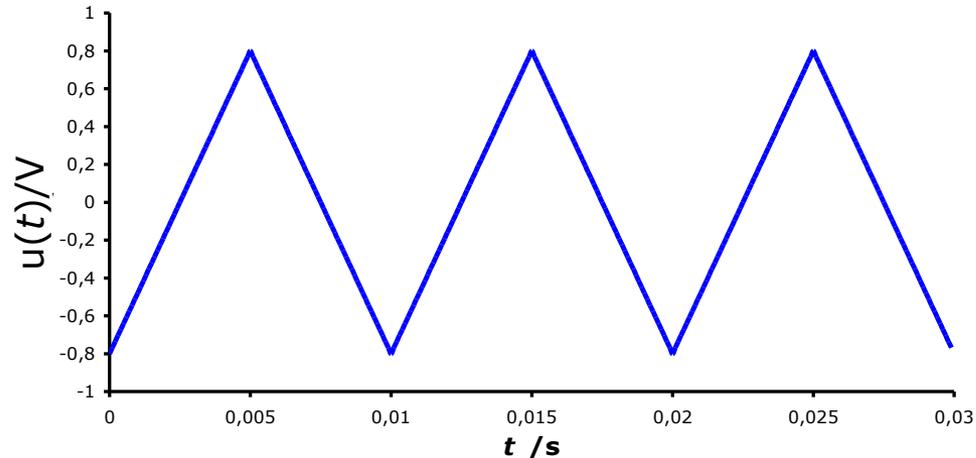


Representação Espectral

- Os coeficientes c_n constituem o espectro discreto de $s(t)$.
- O espectro de amplitude corresponde aos valores absolutos dos coeficientes c_n .
- O espectro de fase corresponde aos coeficientes Θ_n .
- O espectro habitualmente é representado em 2 gráficos nos quais a abcissa pode ser linear ou logarítmica.
- O eixo das ordenadas no espectro de amplitude pode ser expresso em dB ou em V.

Espectro de uma onda triangular

$A = 0,8 \text{ V}$ $f = 100 \text{ Hz}$

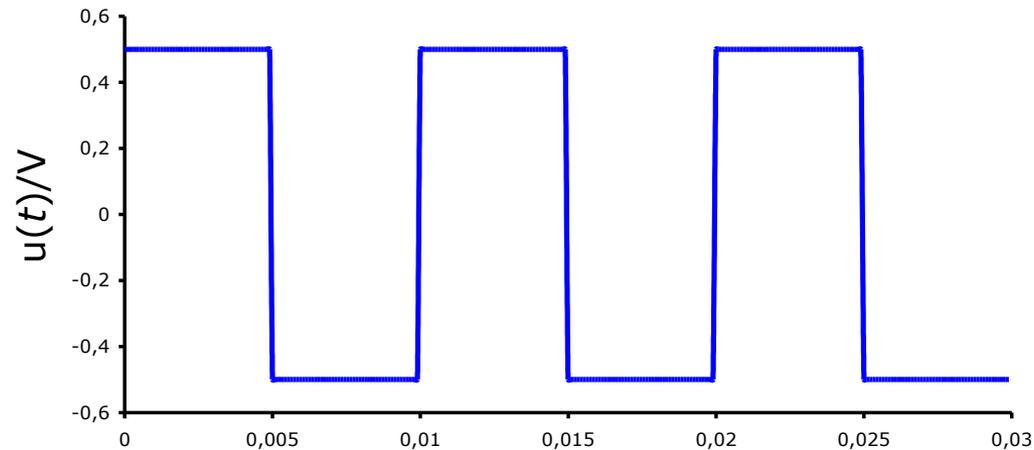


- Só tem harmónicas ímpares – simetria de $\frac{1}{2}$ onda.
- Amplitudes das harmónicas diminui com $1/n^2$
- Por exemplo, $c_3 = c_1/3^2$

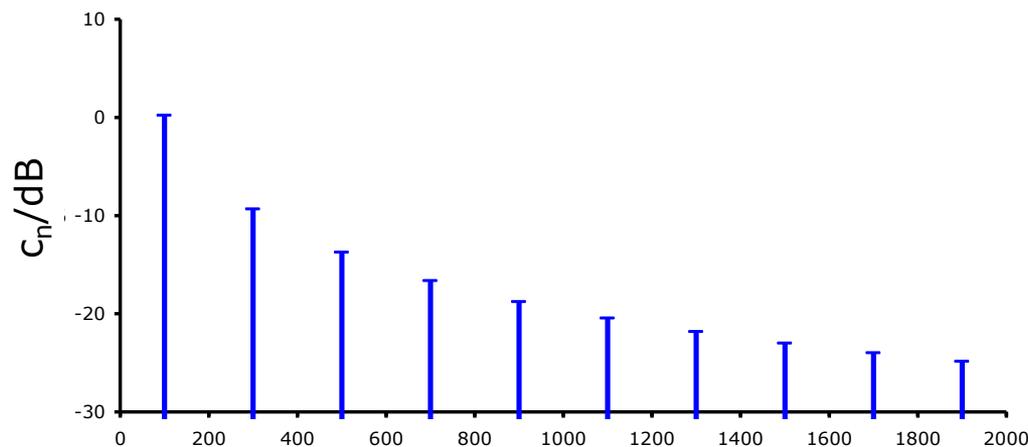
$$c_n = \frac{8A}{\pi^2 n^2}$$

Espectro de uma onda quadrada

$A = 0,5 \text{ V}$ $f = 100 \text{ Hz}$

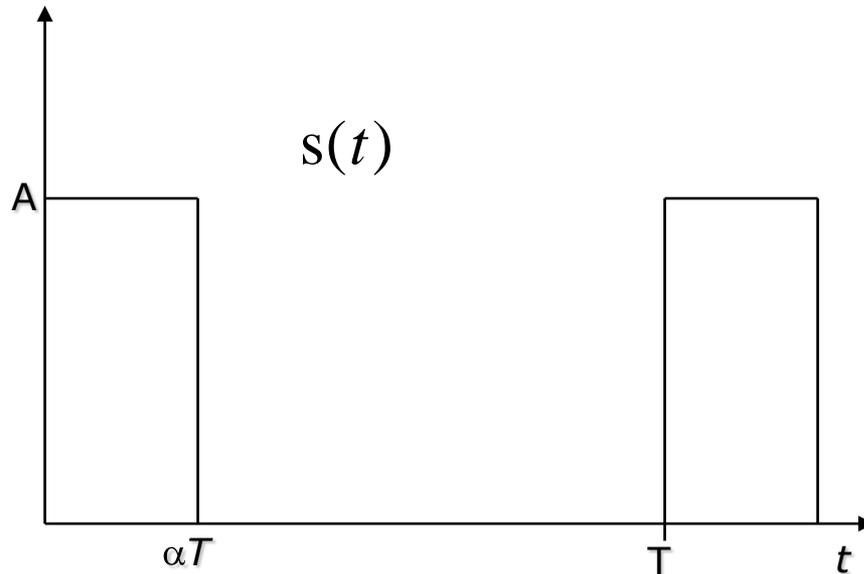


- Só tem harmónicas ímpares – simetria de $\frac{1}{2}$ onda.
- Amplitudes das harmónicas decresce com $1 / n$
- Por exemplo, $c_5 = c_1/5$



$$C_n = \frac{4A}{\pi n}$$

Espectro de uma onda rectangular



$$a_0 = \frac{A}{T} \int_0^{\alpha T} 1 dt = \alpha A$$

$$a_n = \frac{A}{n\pi} \text{sen } 2\pi n\alpha$$

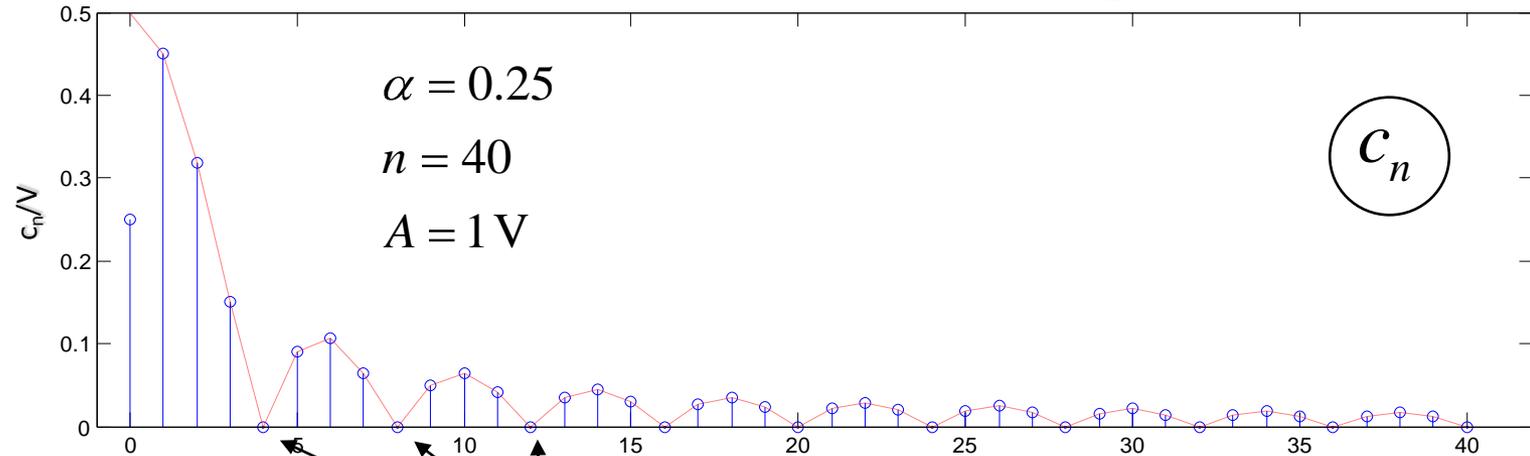
$$b_n = \frac{A}{n\pi} (1 - \cos 2\pi n\alpha)$$

$$c_n = \frac{2A}{n\pi} |\text{sen } \pi n\alpha| = 2A\alpha |\text{sinc } n\alpha|$$

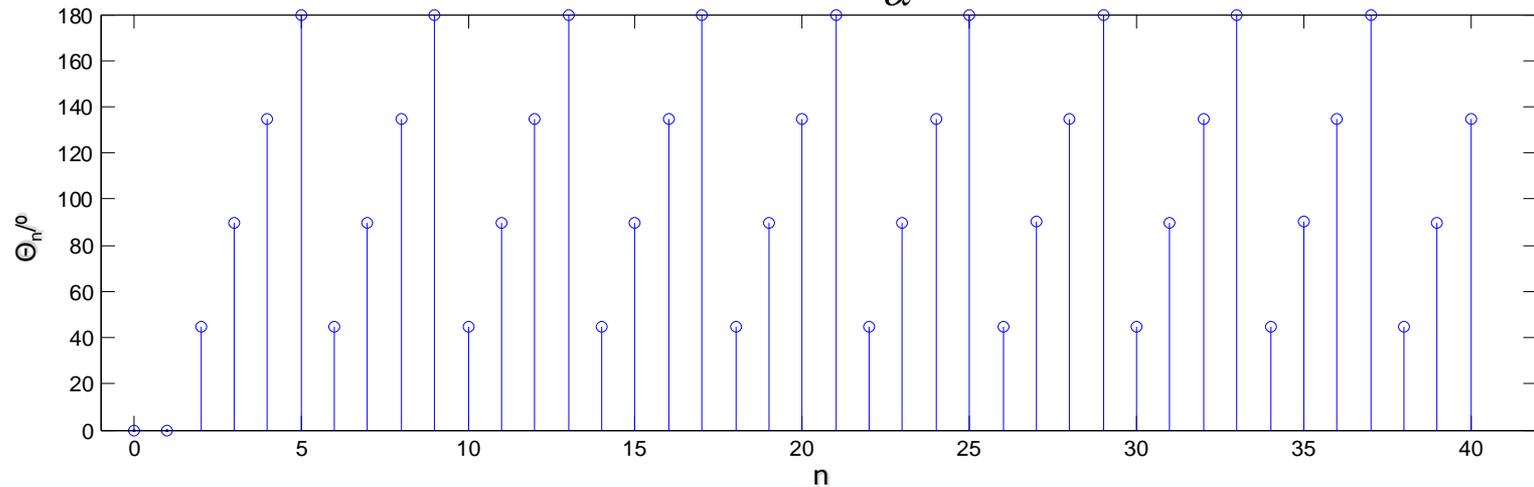
$n \neq 0$

Arrows from the text $n \neq 0$ point to the a_n and b_n equations, and to the boxed c_n equation.

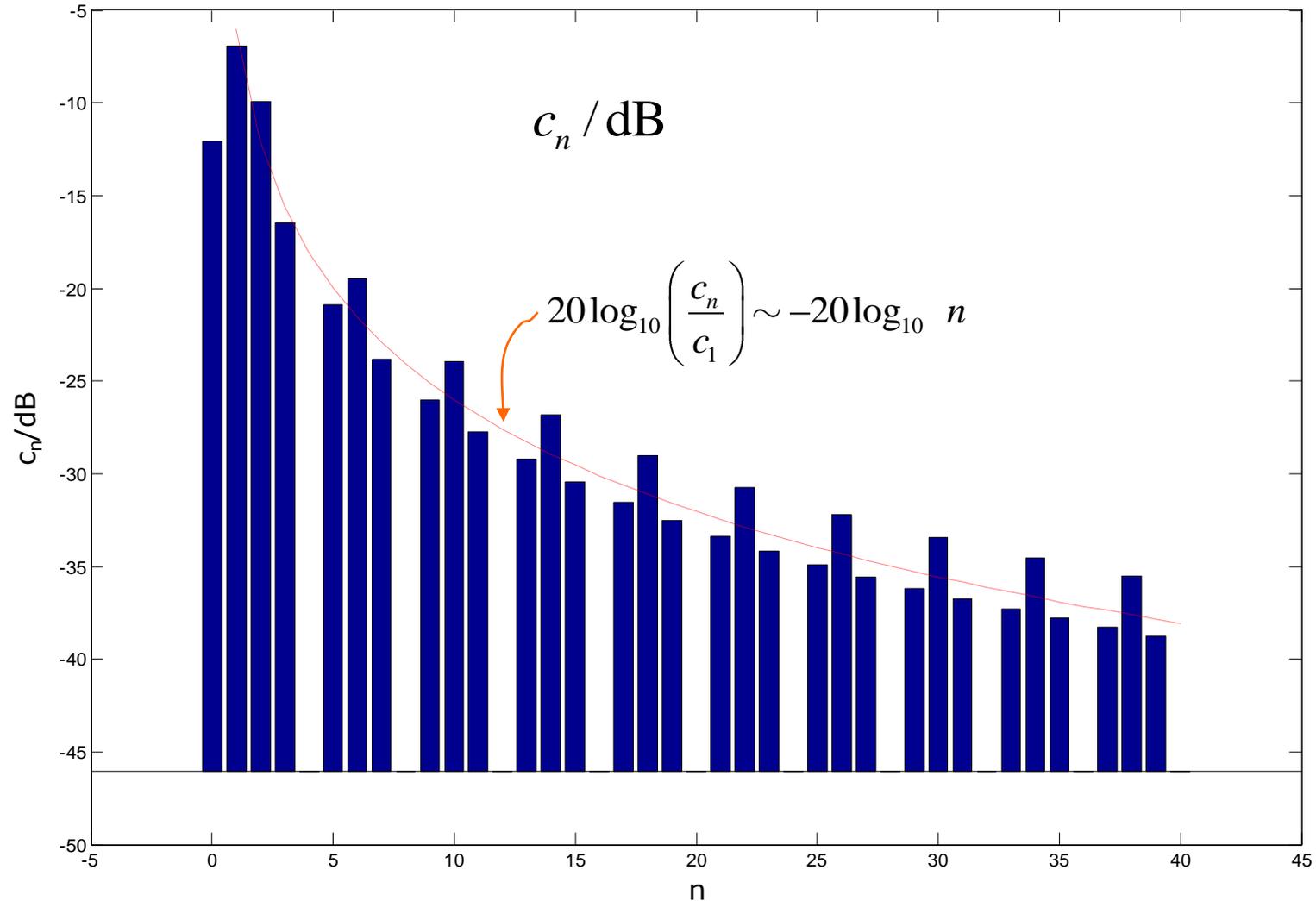
Espectro de uma onda rectangular



$$\text{sen } \pi n \alpha = 0 \Rightarrow n = \frac{k}{\alpha}, k \in \mathbb{N}$$



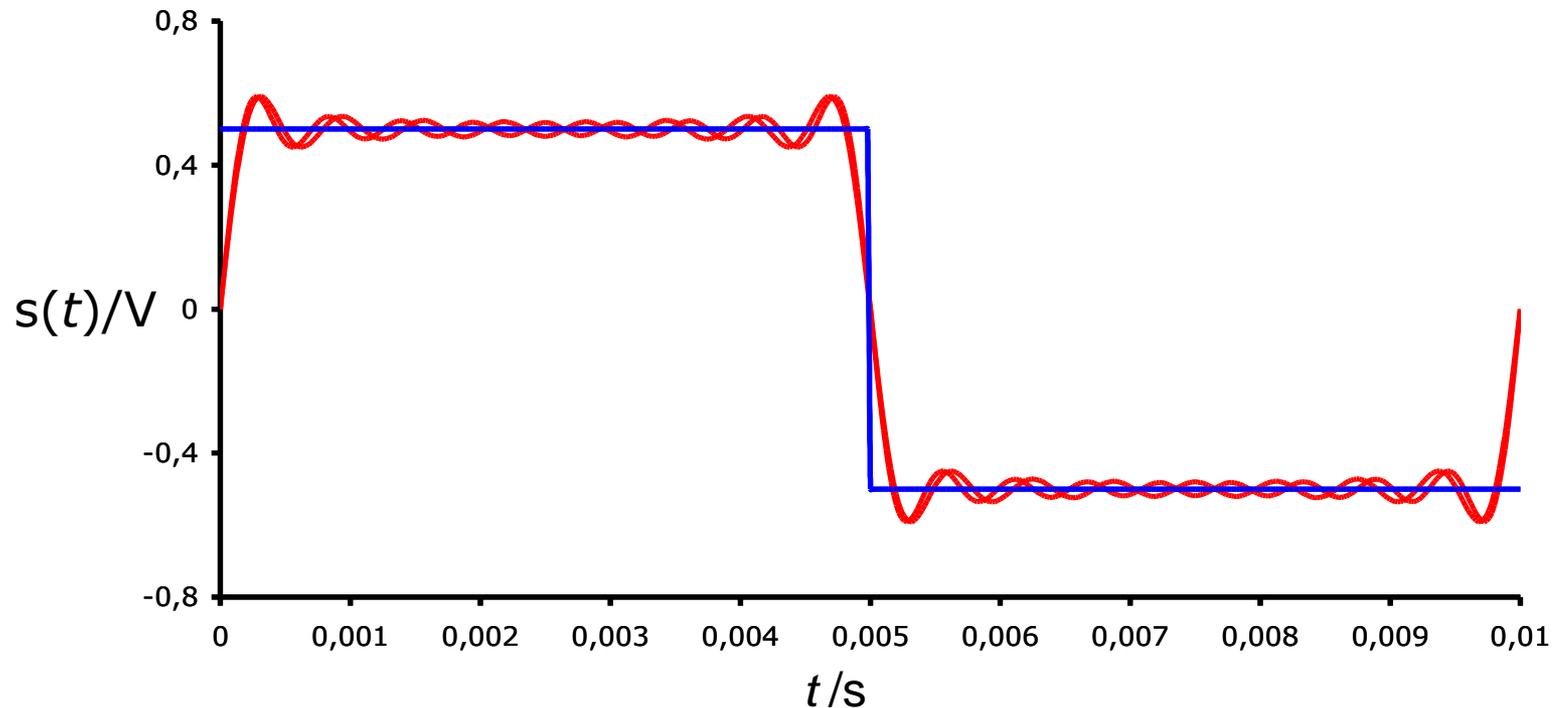
Espectro de uma onda rectangular



Síntese da Série de Fourier

$$s(t) \approx 0 + \sum_{n=1}^N c_n \cos(n\omega t + \theta_n)$$

N = 13



Série de Fourier – Complexos

- A formulação de Euler permite uma representação eficiente da SF que será igualmente útil para a transformada,

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - jb_n e^{jn\omega t} + a_n + jb_n e^{-jn\omega t} =$$

$$\cos n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}; \operatorname{sen} n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{j2}$$

$$2. = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - jb_n e^{jn\omega t} + \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m - jb_m e^{jm\omega t} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_n - jb_n e^{jn\omega t} =$$

$$m = -n \Rightarrow \begin{cases} e^{jm\omega t} = e^{-jn\omega t} \\ a_m = a_n; b_m = -b_n \end{cases}$$

$$= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

Série de Fourier – Complexos

- para $n \neq 0$ temos,

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{2T} \int_0^T s(t) [\cos n\omega t - j \sin n\omega t] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jn\omega t} dt = E \int_0^T s(t) e^{-jn\omega t} dt\end{aligned}$$

- para $n=0$ temos,

$$c_0 = a_0 = E \int_0^T s(t) dt$$

Série de Fourier – Complexos

Síntese

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

Formulação por complexos da SF (Laplace 1782). Harmónicas c_n distanciados por $\Delta f = 1/T$ no eixo das frequências.

Análise

$$c_n = E s(t) \cdot e^{-jn\omega t} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt$$

SF – Base Trigonométrica Ortonormada

As componentes de Fourier $\{\mathbf{u}_n\}$ formam uma base ortonormal do espaço de sinais:

$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jn\omega t}, |n| \in \mathbb{N}_0$$

Def.: Produto Interno: \odot

(Lembre-se: $(e^{jt})^* = e^{-jt}$)

Neste caso,

$$\mathbf{u}_n \odot \mathbf{u}_m = \int_0^T \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_m^* dt$$

$$\mathbf{u}_m \odot \mathbf{u}_n = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 \Leftarrow m = n \\ 0 \Leftarrow m \neq n \end{cases}$$

$$c_n = \frac{s(t) \odot \mathbf{u}_n}{\sqrt{T}}$$

i.e. $(1/\sqrt{T})$ vezes a *projecção de $s(t)$* segundo a componente \mathbf{u}_n .

SF – Frequências negativas e inversão temporal

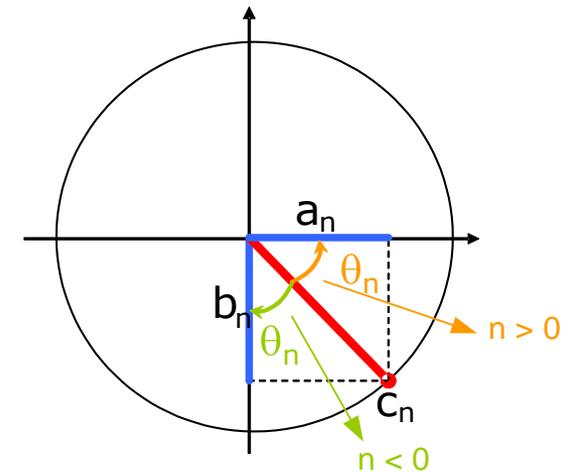
- Na representação complexa da SF temos: $n = -\infty, \dots, 0, \dots, +\infty$

- $$\omega_n = n\omega, \theta_n = \omega_n t$$

- $n > 0$, amplitude complexa gira no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (laranja).

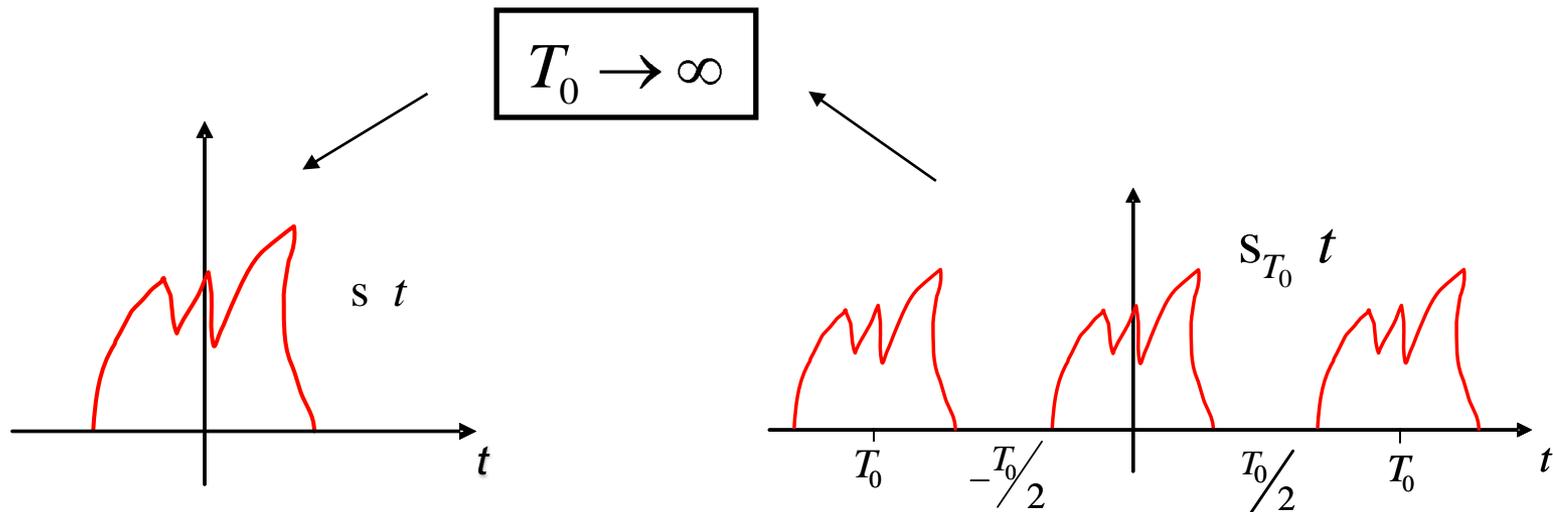
- $n < 0$, amplitude complexa gira no sentido do ponteiro dos relógios (verde), equivalente a tempo negativo \Rightarrow ***inversão temporal***.

- **Cuidado:** Fases são extremamente importantes quando se combinam sinais.



Análise Espectral – Sinais não periódicos

- Estamos interessados em estender a representação espectral a sinais não periódicos.
- Um sinal aperiódico pode ser entendido como um cenário limite de um sinal periódico para o qual,



Análise Espectral – Sinais não periódicos

- No limite as duas funções serão idênticas,

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} s_{T_0}(t) = s(t)$$

- A expansão em SF do sinal periódico corresponde a,

$$s_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- Integrar $s_{T_0}(t)$ no intervalo $\left[-\frac{T_0}{2}; \frac{T_0}{2}\right]$ é o mesmo que integrar $s(t)$ no intervalo $-\infty; +\infty$

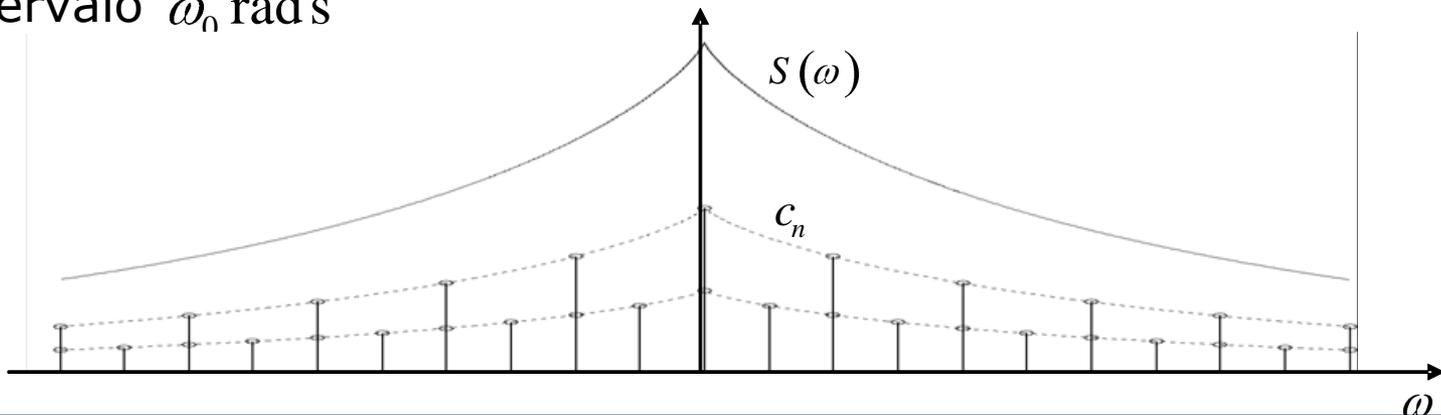
$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Análise Espectral – Sinais não periódicos

- É interessante analisar como evolui o espectro com o incremento do período. Com esse intuito definimos,

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{T_0} S(n\omega_0)$$

- Os coeficientes c_n correspondem às amostras de $S(\omega)$ (multiplicadas pelo factor $1/T_0$) e uniformemente espaçadas de um intervalo $\omega_0 \text{ rad s}^{-1}$



Análise Espectral – Sinais não periódicos

- No limite, $T_0 \rightarrow \infty, \omega_0 \rightarrow 0, c_n \rightarrow 0$, as componentes do espectro têm um espaçamento nulo e a amplitude esvanece (infinitésimal).
- Substituindo c_n na expressão de sinal periódico,

$$s_{T_0} t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{S_n}{T_0} e^{jn\omega_0 t}$$

- quando $T_0 \rightarrow \infty$, ω_0 torna-se infinitésimal e podemos recorrer à notação,

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0} \quad \text{e} \quad s_{T_0} t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{S_n \Delta\omega}{2\pi} e^{jn\Delta\omega t}$$

$$T_0 \rightarrow \infty, \Delta\omega \rightarrow 0, s_{T_0} t \rightarrow s t \quad s t = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \Delta\omega e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega$$

Análise Espectral – Sinais não periódicos

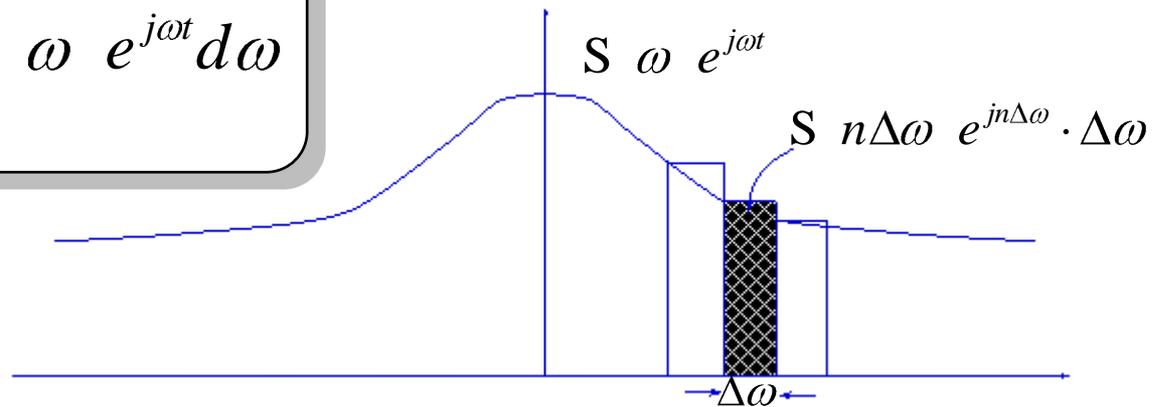
- A expressão

$$s(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega$$

pode ser entendida como a área sob a função (Integral de Riemann) $S(\omega) e^{j\omega t}$

Síntese

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



Análise Espectral – Sinais não periódicos

- Transformada de Fourier

$$\Delta f = \frac{1}{T_0}, \quad S(n\Delta f) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) e^{-j2\pi n\Delta f t} dt = c_n T_0$$

$$T_0 \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta f \rightarrow 0 \wedge n\Delta f \rightarrow f \wedge S(n\Delta f) \rightarrow S(f)$$

Análise

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Transformada de Fourier - Propriedades

	$s \ t$	$S \ \omega$
1. Linearidade	$a \cdot s_1 \ t + b \cdot s_2 \ t$	$a \cdot S_1 \ \omega + b \cdot S_2 \ \omega$
2. Desloc. no tempo	$s \ t \pm t_0$	$e^{\pm j\omega t_0} S \ \omega$
3. Desloc. na Frequência	$e^{\pm j\omega_0 t} s \ t$	$S \ \omega \mp \omega_0$
4. Derivada temporal	$\frac{d^n}{dt^n} s \ t$	$j\omega^n S \ \omega$
5. Convolução (tempo)	$s \ t * f \ t = \int_{-\infty}^{\infty} s \ \tau f \ t - \tau \ d\tau$	$S \ \omega F \ \omega$
6. Correlação (tempo)	$s \ t \otimes f \ t = \int_{-\infty}^{\infty} s \ \tau f \ t + \tau \ d\tau$	$S^* \ \omega F \ \omega$

Transformada de Fourier - Propriedades

	$s(t)$	$S(\omega)$
7. Integral no Tempo	$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt$	$\frac{S(\omega)}{j\omega} + \pi S(0) \delta(\omega)$
8. Inversão no Tempo	$s(-t)$	$S(-\omega)$
9. Conjugado	$s^*(t)$	$S^*(-\omega)$
10. Simetria	$S(t)$	$2\pi s(\omega)$

TF de algumas ondas importantes

	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_F(i\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$	$F_F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$	
	$\text{rect} \frac{t}{T} = \begin{cases} 1 & (t < T/2) \\ 0 & (t > T/2) \end{cases}$	$T \text{sinc} \frac{\omega T}{2\pi} \equiv T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$	
	$\text{sinc} \frac{t}{T} \equiv \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}$	$T \text{rect} \frac{\omega T}{2\pi} = \begin{cases} 0 & (\omega < \frac{\pi}{T}) \\ T & (\omega > \frac{\pi}{T}) \end{cases}$	
	$\begin{cases} 1 - \frac{ t }{T} & (t < T) \\ 0 & (t \geq T) \end{cases}$	$T \text{sinc}^2 \frac{\omega T}{2\pi} \equiv T \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2$	
	$e^{-\frac{ t }{T}}$	$\frac{2T}{(\omega T)^2 + 1}$	
	$e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T}\right)^2}$	$\sqrt{2\pi} T e^{-\frac{1}{2} (\omega T)^2}$	

Energia e Potência

- Considerando uma função arbitrária $s(t)$ como uma tensão aos terminais de uma resistência unitária

$$\frac{s^2(t)}{1} = \text{potência (VA)}$$

$$E = \int_a^b s^2(t) dt \text{ (J)}$$

← Energia

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty \Rightarrow \text{Sinal de Energia}$$

- Sinais de Energia são limitados no tempo.
- Como regra, transitórios (sinais esporádicos determinísticos não periódicos) são sinais de energia.
- A média da potência num longo intervalo temporal ($\rightarrow \infty$) é zero.

Energia e Potência

- Um sinal de potência finita corresponde a um sinal com um **período infinito e energia infinita**, mas que tem uma **média de potência finita**,

$$0 < P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s^2 dt < \infty$$



Sinal de Potência

- Como regra, sinais estocásticos e sinais periódicos determinísticos são sinais de potência.
- Sinais de potência cumprem sempre os critérios de Dirichlet para a convergência da série de Fourier.

Série de Fourier - Potência

- A potência pode ser determinada a partir da descrição em frequência do sinal, como estabelecido pelo,

Teorema de Parseval: Um sinal periódico $s(t)$ é um sinal de potência, assim como cada uma das componentes da série de Fourier correspondente. A potência P de $s(t)$ é igual à potência da sua descrição em série de Fourier,

$$P_s = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \right]^2 dt$$

$$= a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{2} = S_{RMS}^2$$

Potências somam-se algebricamente !!!

- Nem a potência, nem o valor eficaz, dependem das fases das harmónicas Θ_n !!

Séries de Fourier - Potência

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \theta_n) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \theta_n)$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T \left[c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \theta_n) \right]^2 dt}$$

$$\frac{1}{T} \int_T c_n \cos(n\omega t + \theta_n) c_m \cos(m\omega t + \theta_m) dt = \begin{cases} \frac{c_n^2}{2} & m = n \neq 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$U_{ef} = \sqrt{c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_n}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{S_t \odot S_t}$$

Transf. de Fourier - Potência

- Para sinais não periódicos (Transformada de Fourier), o teorema de Parseval é expresso analiticamente por,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) S^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

- A Densidade Espectral de Potência DEP (Power Spectral Density - PSD) corresponde a,

$$PSD = S(\omega) S^*(\omega) = |S(\omega)|^2 \text{ V}^2 \text{ Hz}^{-1}$$

Nota: Em ambas as definições, $S(\omega)$ e $S(f)$, correspondem à TF de $s(t)$

Transf. de Fourier - Correlação

- A autocorrelação de um sinal $s(t)$ pode ser expressa analiticamente (sinais estacionários) por,

$$R_{\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t+\tau) dt = E[s(t) s(t+\tau)]$$

- O teorema de Wiener-Khinchin estabelece uma importante relação entre a auto-correlação de um sinal e a sua densidade espectral de potência,

$$PSD = S^*(\omega) S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \mathfrak{F}\{R_{\tau}\} = \mathfrak{R}\{\omega\}$$

Transf. de Fourier - Correlação

- Em particular, é verdadeira a seguinte identidade para sinais estocásticos estacionários,

$$P = R(0) = \mathcal{F}^{-1} PSD \Big|_{t=0}$$

- Uma forma particularmente eficiente de numericamente determinar a auto-correlação de um sinal consiste em determinar a transformada de Fourier inversa da DEP,

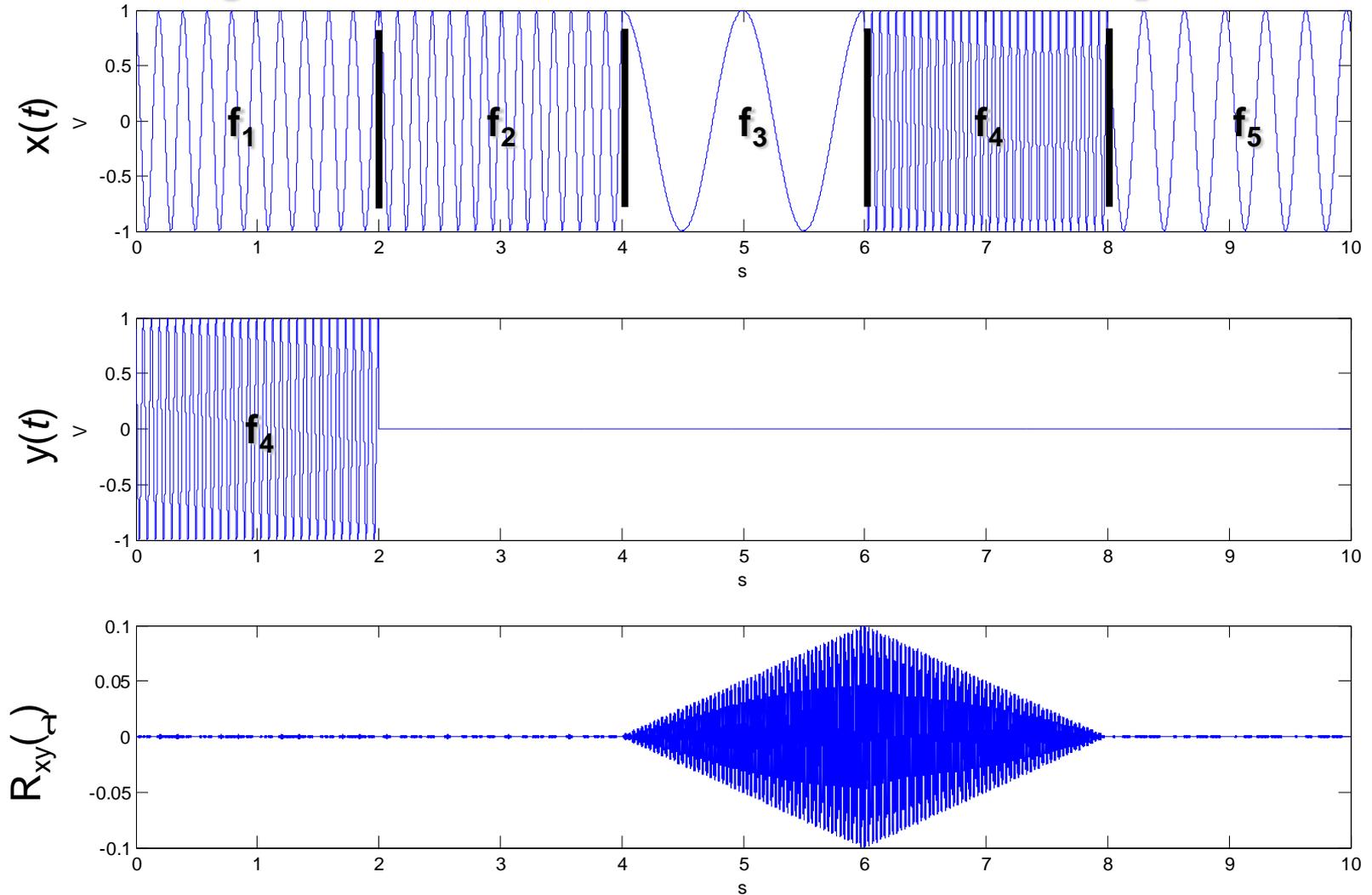
$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) S(\omega) e^{jn\omega\tau} d\omega$$

Transf. de Fourier - Correlação

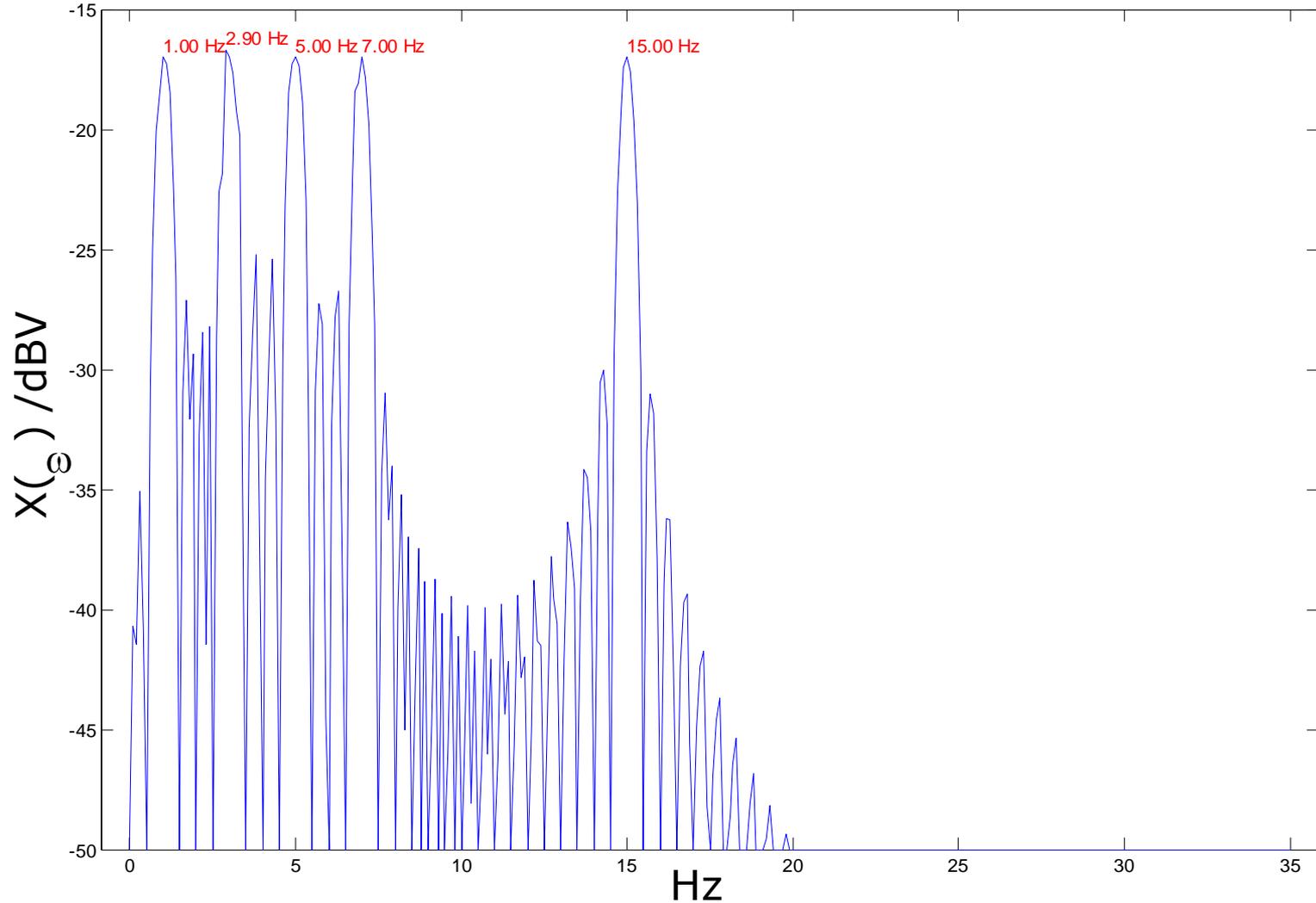
- O teorema de Wiener-Khinchin é extensível à correlação cruzada,

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(\omega) X(\omega) e^{jn\omega\tau} d\omega$$

Correlação Cruzada – um Exemplo



Correlação Cruzada – um Exemplo



Série de Fourier Discreta - DFS

- Em sistemas digitais, nos quais o tempo não é contínuo, torna-se necessário formalizar a variante de tempo discreto da Série de Fourier... *Discrete Fourier Series*.
- Para um sinal de largura de banda limitada $s[k]$ com um período N , i.e., $s[k] = s[k+N]$, a DFS é definida por,

Análise

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

Nota: $c_{n+N} = c_n \Leftrightarrow$ igual período N
Periodicidade propaga-se para as frequências

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot e^{-jn\omega t} dt \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

Síntese

$$s[k] = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$$

Síntese:
Soma finita \Leftarrow $s[k]$ com larg. de banda finita

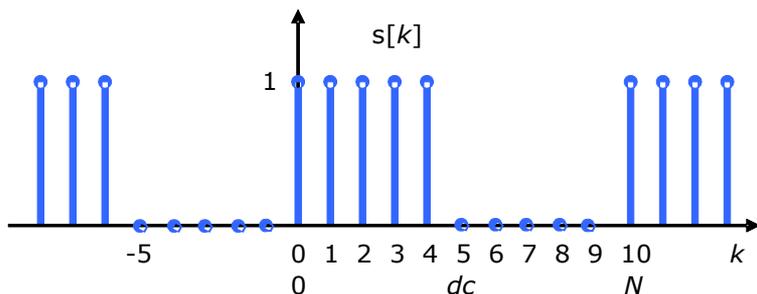
Série de Fourier Discreta - DFS

- DFS gera coeficientes c_n periódicos, com o mesmo período do sinal.
- N amostras consecutivas de $s[k]$ descrevem completamente s nos domínios do tempo ou da frequência.
- Ortogonalidade da DFS,

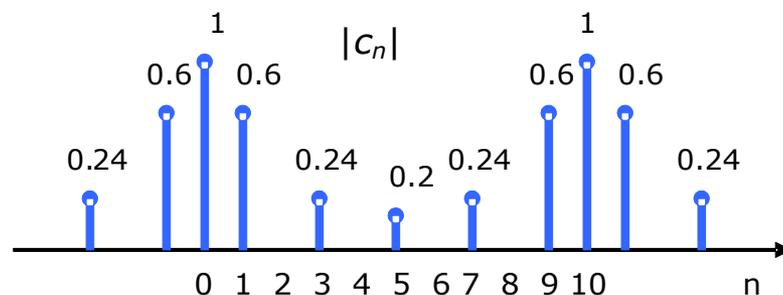
$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi(n-m)k}{N}} = \delta_{n,m}$$

Série de Fourier Discreta - Representação

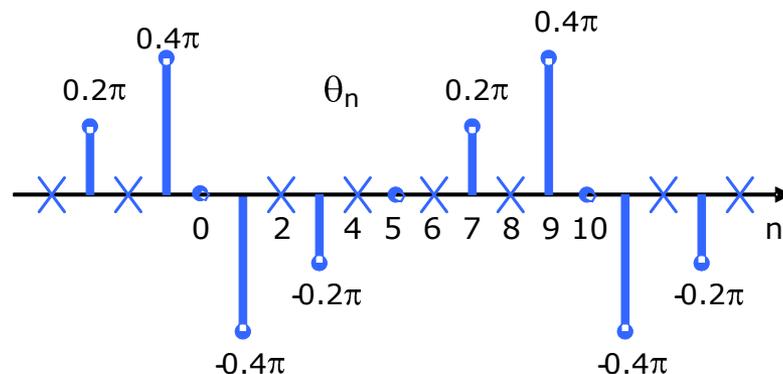
- Representação DFS de uma onda quadrada com 1V de amplitude,



$s[k]$: período N , factor de ciclo fc/N



$$c_n = \begin{cases} \frac{fc}{N} & , n = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{e^{-j\frac{\pi n}{N} dc - 1}}{N} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi n \cdot dc}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi n}{N}\right)} & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$



Sinais discretos \Rightarrow Espectro Periódico

Discrete Time Fourier Transform - DTFT

- Tal como no contínuo, há uma extensão para a decomposição em frequência de sinais não periódicos, a *Discrete Time Fourier Transform* - DTFT.
- A DTFT é definida por,

Análise

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] \cdot e^{-j2\pi f k}$$

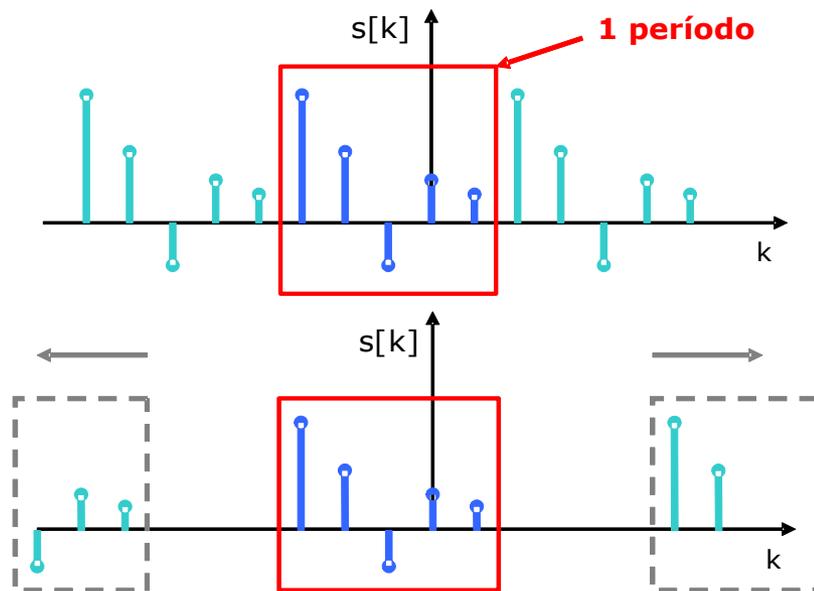
Síntese

$$s[k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(f) e^{j\omega k} d\omega$$

Domínio da frequência contínuo!!!

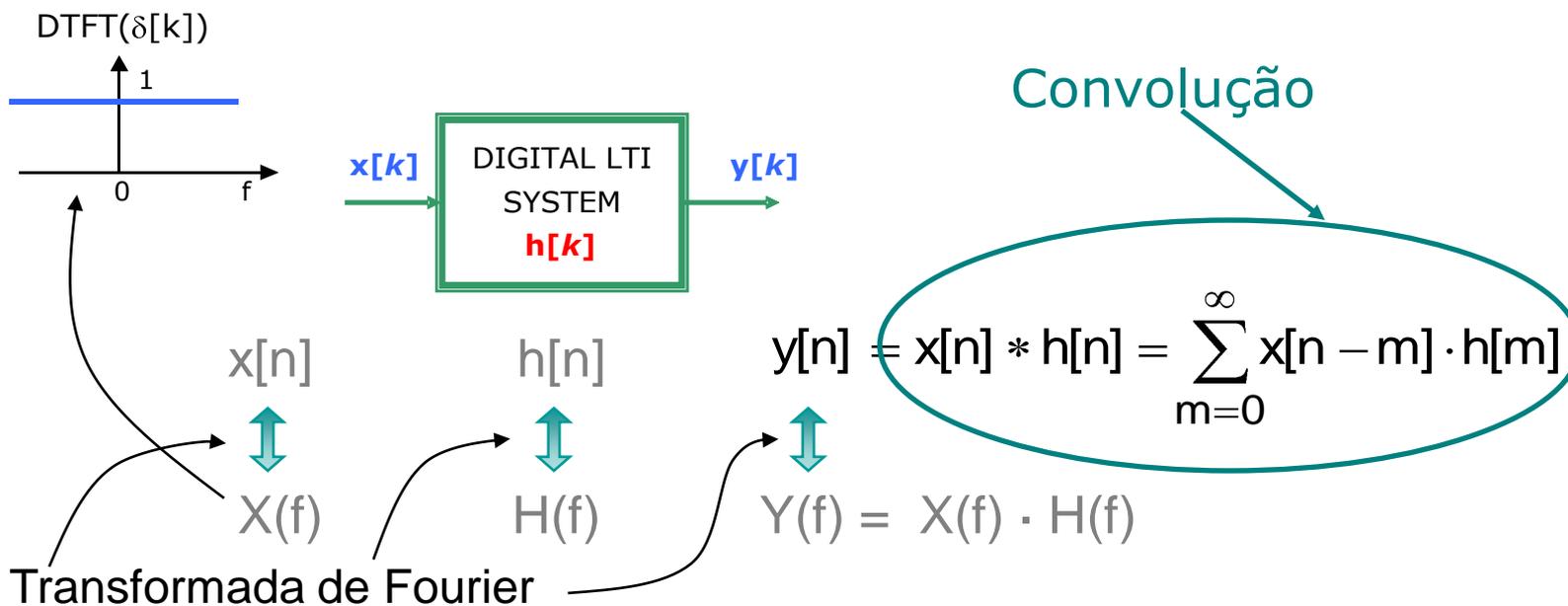
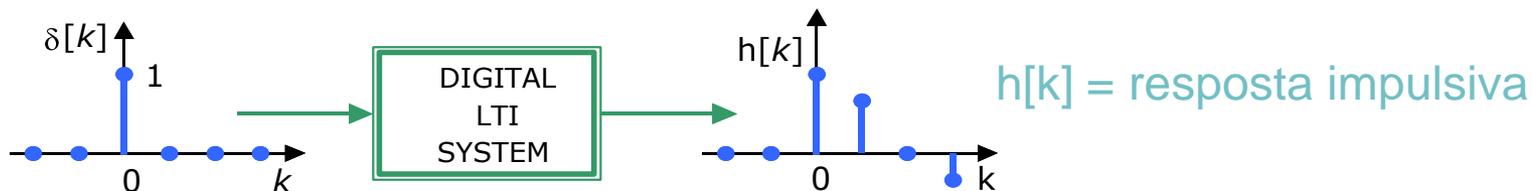
- Derivado da DFS fazendo $N \rightarrow \infty$,

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi n k}{N}}$$



Sistemas Digitais Lineares Invariantes no Tempo

- Obedecem ao princípio da sobreposição,

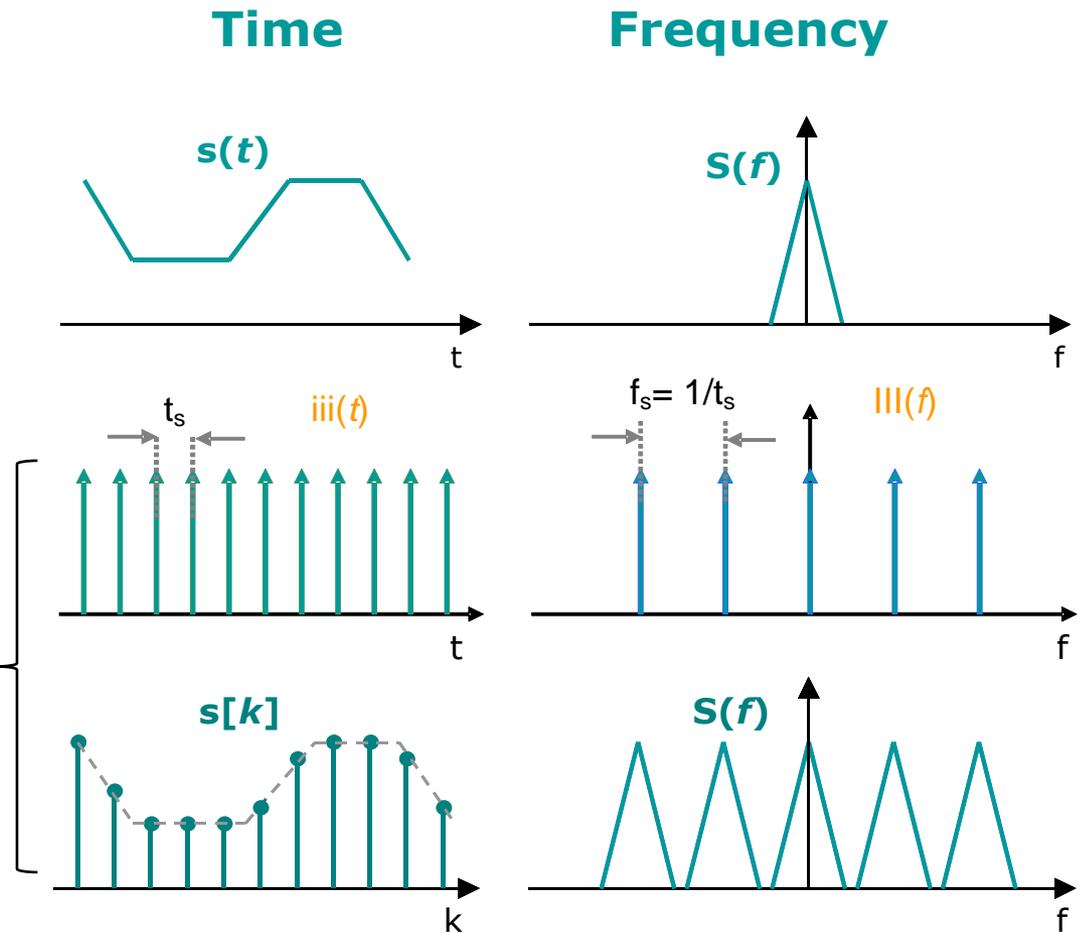


DTFT - Amostragem & Convolução

Amostrar $s(t)$ corresponde a multiplicar $s(t)$ pela função de pente $iii(t)$

$$s[k] = s(t) \times iii(kt_s)$$

$$s(t) \cdot iii(t) \xleftrightarrow{F\{}} S(f) * III(f)$$



Discrete Fourier Transform - DFT

- A DFT é definida por

Análise

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

Síntese

$$s[k] = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$$

- Resolução na frequência

Freq. de análise f_m

$$f_m = \frac{m \cdot f_s}{N}, m = 0, 1, 2, \dots, N-1$$



“Cestos” DFT localizados nas freq. de análise



DFT – como se existissem N filtros passabanda centrados em f_m

- Domínios do tempo e da frequência discretos.
- Forma similar à DFS mas para sinais não periódicos: algoritmicamente o sinal é tratado como periódico com período N.

Discrete Fourier Transform - Espectro

- Espectro da Transformada Discreta de Fourier

$$S_n = c_n = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{-j \frac{2\pi n k}{N} t_s}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N t_s} = \frac{1}{T_t}$

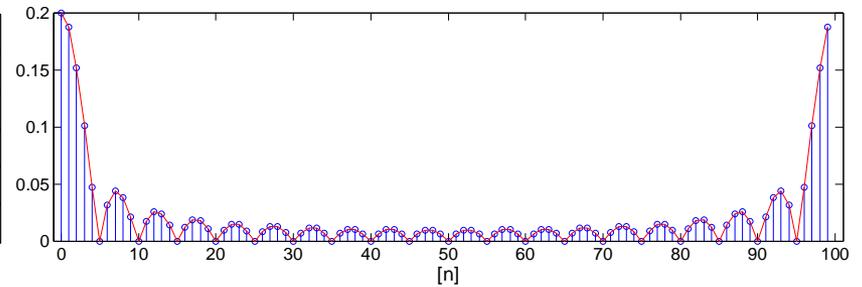
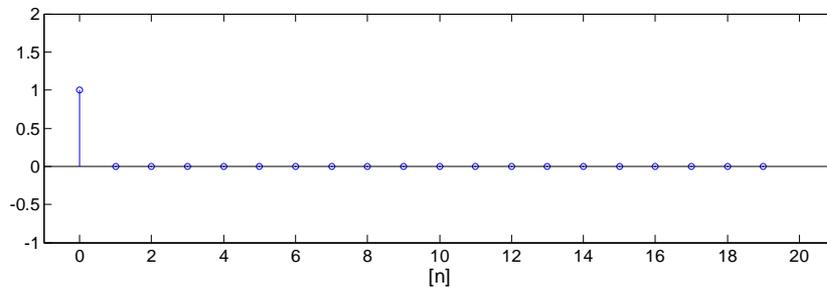
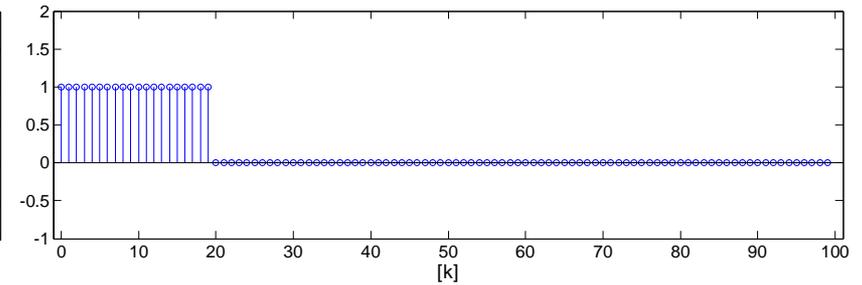
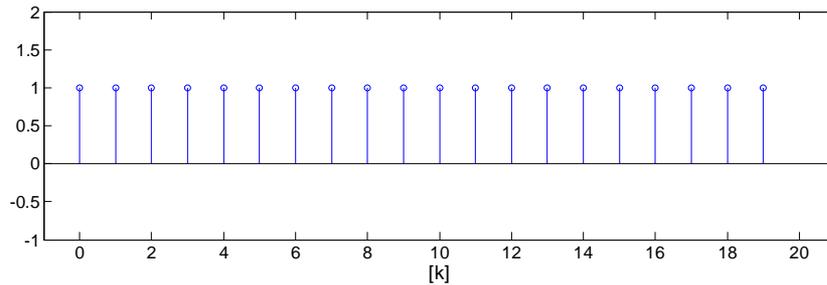
← $n \Delta f$

kt_s → $t_s = \frac{1}{f_s}$

- N é o número de amostras (total) na série temporal.
- T é a duração, em segundos, da série temporal.
- f_s é a freq. de amostragem em amostras/segundo (Hz) or (Aps).
- Δf é a resolução em frequência ou espaçamento entre "cestos" consecutivos (Hz).
- Para um número de pontos potência de 2, existe um algoritmo extremamente eficiente que explora a simetria, a FFT.

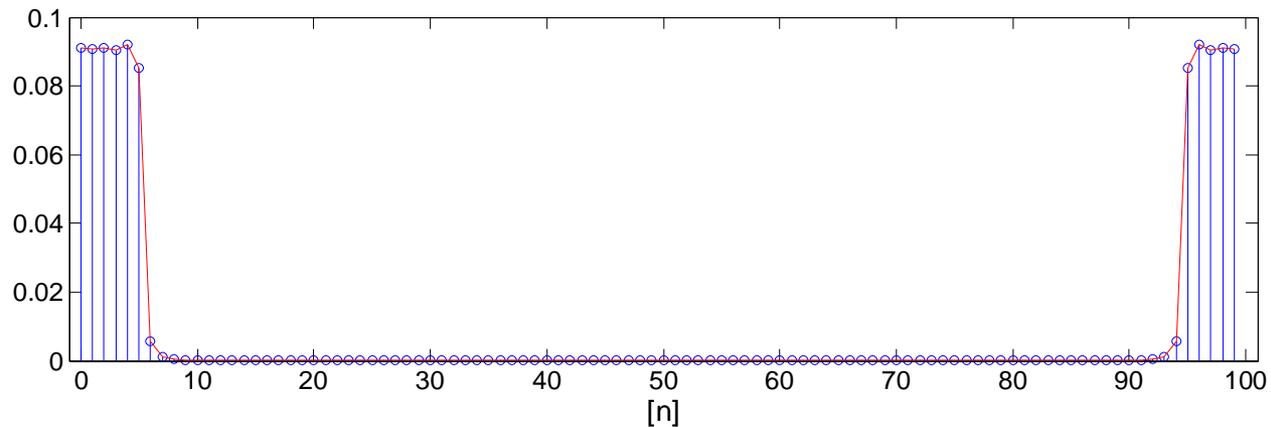
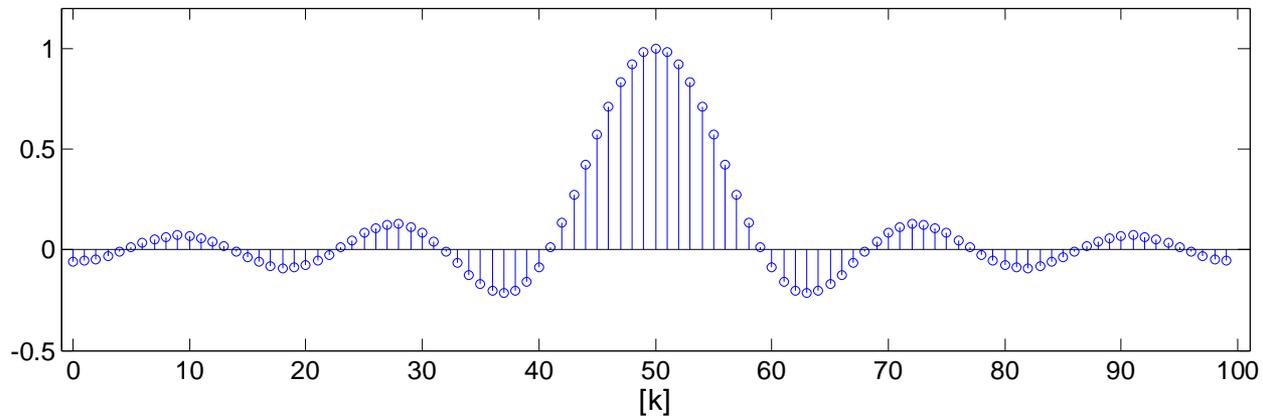
Discrete Fourier Transform - Exemplos

- Exemplos da DFT: onda rectangular.



Discrete Fourier Transform - Exemplos

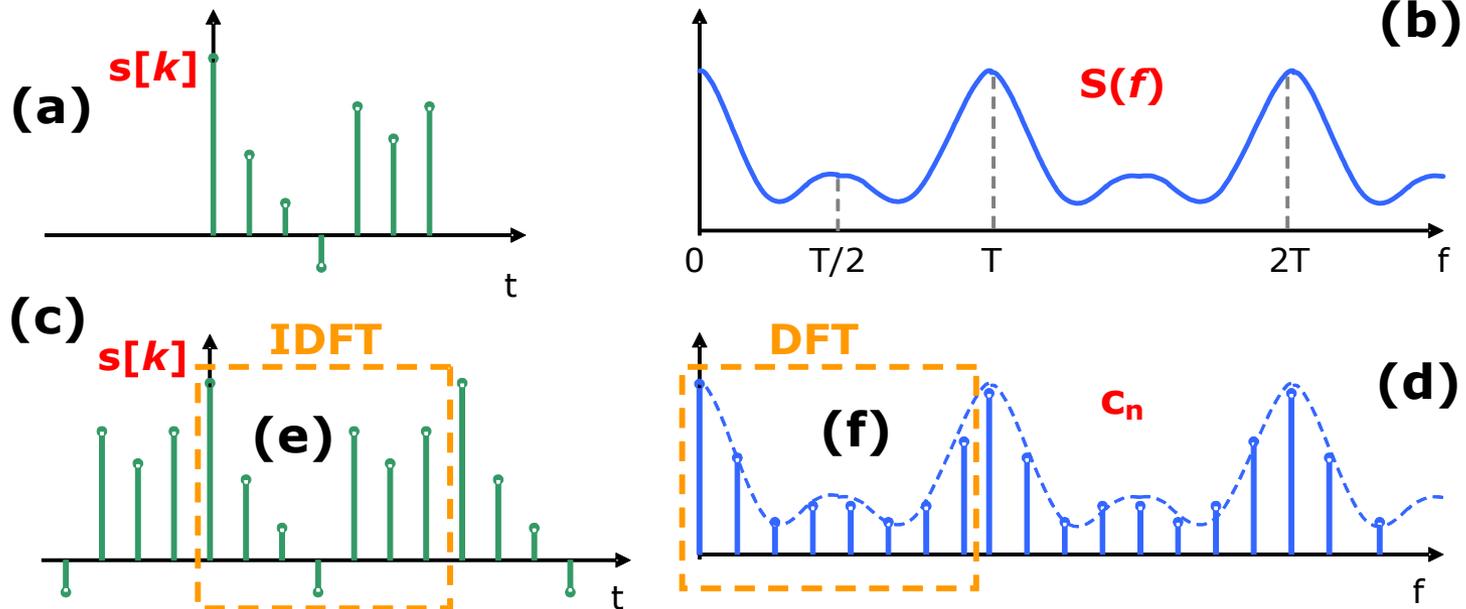
- Exemplos da DFT: sinc.



Discrete Fourier Transform - Propriedades

	$s[k]$	$S[n]$
1. Linearidade	$a \cdot s_1[k] + b \cdot s_2[k]$	$aS_1[n] + bS_2[n]$
2. Multiplicação	$s_1[k] \cdot s_2[k]$	$\frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} S_1[h] S_2[n-h]$
3. Convolução	$\sum_{m=0}^{N-1} s_1[m] \cdot s_2[k-m]$	$S_1[k] S_2[k]$
4. Desl. no tempo	$s[k-m]$	$e^{-j \frac{2\pi n \cdot m}{T}} \cdot S(n)$
5. Desl. na frequência	$e^{+j \frac{2\pi h t}{T}} \cdot s[k]$	$S[n-h]$
6. Correlação	$\sum_{m=0}^{N-1} s_1[m] \cdot s_2[k+m]$	$S_1^*[k] S_2[k]$

DFT – DFS – DTFT



- (a) Sinal discreto não periódico. (b) DTFT transform.
- (c) Versão periódica de (a). (d) DFS coefficients – samples of (b)
- (e) Estimativa da DFT inversa de um único período de $s[k]$.
- (f) Estimativa da DFT de um único período de (d).

Distorção Harmónica

- Qualquer circuito de amplificação introduz não linearidades que devem ser conhecidas e acondicionadas, de outra forma constituem erro grosseiro.
- Para uma entrada sinusoidal pura, a existência de não linearidades resultam no aparecimento de harmónicas na saída..
- Este resultado tem sido extensamente utilizado como métrica de não linearidades num sistema, nomeadamente em amplificadores comerciais.
- Distorção harmónica é o rácio entre a amplitude eficaz da fundamental e a amplitude eficaz do sinal sem a fundamental,

$$THD_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left(\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} c_n^2} \cdot \frac{1}{c_1} \right)$$

Bibliography

- Eric W. Weisstein, from MathWorld, A Wolfram Web Resource
 - Fourier Series
 - <http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html>
 - Fourier Series-Triangle Wave
 - <http://mathworld.wolfram.com/FourierSeriesTriangleWave.html>
 - Fourier Transform
 - <http://mathworld.wolfram.com/FourierTransform.html>
- Paul Falstad, Fourier Series Simulation
 - <http://www.falstad.com/fourier/>
- eFunda, Fourier Series
 - http://www.efunda.com/math/fourier_series/fourier_series.cf