Exemplo 1- Deduza a fórmula de comprimento a partir das transformações de Lorentz. Faça esta dedução para uma barra em repouso no sistema de referência indicado como linha.

$$L' = L_0 = x_2' - x_1' = \Delta x'$$

$$\Delta x' = \gamma\left[\left(x_2 - x_1\right) - V\left(t_2 - t_1\right)\right]$$

Será necessário medidas simultâneas de x_2 e x_1, por isso temos $t_2 = t_1$

$$x_2 - x_1 = L$$

$$L_0 = \gamma L$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

Aplicações

Contração de Lorentz e simultaneidade

Exemplo 2

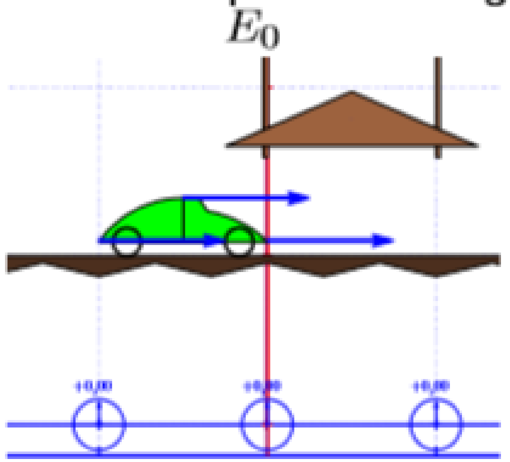
- Um fusca se move numa estrada reta com velocidade $u = \beta c$ e se aproxima de uma garagem. O comprimento da garagem, L_{g}, é igual ao do fusca em movimento.
- Vamos descrever a passagem do fusca pela garagem em dois referenciais:
  - T: referencial da estrada
  - F: referencial que se move em relação à estrada com a mesma velocidade do fusca.
- Para isso, vamos identificar três eventos:

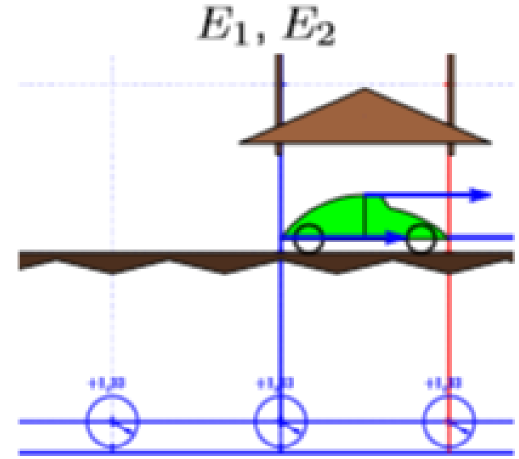
E_0: a frente do fusca coincide com a entrada da garagem
E_1: a frente do fusca coincide com o fundo da garagem
E_2: a traseira do fusca coincide com a entrada da garagem

Aplicações

Fusca passa pela garagem

- Referencial T: comprimento da garagem $L_{g0} = L$





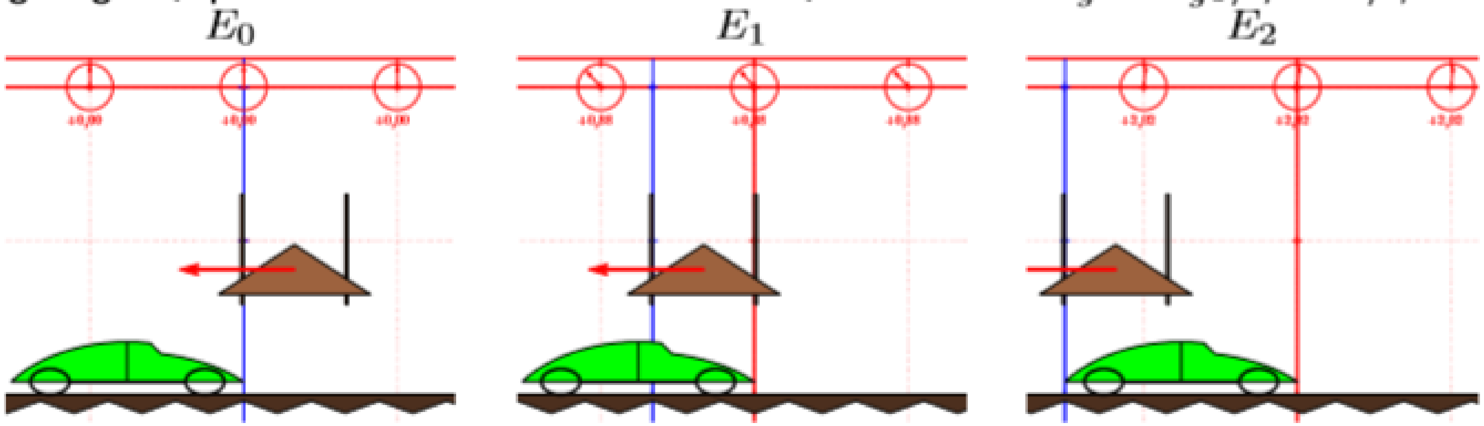
$$
\begin{aligned}
E_0 &: \; (x_0, t_0) \\
E_1 &: \; \Delta x_1 = x_1 - x_0 = L_{g0} = L, \\
&\quad\; \Delta t_1 = t_1 - t_0 = \tfrac{L}{u} \\
E_2 &: \; \Delta x_2 = x_2 - x_0 = 0, \\
&\quad\; \Delta t_2 = t_2 - t_0 = \tfrac{L}{u} = \Delta t_1
\end{aligned}
$$

- No referencial T, os eventos E_1 e E_2 são simultâneos ($\Delta t_1 = \Delta t_2$).
- Note que Δt_2 é um intervalo de tempo próprio ($\Delta x_2 = 0$)

Aplicações

Fusca passa pela garagem

- Referencial F: velocidade em relação a T é $V = u$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$
- O fusca está em repouso neste referencial e seu comprimento é $L_0 = \gamma L$. O comprimento da garagem, que se move com velocidade $-u$, é contraído $L_g = L_{g0}/\gamma = L/\gamma$.



E_0: (x'_0, t'_0)

E_1: $\Delta x'_1 = x'_1 - x'_0 = 0$,

$\Delta t'_1 = t'_1 - t'_0 = \frac{L_g}{u} = \frac{L}{\gamma u}$

E_2: $x'_2 = x'_2 - x'_0 = -L_0 = -\gamma L$,

$\Delta t'_2 = t'_2 - t'_0 = \frac{L_0}{u} = \frac{\gamma L}{u}$

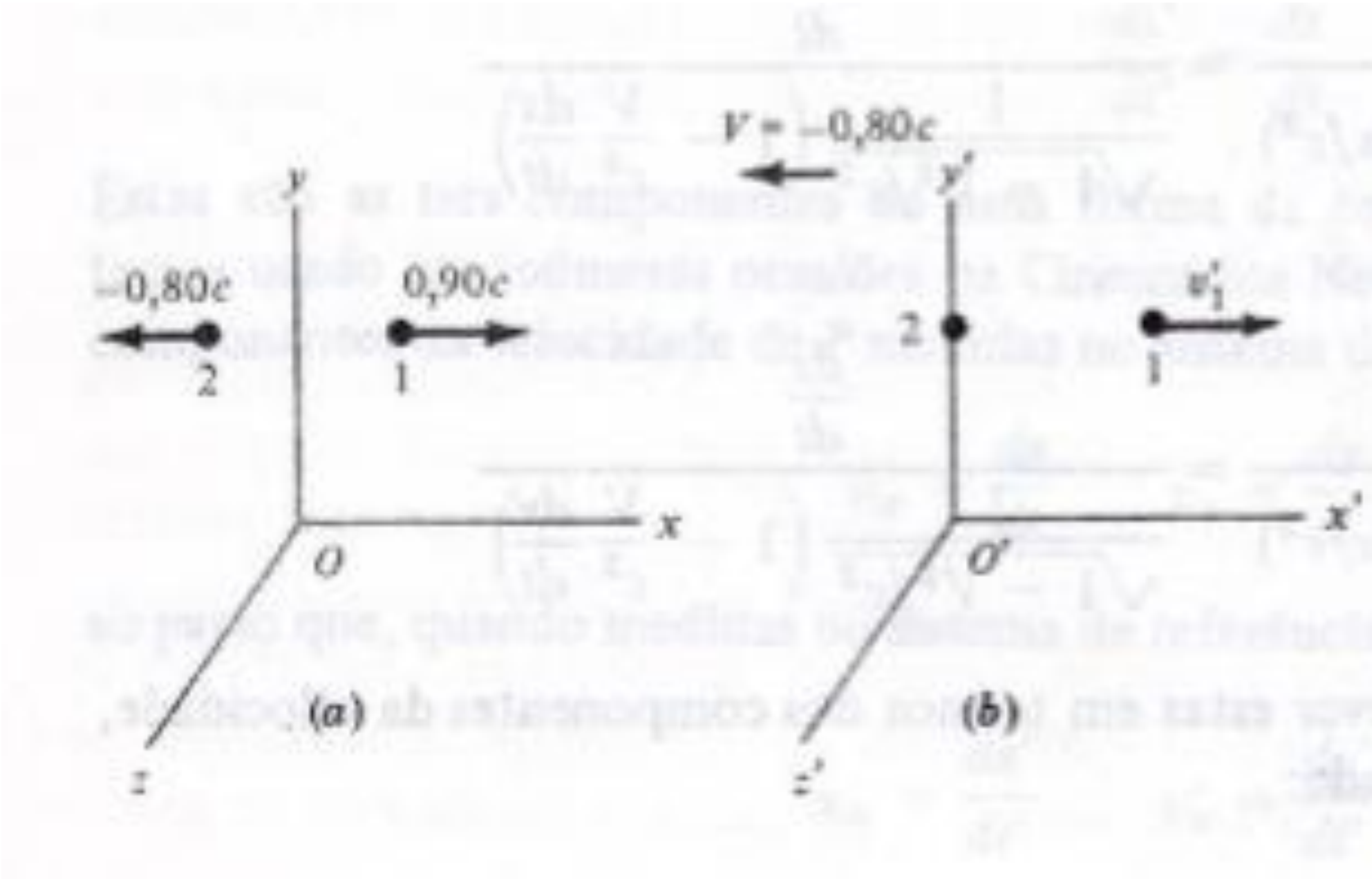
- Note que $\Delta t'_1$ é um intervalo de tempo próprio ($\Delta x'_1 = 0$).
- Neste referencial, os eventos E_1 e E_2 não são simultâneos. E_2 ocorre depois de E_1. O intervalo de tempo entre eles é $t'_2 - t'_1 = \frac{u}{c^2}\gamma L$.

http://fmt.if.usp.br/~bindilat/FisicaII/video.php?fname=fuscanagaragem

Exemplo 3- Imagina que você tem uma lanterna parada em O e considere que a velocidade deste feixe de luz esteja sendo medido por dois observadores em O e O’. O observador O’ está se movendo em relação a O na mesma direção que o feixe de luz e com a metade da velocidade da luz. Segundo o postulado de Einstein, ambos os observadores medem o mesmo valor c para a velocidade do feixe. Mostre que a transformação da velocidade de lorentz leva a uma afirmação idêntica.

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}} = \frac{c - c/2}{1 - \frac{(c/2)c}{c^2}} = \frac{c/2}{1/2} = c$$

Exemplo 4- Duas partículas estão se movendo em sentidos opostos ao longo do eixo x do Sistema de referência x, y, z, conforme ilustrado na figura abaixo.
A velocidade da partícula 1 é v1=0,90 c, e a da partícula 2 é v2=-0,80 c, relativa a este sistema de referência. Qual é a velocidade da partícula 1 relativa à partícula 2?



Efeito Doppler para a luz

- Considere uma onda eletromagnética plana senoidal se propagando no vácuo no referencial em que a fonte se encontra em repouso (S). Ela pode ser descrita na forma

$$f(\mathbf{r},t) = A\cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t),$$

onde

$$\mathbf{k}_0 = k_{0x}\,\hat{x} + k_{0y}\,\hat{y} + k_{0z}\,\hat{z},$$

o vetor de onda, aponta na direção de propagação e seu módulo está relacionado com a frequência angular por

$$k_0 = |\mathbf{k}_0| = \frac{\omega_0}{c}.$$

- Num referencial S' que se move com velocidade $\mathbf{V} = V\,\hat{x}$ em relação a S, ela será representada por uma função da forma

$$f(\mathbf{r}',t') = A'\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega t') = f(\mathbf{r},t),$$

em que $\mathbf{r}'$ e t' estão relacionados com $\mathbf{r}$ e t pelas transformações de Lorentz.

Efeito Doppler para a luz

- Vamos nos ocupar apenas do argumento do cosseno, a fase das funções:

$$\begin{aligned}\phi'(\mathbf{r}',t') &= \phi(\mathbf{r},t) \\ &= \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t \\ &= k_{0x}x + k_{0y}y + k_{0z}z - \omega_0 t\end{aligned}$$

- Usando as transformações de Lorentz (12d)

$$\begin{aligned}\phi'(\mathbf{r}',t') &= k_{0x}\gamma\left(x' + \beta ct'\right) + k_{0y}y' + k_{0z}z' - \frac{\omega_0}{c}\gamma\left(ct' + \beta x'\right) \\ &= \gamma\left(k_{0x} - \beta\frac{\omega_0}{c}\right)x' + k_{0y}y' + k_{0z}z' - \gamma\left(\frac{\omega_0}{c} - \beta k_{0x}\right)ct'\end{aligned}$$

- Que resulta em

$$\begin{aligned}k_x &= \gamma\left(k_{0x} - \beta\frac{\omega_0}{c}\right) \\ k_y &= k_{0y}, \quad k_z = k_{0z} \\ \frac{\omega}{c} &= \gamma\left(\frac{\omega_0}{c} - \beta k_{0x}\right).\end{aligned}$$

- Observe que as componentes de $\mathbf{k}$ e ω/c se transformam exatamente como as componentes de $\mathbf{r}$ e ct.

Efeito Doppler para a luz

- Vamos fazer $k_{0x} = k_0 \cos\theta_0$, $k_{0y} = k_0 \operatorname{sen}\theta_0$ e $k_{0z} = 0$. Assim θ é o ângulo que a direção de propagação da onda faz com o eixo x no referencial da fonte S.
- Com isso, e com $k_0 = \omega_0/c$, podemos escrever as equações anteriores como

$$\begin{aligned} k_x &= \gamma k_0 \left(\cos\theta_0 - \beta\right) \\ k_y &= k_0 \operatorname{sen}\theta_0 \\ \omega &= \omega_0 \gamma \left(1 - \beta\cos\theta_0\right). \end{aligned}$$

- Pode-se verificar facilmente que

$$k = |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c},$$

de acordo com o fato de que esta é uma onda eletromagnética que se propaga com velocidade c.
- A direção de propagação no referencial S' faz um ângulo θ com o eixo x' que é dada por

$$\cos\theta = \frac{k_x}{k} = \frac{\cos\theta_0 - \beta}{1 - \beta\cos\theta_0}$$

- Resolvendo para $\cos\theta_0$, obtemos

$$\cos\theta_0 = \frac{k_x}{k} = \frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta\cos\theta}$$

Efeito Doppler para a luz

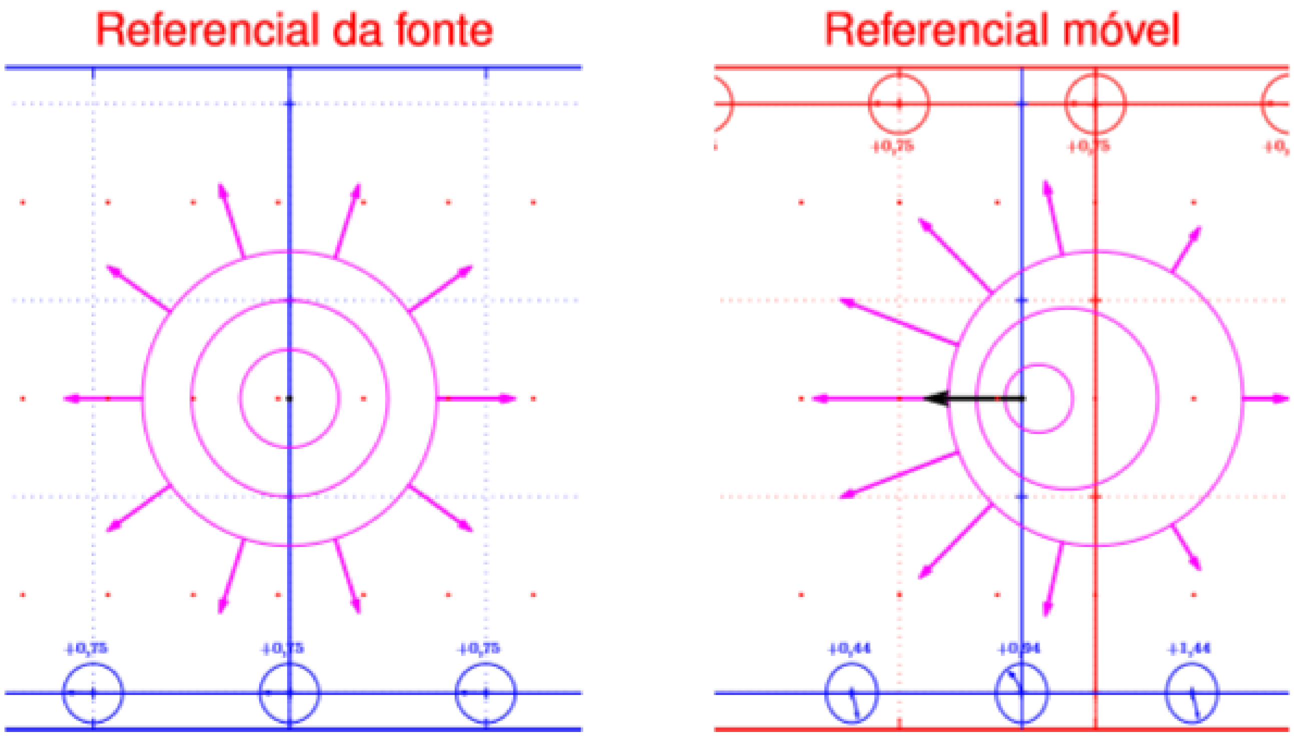
- Finalmente, podemos expressar a frequência da onda no referencial S' em função do ângulo θ como observado neste mesmo referencial.

$$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma\,(1+\beta\cos\theta)} \tag{14}$$

- Note que a velocidade da fonte neste referencial é $V'_S = -\beta c$.
- Casos especiais:

1. $\theta = 0, \cos\theta = 1$, fonte se afastando: $$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma\,(1+\beta)} = \omega_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$
2. $\theta = \pi, \cos\theta = -1$, fonte se aproximando: $$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma\,(1-\beta)} = \omega_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$
3. $\theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2, \cos\theta = 0$,
   efeito Doppler transversal: $$\omega = \frac{\omega_0}{\gamma\,(1-0)} = \frac{1}{\gamma}\omega_0$$

Exemplo para $V = 0{,}5\,c$. Neste vídeo o efeito Doppler é mostrado para uma onda esférica. Os círculos que se expandem representam frentes de onda: pontos do espaço de fase constante. As setas magenta representam o vetor de onda (cujo módulo é proporcional à frequência) e a seta preta a velocidade da fonte.



http://fmt.if.usp.br/~bindilat/FisicaII/video.php?fname=doppler

app mathematica\DopplerEffect.cdf