LENTES

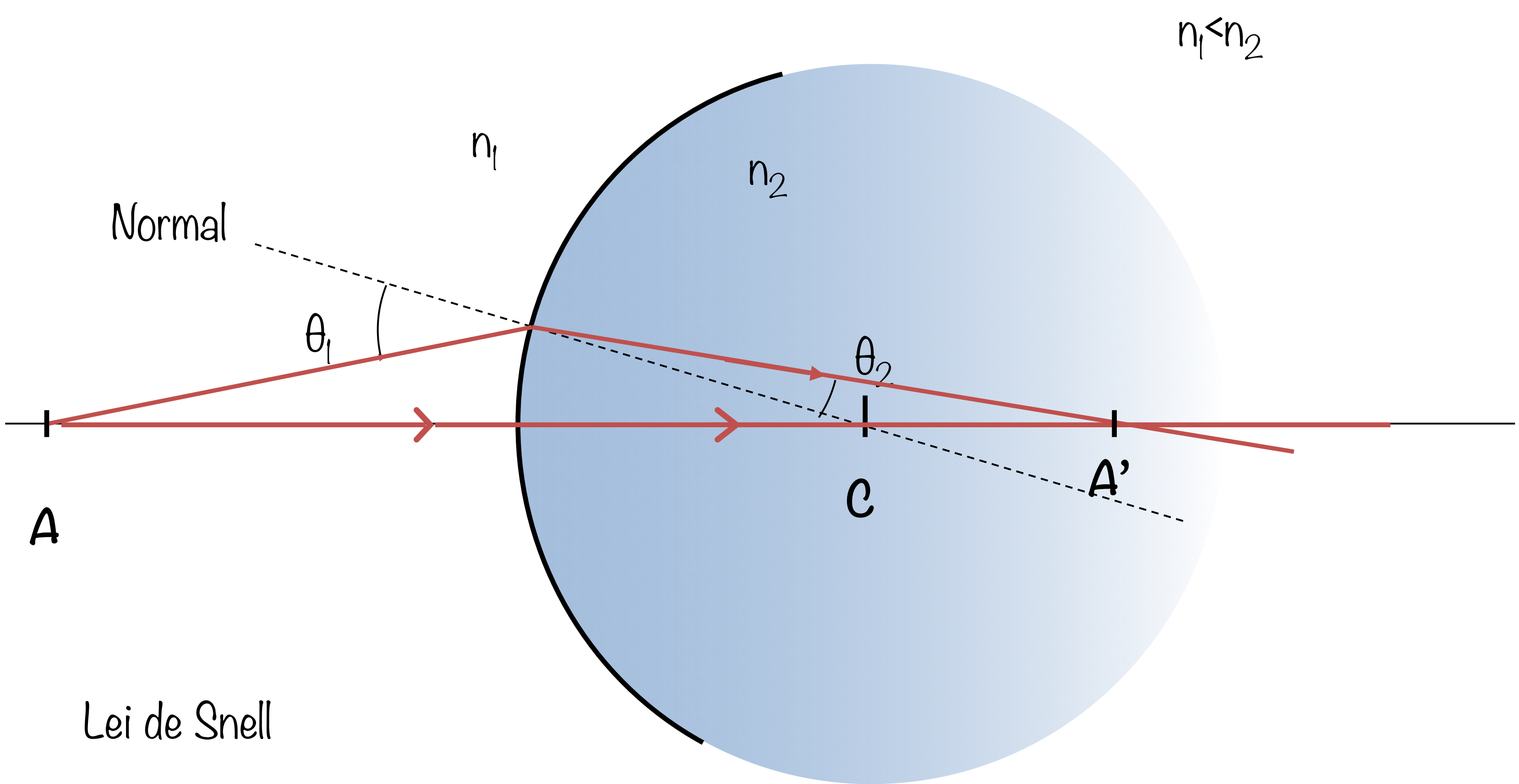
Refração em uma superfície esférica

- convenção de sinais
- aproximação paraxial
- equação do dioptro simples

Lentes

- tipos de lentes, propriedades,
- convenção de sinais, aproximação das lentes finas
- construção da imagem por método gráfico
- equação das lentes
- equação dos fabricantes
- aplicações

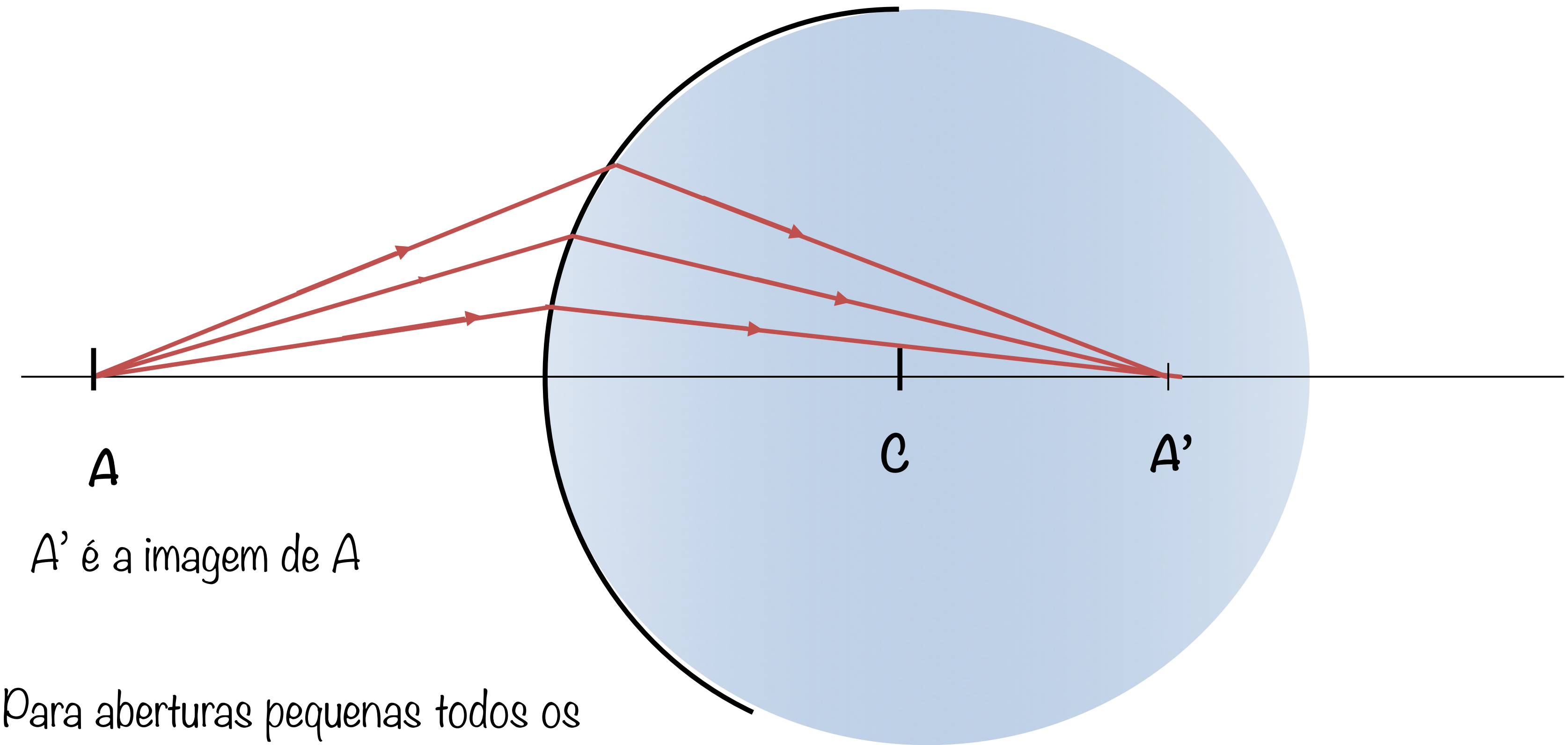
Refração em uma superfície esférica



Lei de Snell

$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$

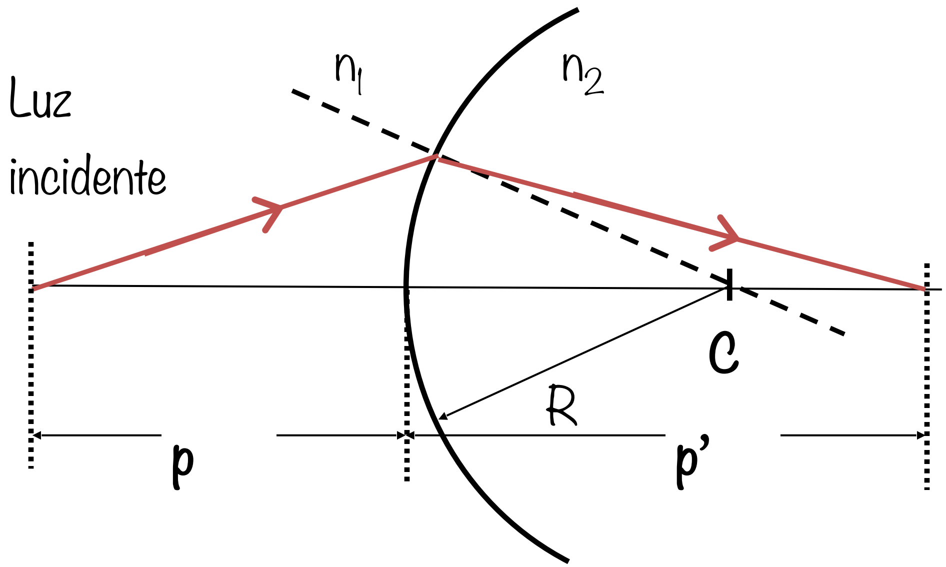
Formação de imagem – superfície esférica



A' é a imagem de A

Para aberturas pequenas todos os raios que partem de A, se cruzam em A'.

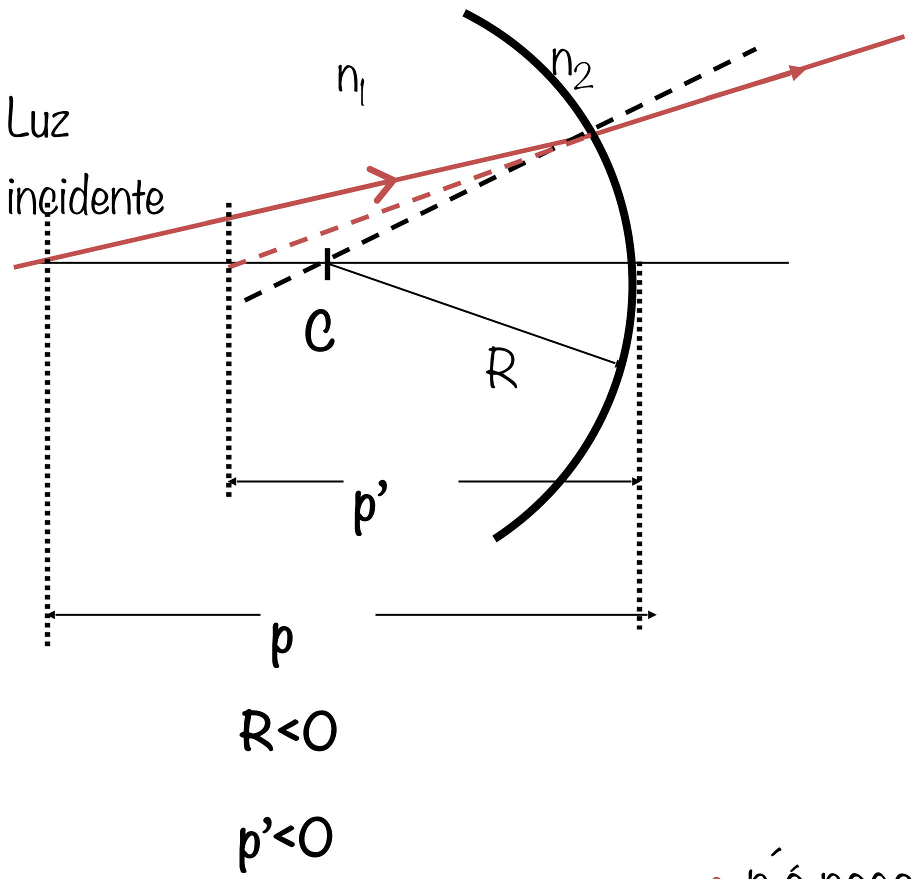
Convenção de sinais



R>0

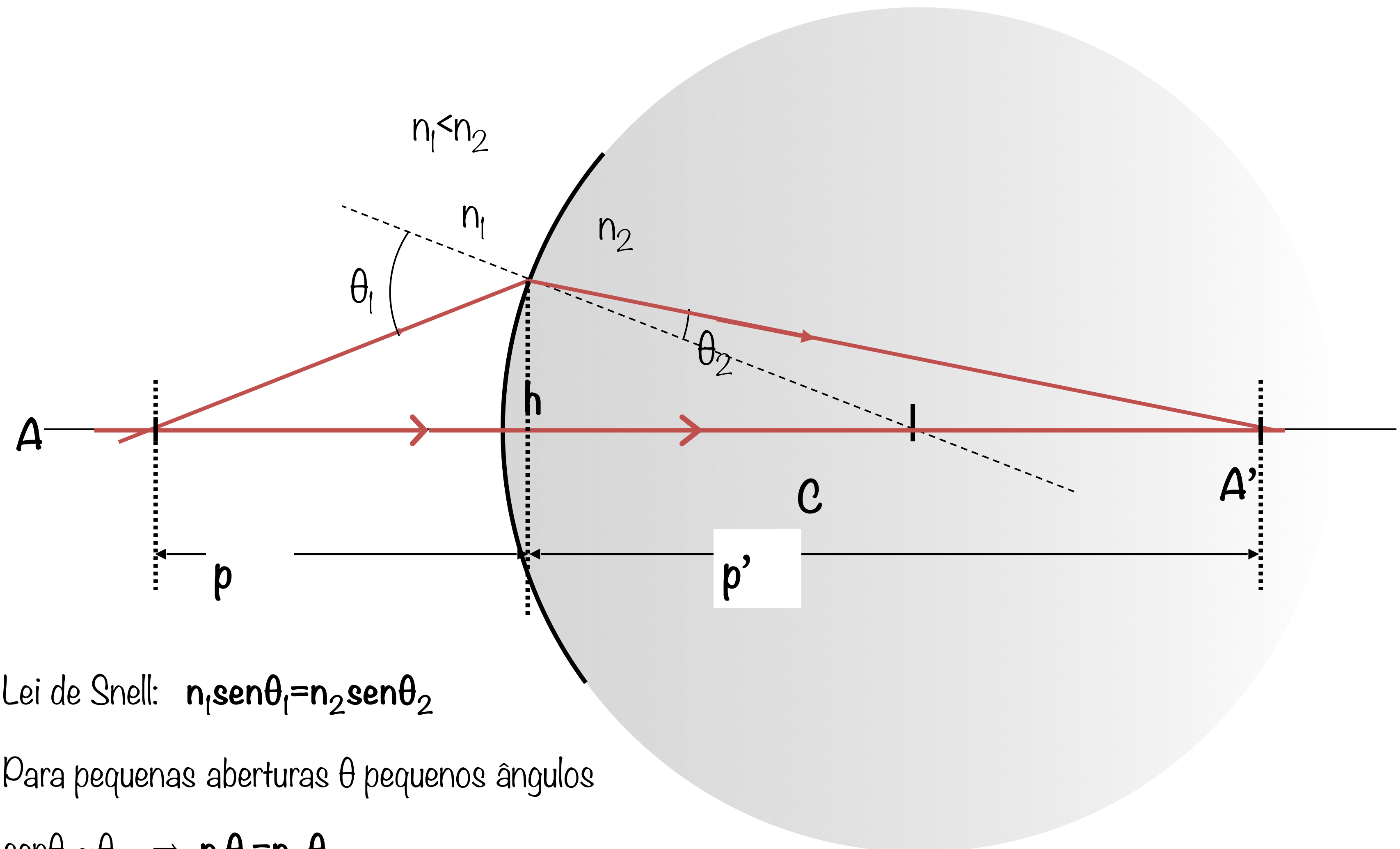
p' >0

- p´ é positivo se estiver do mesmo lado dos raios emergentes
- R é positivo se estiver do mesmo lado dos raios emergentes



- p´é negativo se estiver do lado oposto do dos raios emergentes
- R é negativo se estiver do lado oposto dos raios emergentes

Aproximação para pequenas aberturas

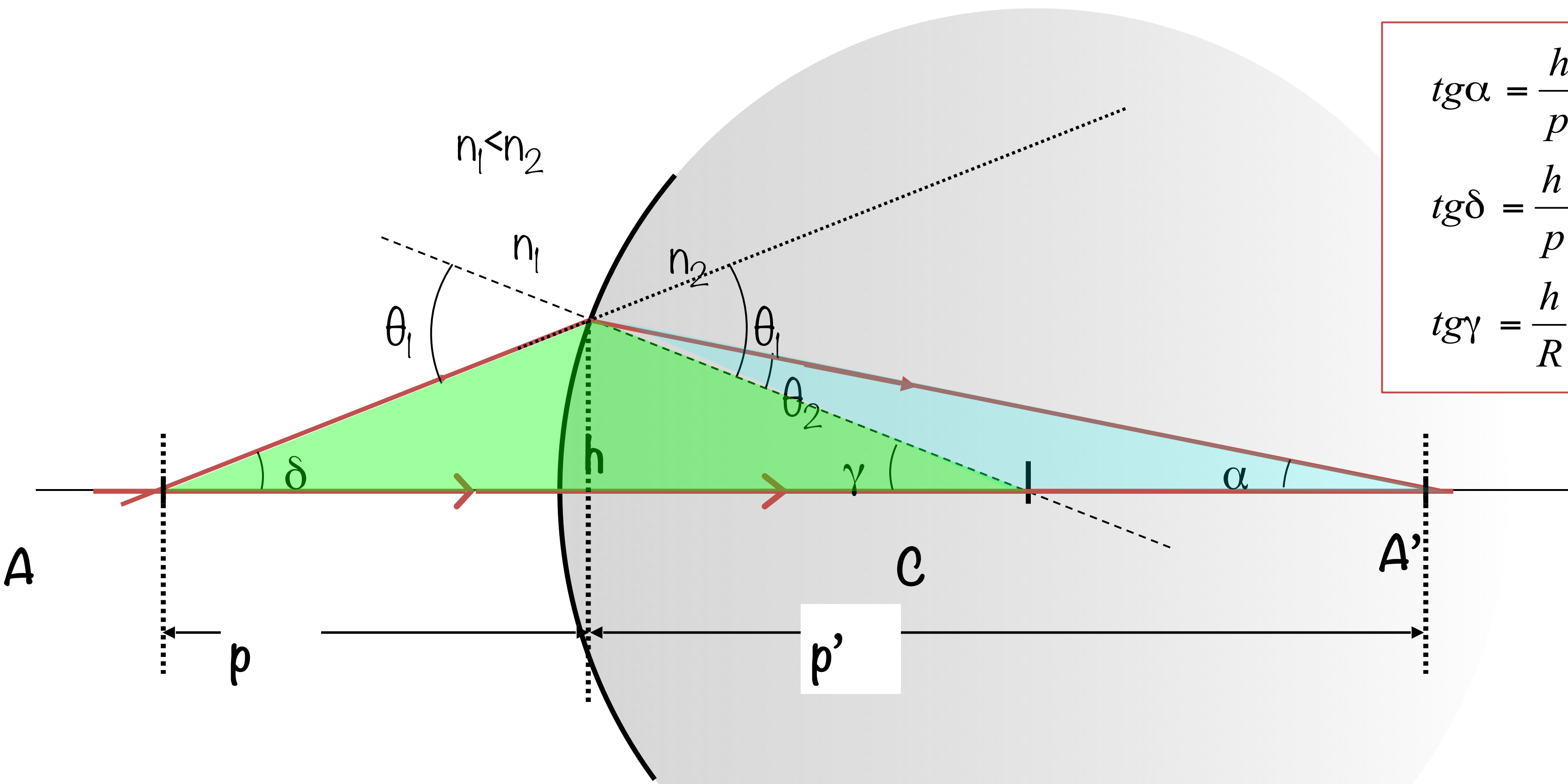


Lei de Snell: $\mathbf{n_1 sen\theta_1 = n_2 sen\theta_2}$

Para pequenas aberturas θ pequenos ângulos

$sen\theta \cong \theta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n_1\theta_1 = n_2\theta_2}$

Aproximação para pequenas aberturas



$$tg\alpha = \frac{h}{p'} \approx \alpha$$

$$tg\delta = \frac{h}{p} \approx \delta$$

$$tg\gamma = \frac{h}{R} \approx \gamma$$

O ângulo externo de um triângulo é igual a soma dos ângulos internos adjacentes ao lado oposto.

$\delta+\gamma=\theta_1$

$\theta_2+\alpha=\gamma$

Aproximação para pequenas aberturas

$$tg\alpha = \frac{h}{p'} \approx \alpha$$

$$tg\delta = \frac{h}{p} \approx \delta$$

$$tg\gamma = \frac{h}{R} \approx \gamma$$

$\delta+\gamma=\theta_1$ (1)

$\theta_2+\alpha=\gamma$ (2)

$n_1\theta_1=n_2\theta_2$ (3)

Obter uma equação que relacione a posição do objeto (p) a posição da imagem (p') e o raio da superfície esférica que delimita os meios de índices n_2 e n_1.

Combinando (1), (2) e (3) temos:

$$\theta_2 = \frac{n_1\theta_1}{n_2} \Rightarrow \frac{n_1\theta_1}{n_2} + \alpha = \gamma$$

$$\frac{n_1}{n_2}(\delta+\gamma)+\alpha = \gamma$$

$$\frac{n_1}{n_2}\delta + \frac{n_1}{n_2}\gamma + \alpha = \gamma$$

Substituindo α, δ, e γ:

$$\frac{n_1}{n_2}\frac{h}{p} + \frac{n_1}{n_2}\frac{h}{R} + \frac{h}{p'} = \frac{h}{R}$$

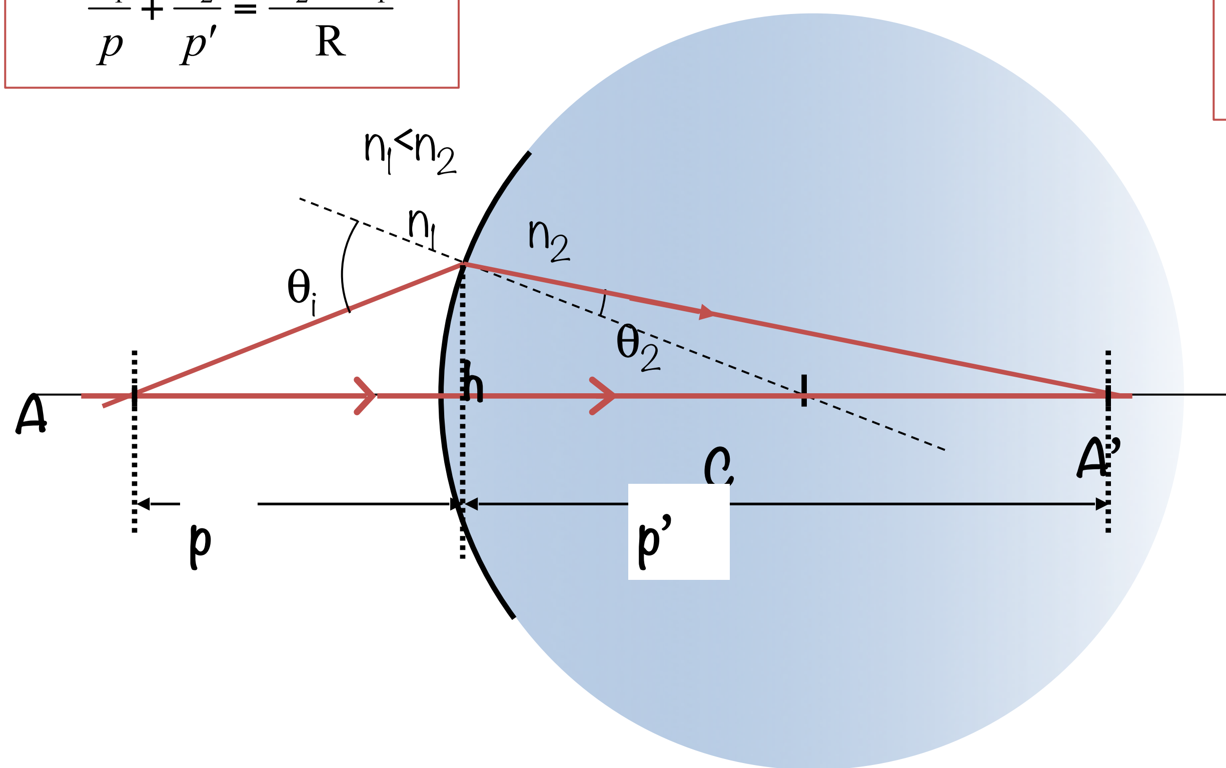
$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Equação de um dioptro simples

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

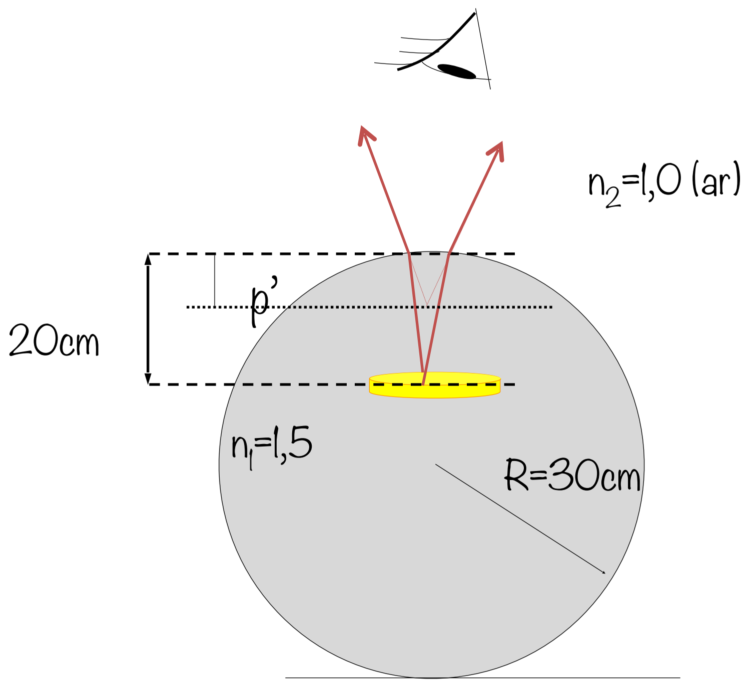
Aumento transversal:

$$M = -\frac{n_1}{n_2}\frac{p'}{p}$$



Exemplo 1

Uma moeda de 2cm de diâmetro está embutida em uma bola maciça de plástico de 30cm de raio. O índice de refração do plástico da bola é 1,5 e a moeda está a 20cm da superfície. Achar a posição e a altura da imagem.



O objeto está no meio com índice n_1=1,5. O meio exterior é o ar, com índice n_2=1,0 e o raio da superfície é negativo; R=-30cm.

substituindo os dados na equação abaixo

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\frac{1,5}{20cm} + \frac{1,0}{p'} = \frac{1,0 - 1,5}{(-30cm)}$$

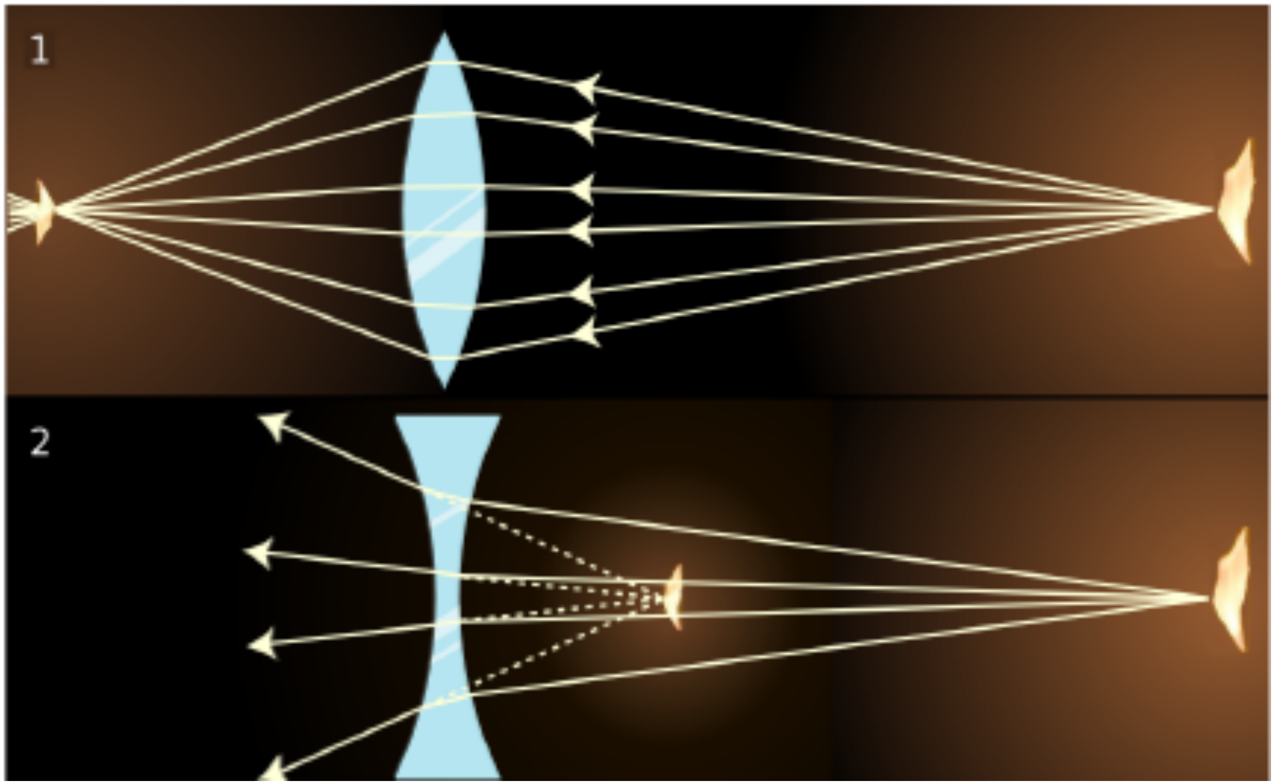
$$p' = -17,1cm$$

Imagem virtual , p'<0

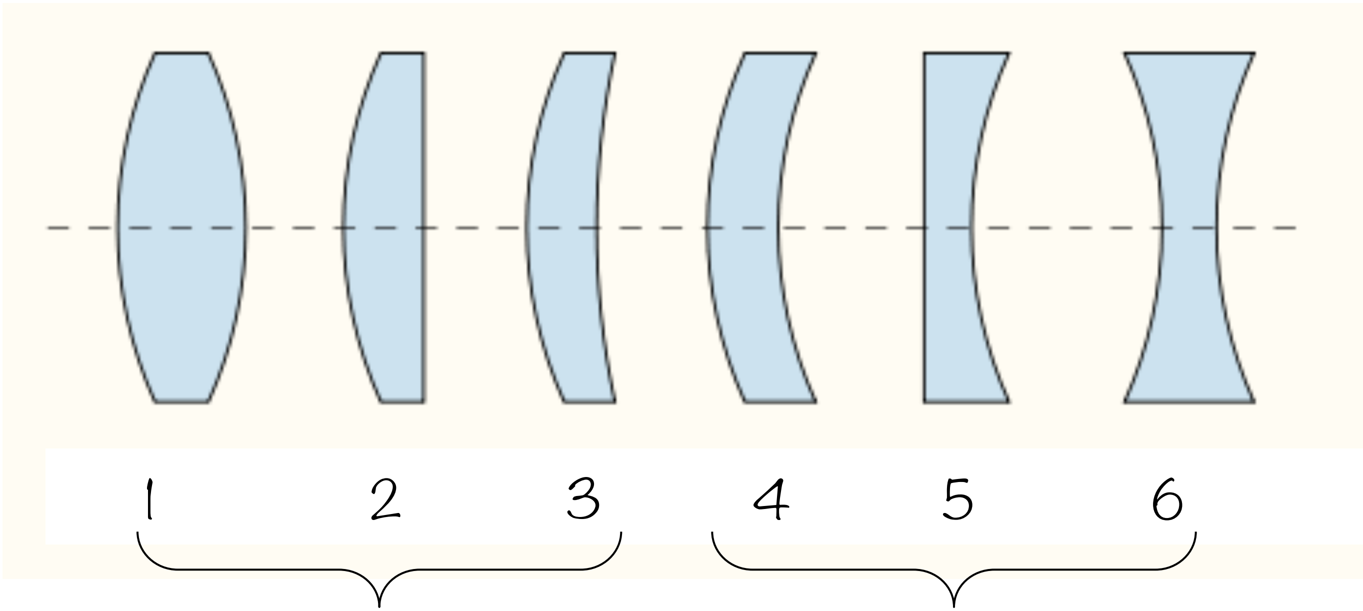
Aumento: $$M = -\frac{1,5}{1,0}\frac{(-17,1cm)}{(20cm)} = 1,28$$

$$h' = M(2cm) = 2,6cm$$

Lentes



Tipos de lentes



Convergentes

1- biconvexa

2- plano convexa

3- menisco

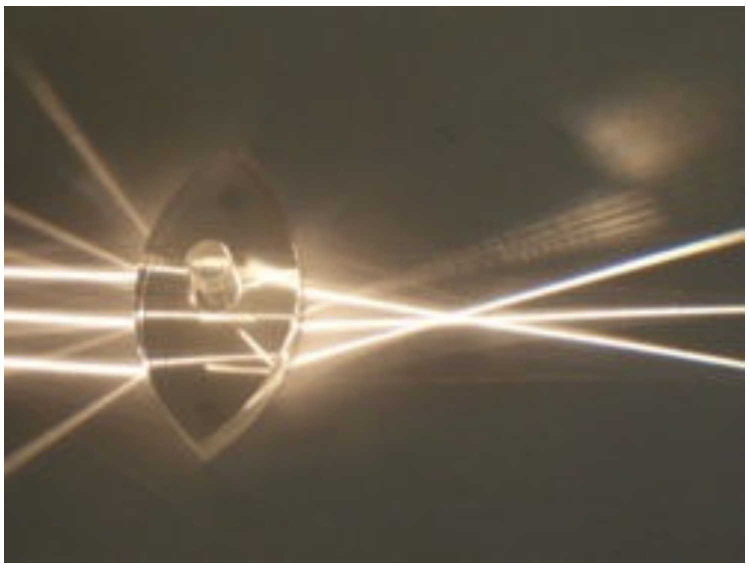
Divergentes

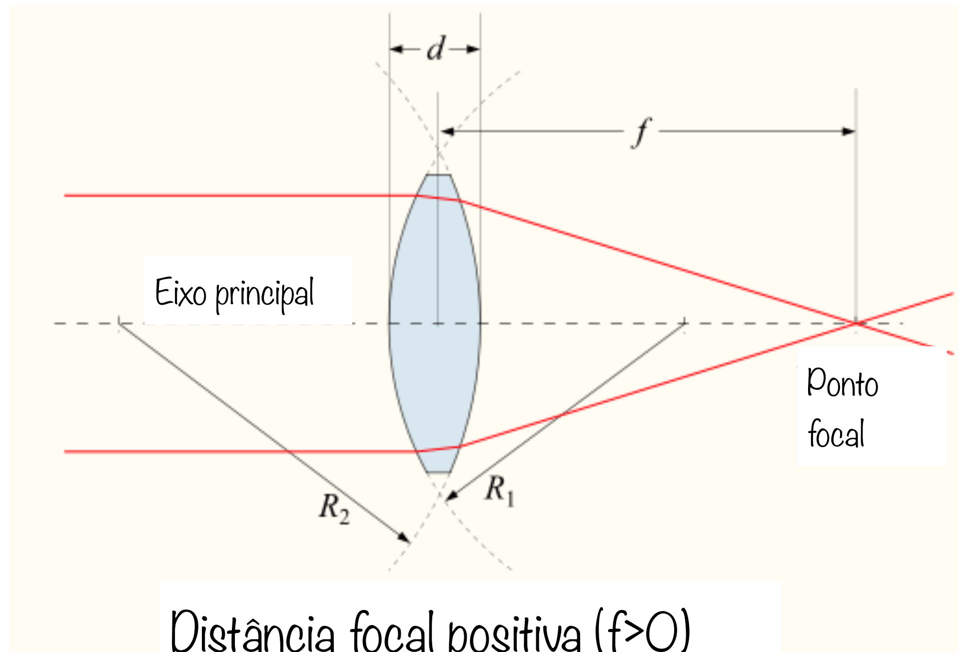
4- menisco

5- plano concava

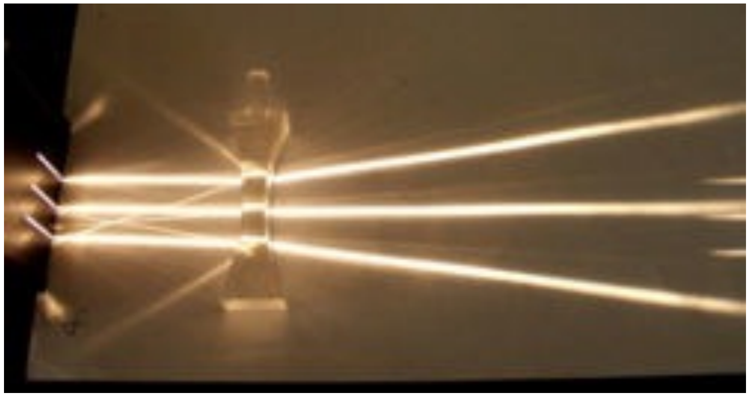
6- bicôncava

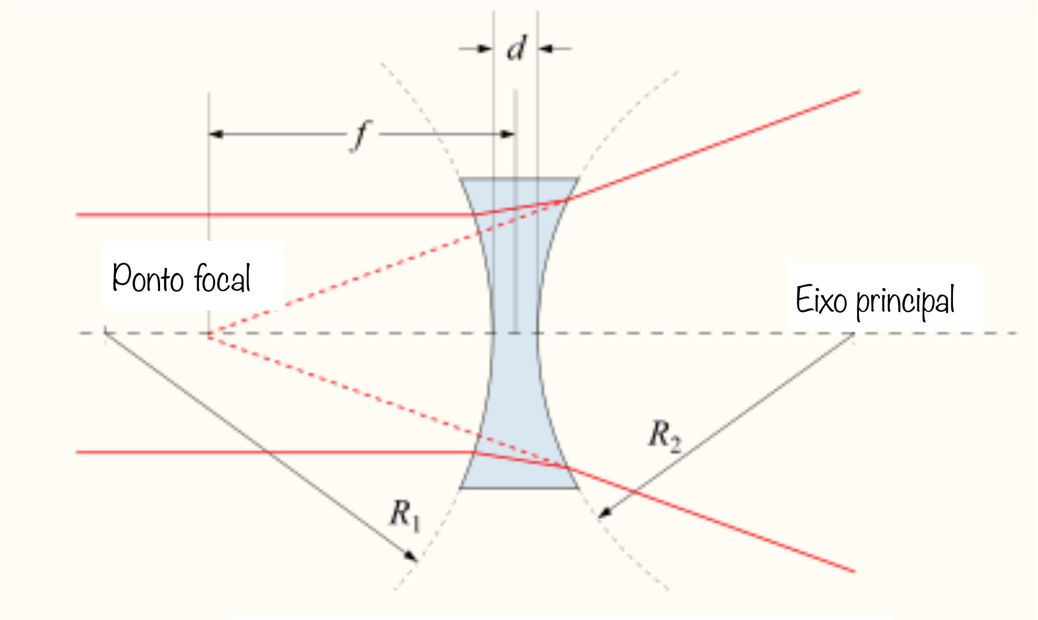
Propriedades das lentes convergentes





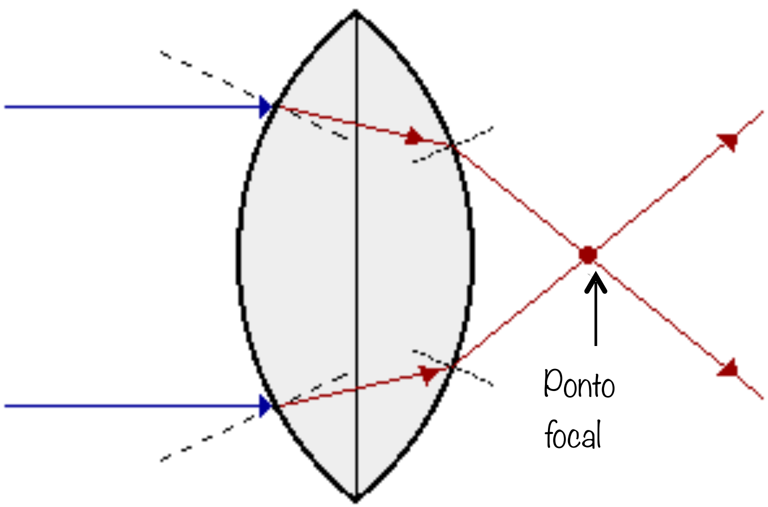
Propriedades das lentes divergentes

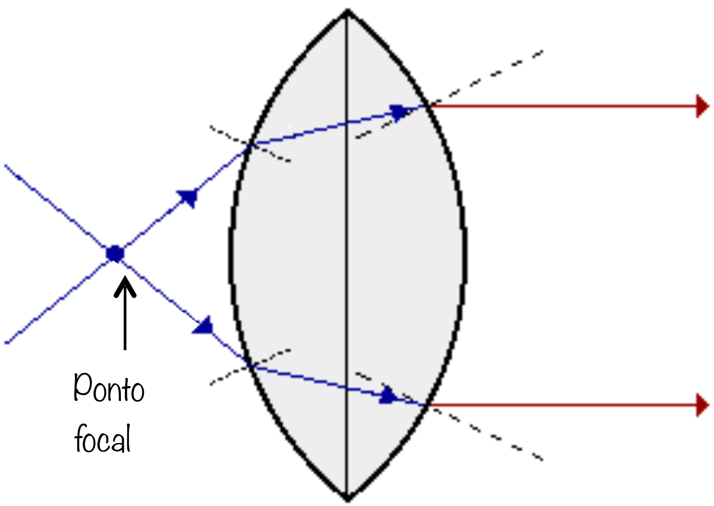




Distância focal negativa (f<0)

Refração em uma lente convergente

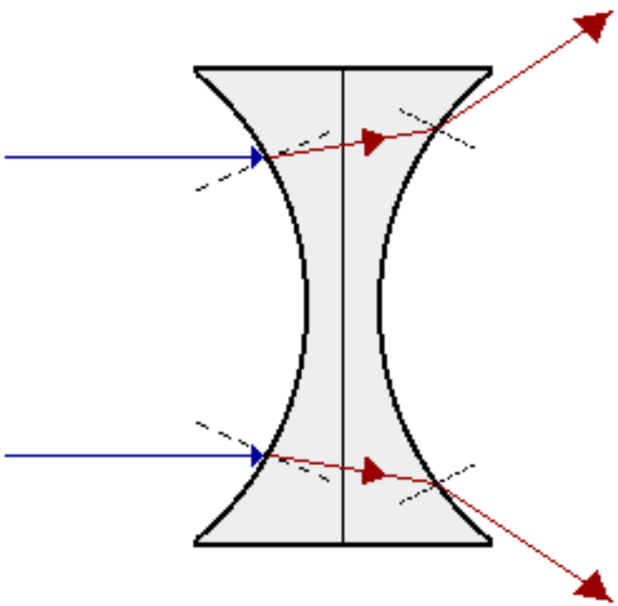




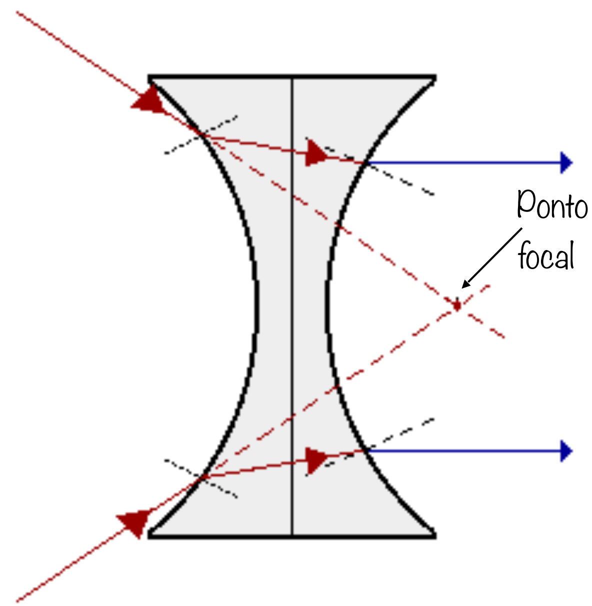
Os raios que se propagam paralelos ao eixo principal, são refratados pela lente e convergem para o ponto focal

Os raios que passam pelo ponto focal , são refratados pela lente e passam a se propagar paralelos ao eixo principal

Refração em uma lente divergente

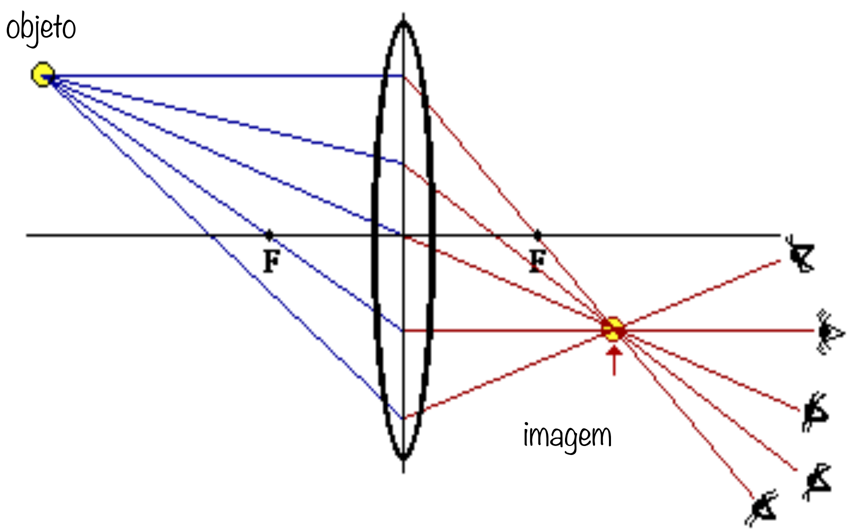


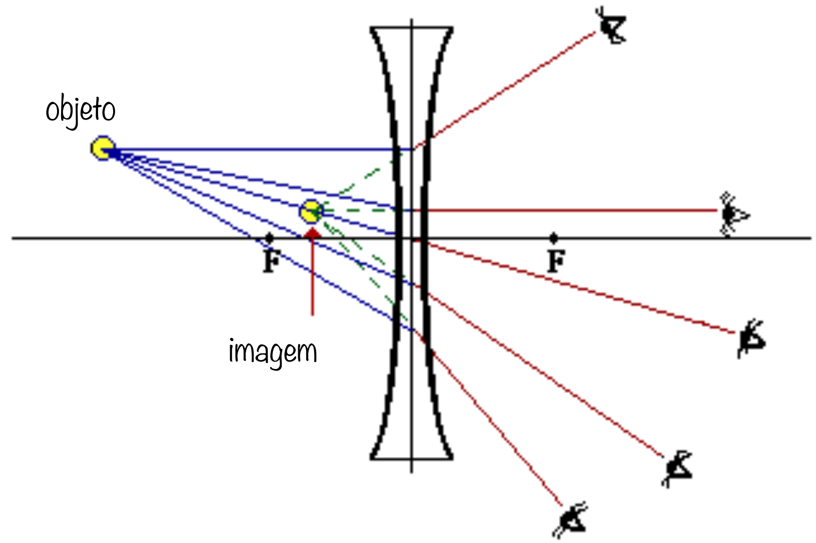
Os raios que se propagam paralelos ao eixo principal, são refratados pela lente e divergem de um ponto atrás da lente, que é o ponto focal



Os raios que apontam para o ponto focal são refratados pela lente e passam a se propagar na direção paralela ao eixo principal

Formação da imagem

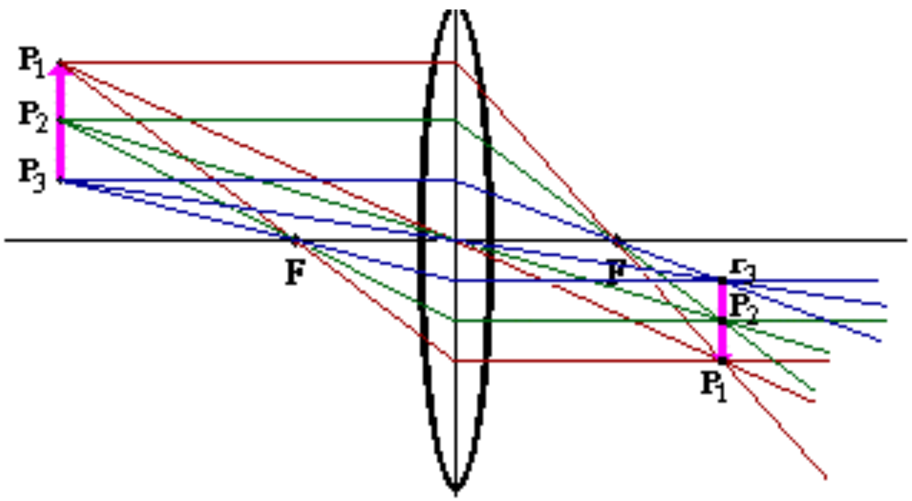


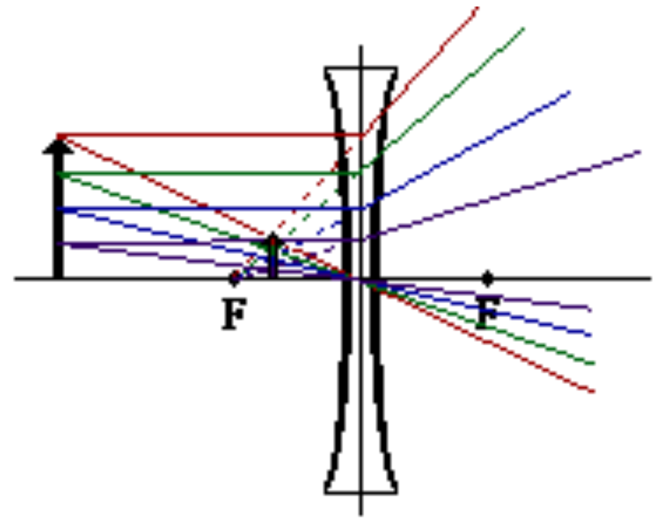


Para visualizar a imagem de um objeto através da lente, é preciso que existam raios partindo do objeto, e atingindo o olho do observador. Na figura, existem diferentes posições em que o observador poderá visualizar a imagem.

Os raios de luz partem do objeto e são refratados pela lente, o ponto onde esses raios se interceptam é onde se forma a imagem.

Formação da imagem

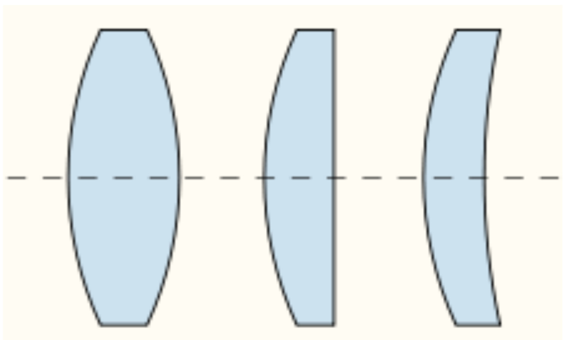




Todos os raios de luz que partem de um ponto no objeto irão se interceptar em único ponto na imagem, e isso é válido para todos os pontos do objeto.

Assim a imagem constitui uma réplica do objeto.

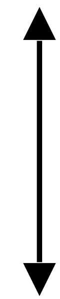
Aproximação de lentes finas

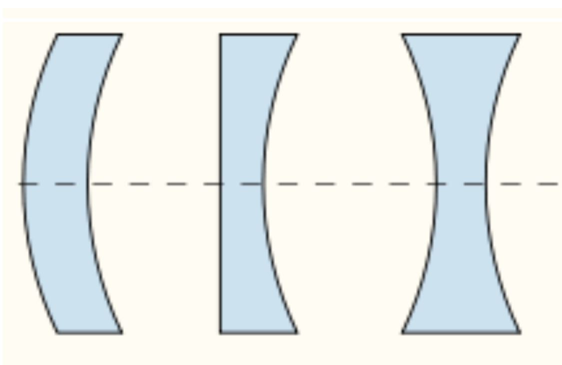


Convergentes

Borda fina

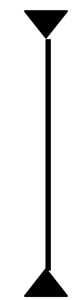
Representação simplificada



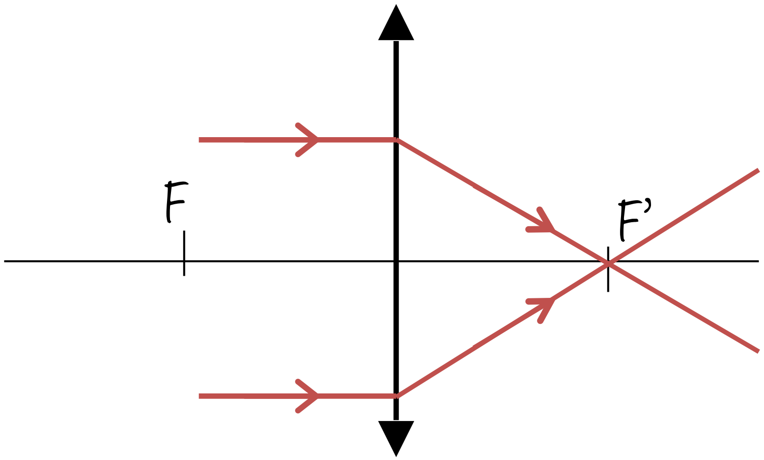


Divergentes

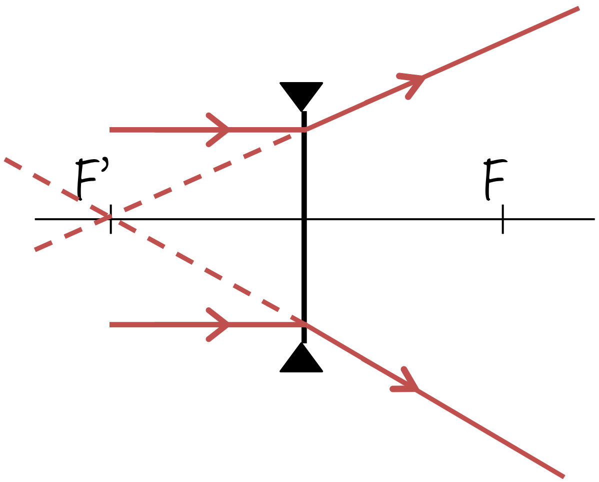
Borda grossa



Pontos conjugados F e F´



Distância focal positiva



Distância focal negativa

Localização da imagem – método geométrico

Traçado de pelo menos 2 raios entre os 3 abaixo:

- um raio passando pelo foco da lente
- um raio passando pelo centro da lente
- um raio se propagando paralelo ao eixo principal

Lente convergente
objeto distante da lente

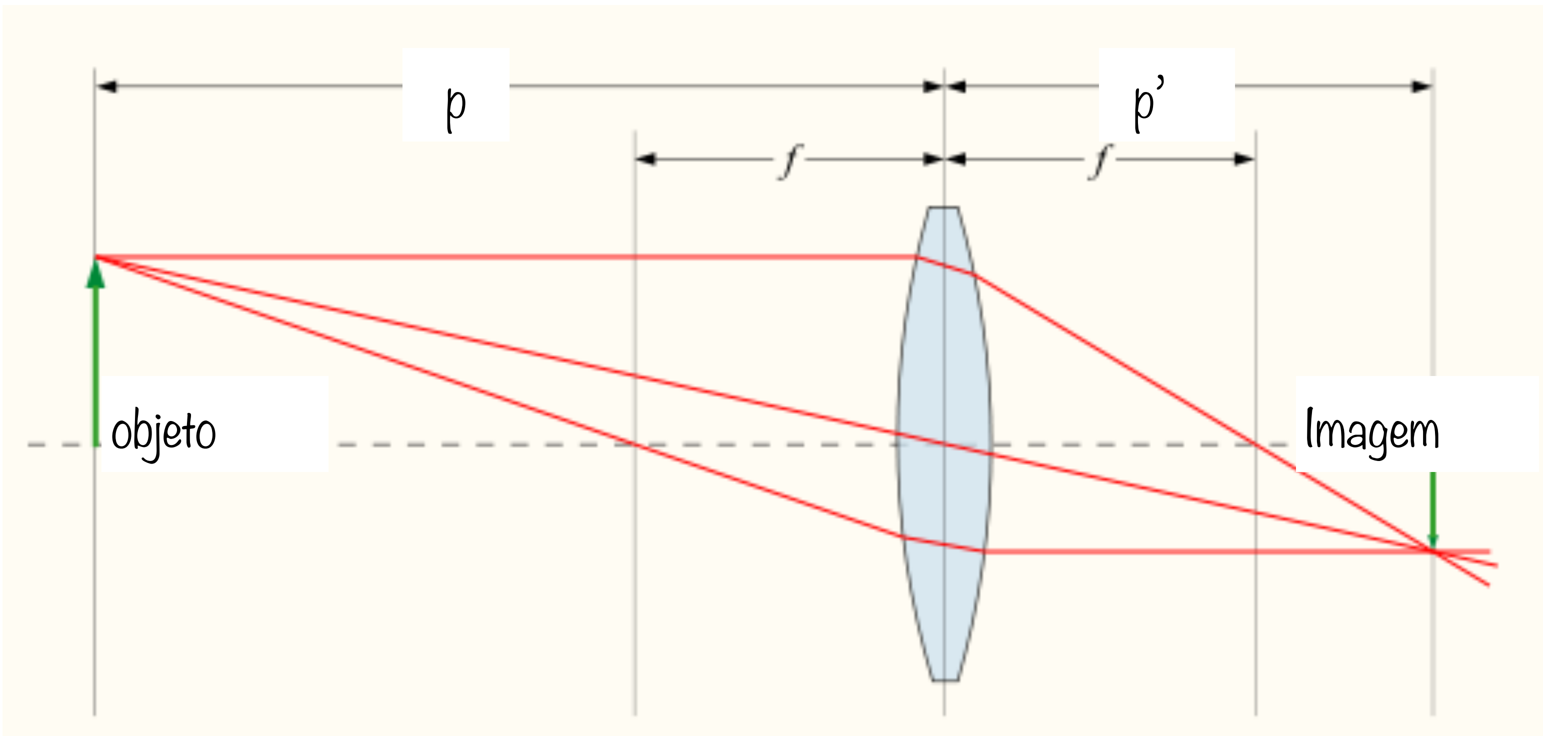


Imagem real, invertida

Lente convergente
objeto entre o foco e a lente

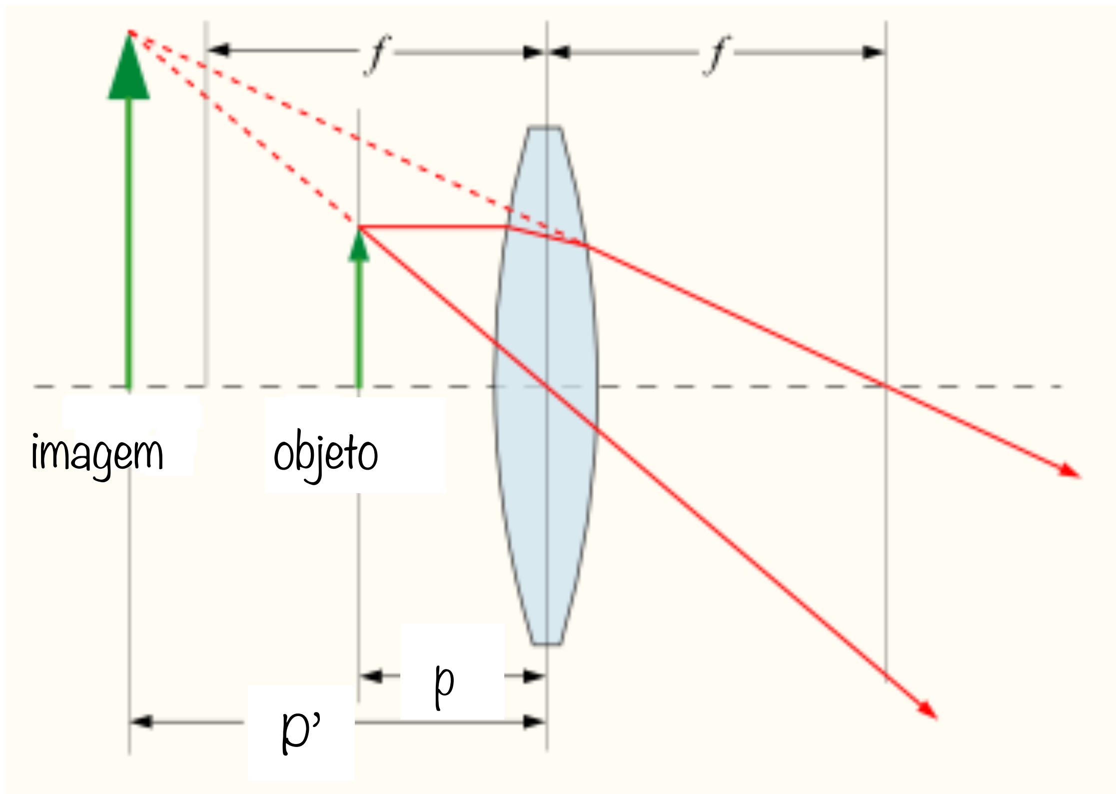


Imagem virtual, direita

Lente divergente

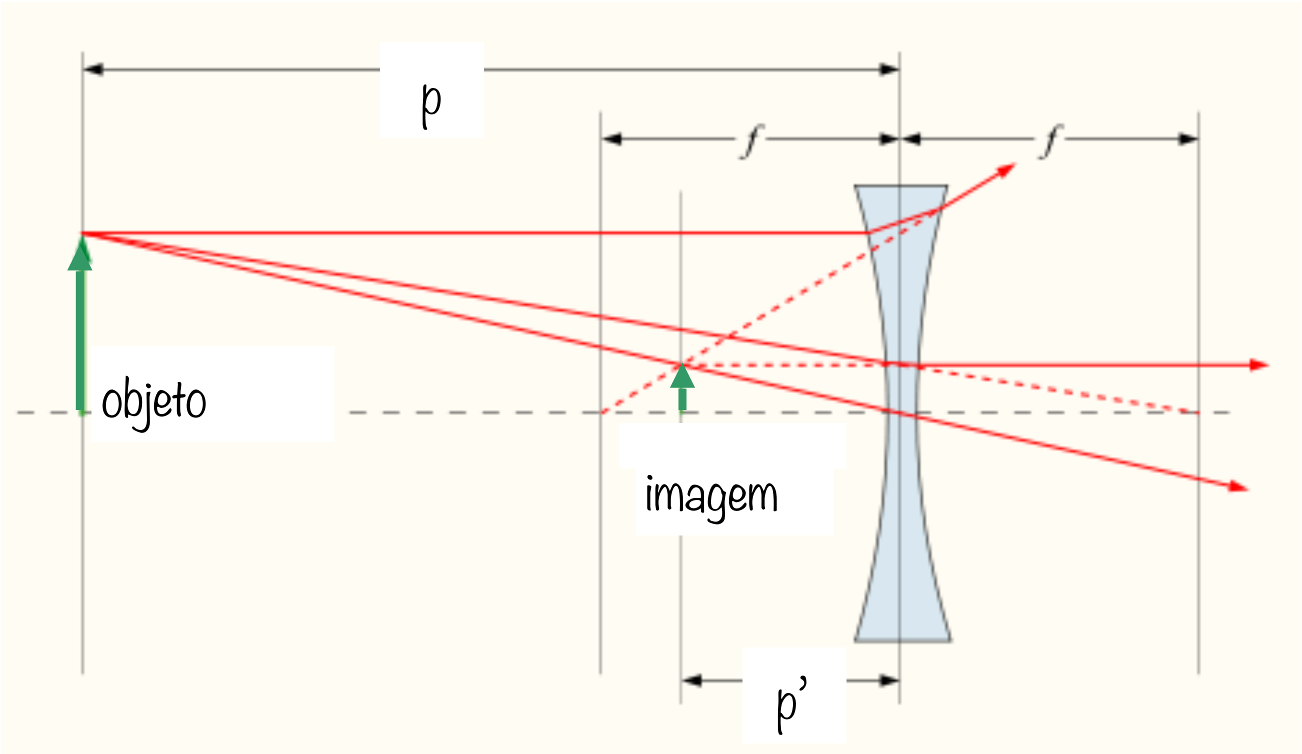
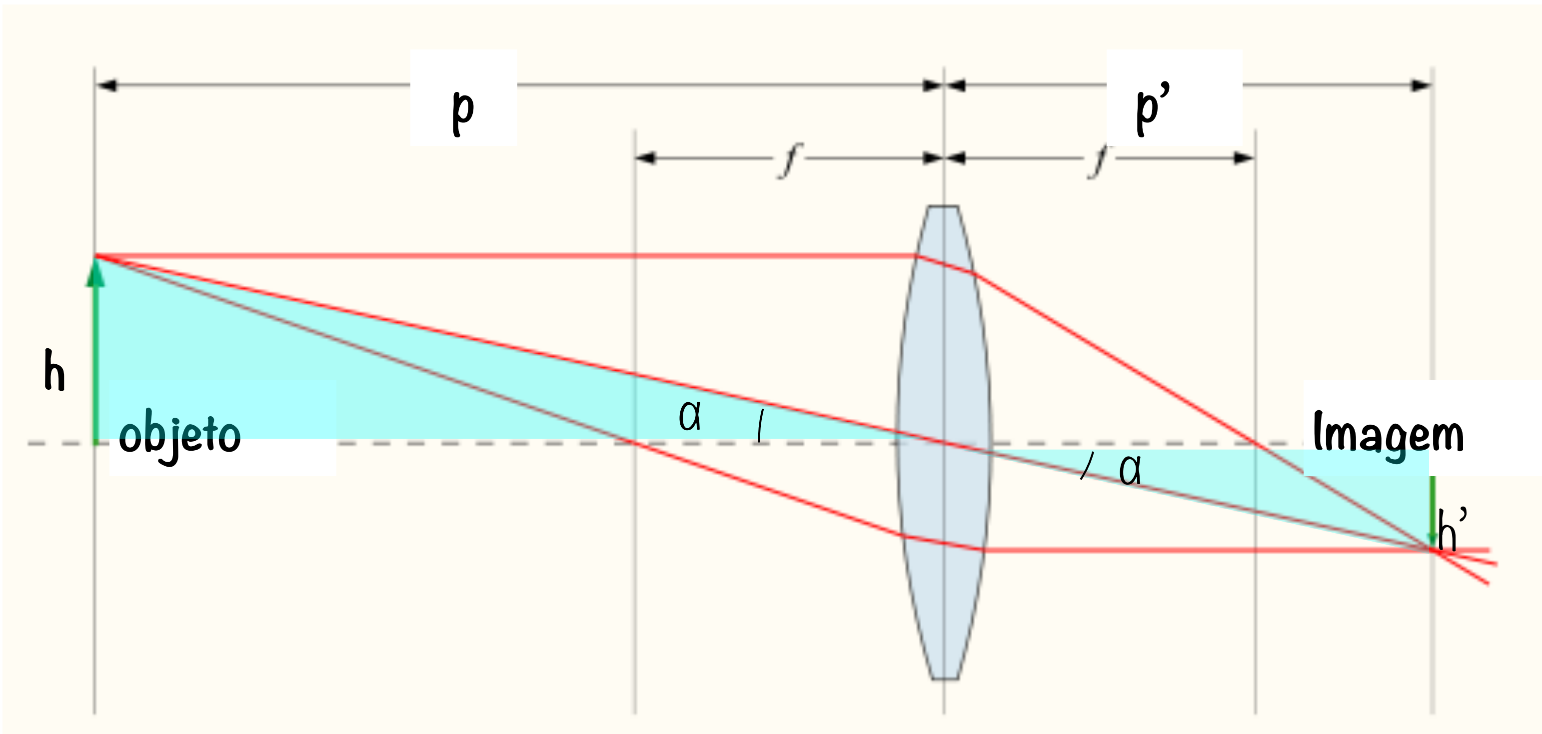


Imagem virtual e direita

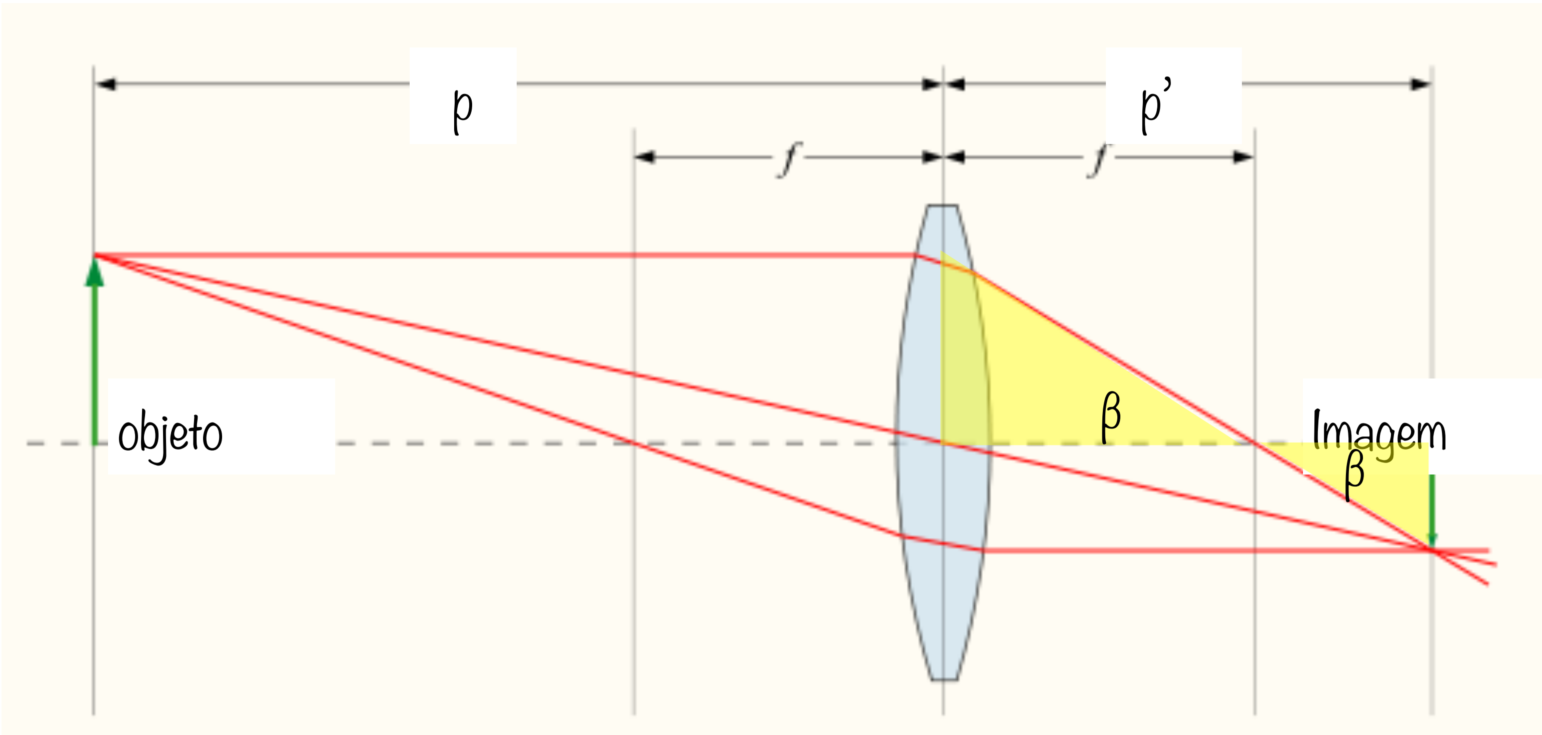
Equação das lentes

Equação das lentes



$$tg\alpha = \frac{h}{p} = \frac{h'}{p'}$$

Equação das lentes

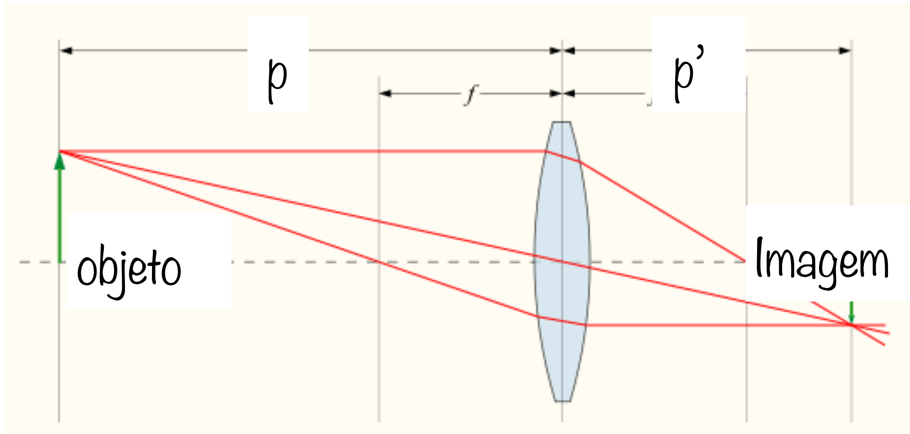


$$tg\alpha = \frac{h}{p} = \frac{h'}{p'}$$

$$tg\beta = \frac{h}{f} = \frac{h'}{p'-f}$$

Equação das lentes

$$tg\alpha = \frac{h}{p} = \frac{h'}{p'} \qquad tg\beta = \frac{h}{f} = \frac{h'}{p'-f}$$



$$\frac{h}{h'} = \frac{p}{p'} = \frac{f}{p'-f}$$

$$p(p'-f) = p'f \Rightarrow pp'-pf = p'f$$

$$pp' = f(p'+p) \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{(p'+p)}{pp'}$$

Equação das lentes finas

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}}$$

Aumento transversal

$$\boxed{M = \frac{h'}{h} = -\frac{p'}{p}}$$

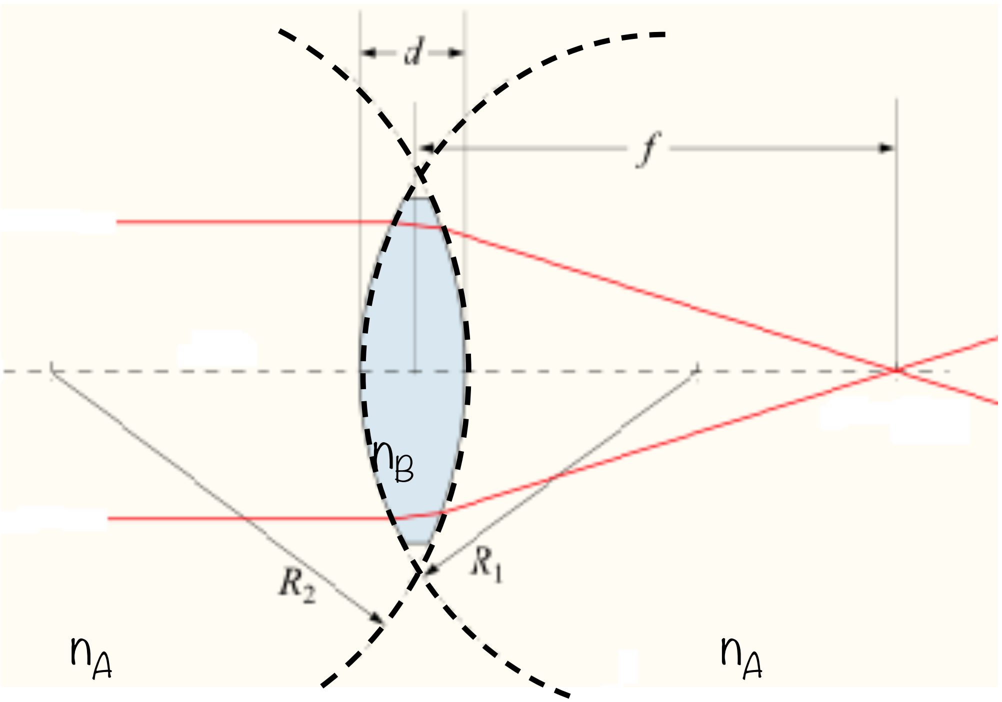
p' positivo - imagem real

M negativo – imagem invertida

p' negativo – imagem virtual

M positivo- imagem direita

Equação dos fabricantes de lentes



Duas superfícies esféricas de raios R_1 e R_2

Equação do dioptro simples

Superfície 1:

$$\boxed{\frac{n_A}{p_1} + \frac{n_B}{p_1'} = \frac{n_B - n_A}{R_1}}$$

Superfície 2:

$$\boxed{\frac{n_B}{p_2} + \frac{n_A}{p_2'} = \frac{n_A - n_B}{R_2}}$$

A imagem produzida pela 1ª. Superfície será o objeto para a segunda superfície.Porém se $p_1<0$, essa imagem será um objeto virtual para a superfície 2. Desprezando-se espessura da lente (d=0) temos :

$p_2=-p'_1$

Substituindo nas equações e somando as duas equações:

Equação dos fabricantes de lentes

$$\frac{n_A}{p_1} + \frac{n_B}{p_1'} = \frac{n_B - n_A}{R_1}$$

$+$

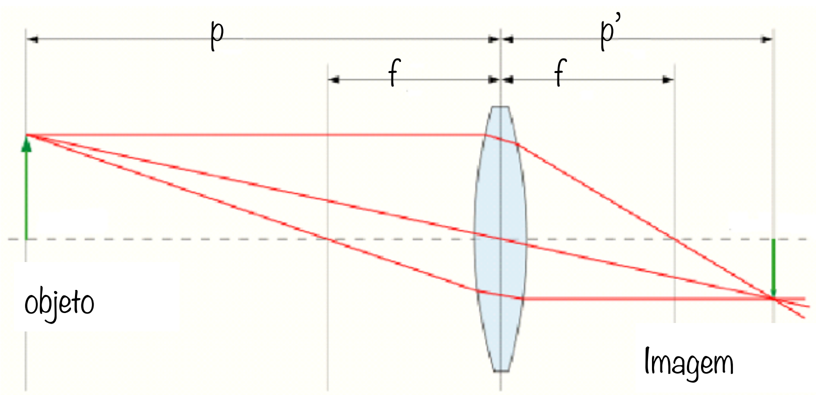
$$-\frac{n_B}{p'_1} + \frac{n_A}{p_2'} = \frac{n_A - n_B}{R_2}$$

$$\frac{n_A}{p_1} + \frac{n_B}{p_1'} - \frac{n_B}{p'_1} + \frac{n_A}{p_2'} = \frac{n_B - n_A}{R_1} + \frac{n_A - n_B}{R_2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{n_A}{p_1} + \frac{n_A}{p_2'} = (n_B - n_A)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

n_A= índice de refração do meio no qual se encontra a lente

n_B= índice de refração do material da lente,



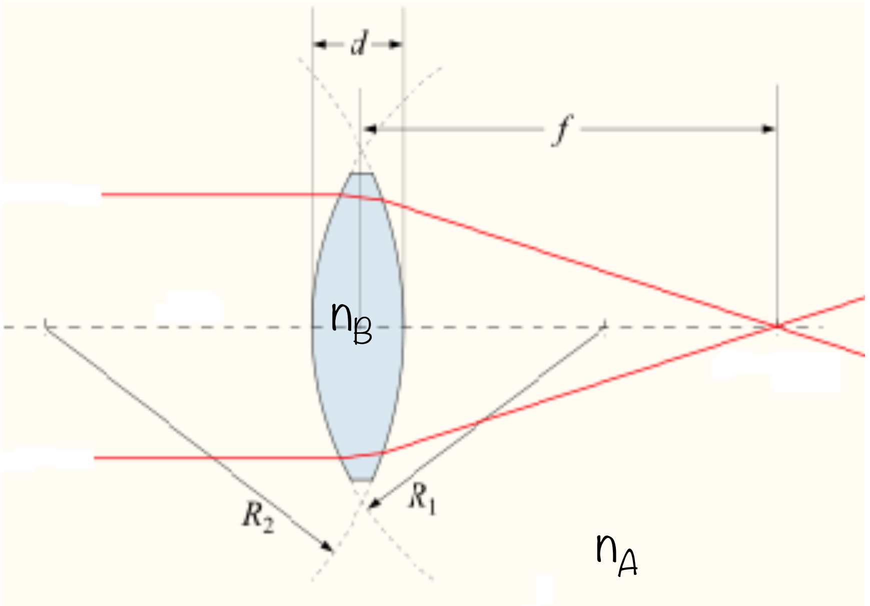
Renomeando: p_1=p e p'_2=p'

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \left(\frac{n_B}{n_A} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

Combinando com a equação das lentes

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\left(\frac{n_B}{n_A}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$$



Equação dos fabricantes de lentes

$$\boxed{\frac{1}{f}=\left(\frac{n_B}{n_A}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

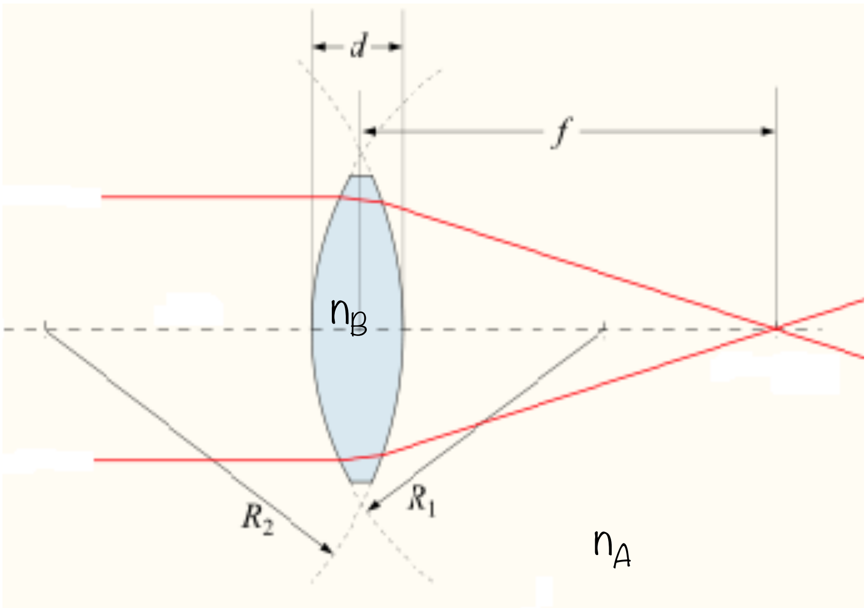
n_A= índice de refração do meio no qual está imersa a lente

n_B= índice de refração do material do qual a lente é feita

Equação dos fabricantes de lentes

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_B}{n_A} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

O oftalmologista prescreve uma lente em graus, que é o mesmo que dioptria.



Potência de uma lente $P=1/f$

Com f medido em metros,

P é dado em m^{-1} = dioptrias

Exemplo:

f=-200cm=-0,2m ➜ P=-5 dioptrias

f=500cm=0,5m ➜ P=2 dioptrias

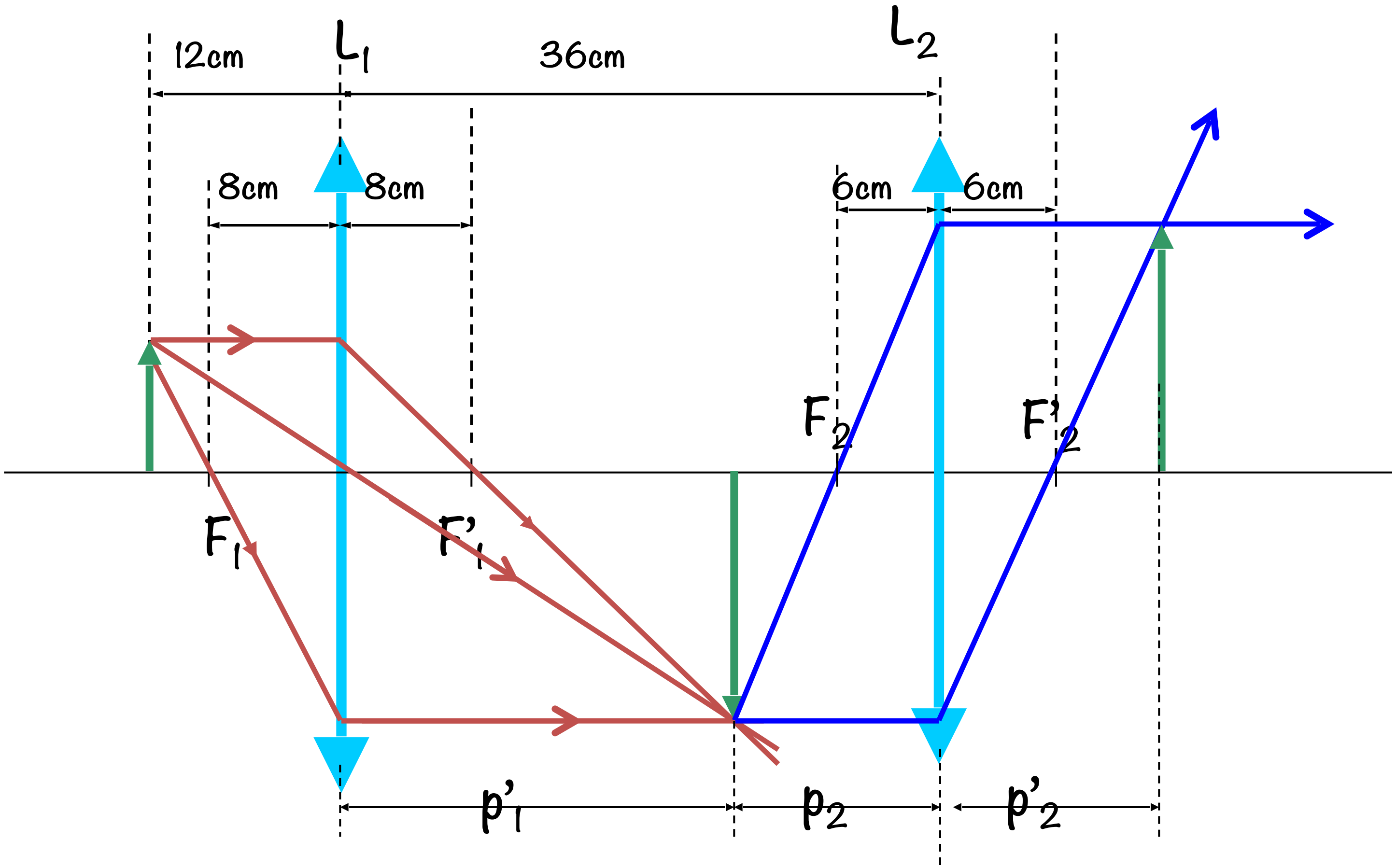
f= 2m ➜ P=0,5 dioptrias

Aplicações:
Equação das lentes finas e traçado de raios

Exemplo 1

Um objeto com altura igual a 8,0cm é colocado a 12,0cm à esquerda de uma lente convergente com distância focal de 8,0cm. Uma segunda lente convergente com distância focal de 6,0cm é colocada a 36,0cm à direita da primeira lente. Ambas as lentes possuem o mesmo eixo ótico. Determine a posição, o tamanho e a orientação da imagem final produzida por essa combinação de lentes.

Solução - método gráfico



Solução – equação das lentes

Lente 1

p_1= 12,0cm,

f_1=8,0cm

$$\frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1} \Rightarrow \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{8,0} - \frac{1}{12,0}$$

$$\frac{1}{p'_1} = \frac{3-2}{24} = \frac{1}{24} \Rightarrow p'_1 = 24,0cm$$

$$M_1 = -\frac{p'_1}{p_1} = -\frac{24,0cm}{12,0cm} = -2$$

$$h'_1 = -16cm$$

A primeira imagem se forma a 24cm a direita da primeira lente. Essa imagem é real e invertida, e tem 16cm de altura.

Lente 2:

p_2= (36-24)cm=12cm

f_2=6,0cm

$$\frac{1}{p'_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{p_2} \Rightarrow \frac{1}{p'_2} = \frac{1}{6,0} - \frac{1}{12,0}$$

$$\frac{1}{p'_2} = \frac{2-1}{12} = \frac{1}{12} \Rightarrow p'_2 = 12,0cm$$

$$M_2 = -\frac{p'_2}{p_2} = -\frac{12,0cm}{12,0cm} = -1$$

$$h'_2 = -1(-16cm) = 16cm$$

A segunda imagem se forma a 12cm a direita da segunda lente.

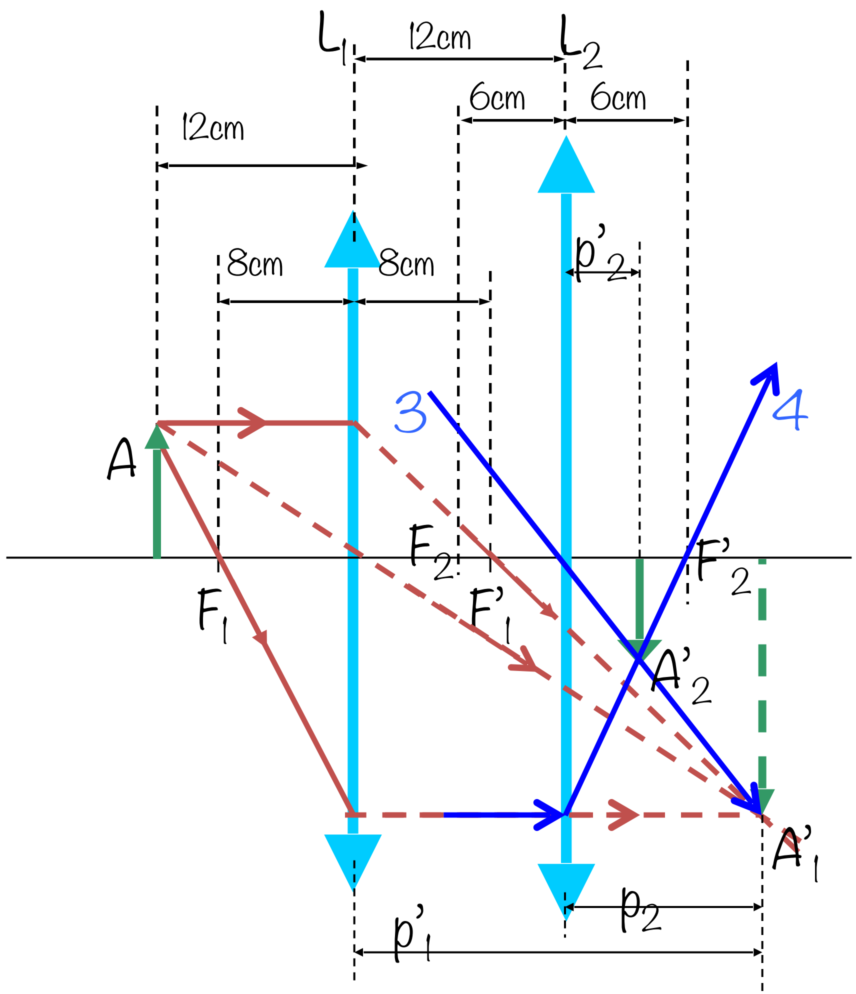
Essa imagem é real e há uma nova inversão.

Portanto a imagem final tem a mesma orientação que o objeto, e a altura final é de 16cm

Exemplo 2

- Na situação anterior, a segunda lente é deslocada e a separação entre as lentes passa a ser de 12,0cm. Para essa nova configuração determine a posição, o tamanho e a orientação da imagem final produzida pela combinação das duas lentes.

Solução – método gráfico



O raio 3 é um raio que atravessa a lente 2, diretamente no centro sem ser desviado e passa pelo objeto

O raio 4, é um raio que atinge a lente 2, paralelo ao eixo principal e será refratado passando pelo foco F'_2.

Os pontos onde esses raios se interceptam são pontos conjugados (A'_1 e A'_2)

Solução – equação das lentes

Para a lente 2; o objeto é virtual, portanto, temos p_2=-12cm, e o foco da lente é igual 6cm.

$$\frac{1}{p'_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{p_2} \Rightarrow \frac{1}{p'_2} = \frac{1}{6,0} - \frac{1}{(-12,0)}$$

$$\frac{1}{p'_2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2+1}{12} = \frac{3}{12} \Rightarrow p'_2 = 4,0cm$$

$$M_2 = -\frac{p'_2}{p_2} = -\frac{4,0cm}{(-12,0cm)} = \frac{1}{3}$$

$$M_2 = 0,33 \Rightarrow h'_2 = 0,33x(-16cm) = -5,3cm$$

A segunda lente não inverte a imagem.

A imagem final está a 4,0cm a direita da segunda lente, é invertida em relação ao objeto, e tem altura igual a 5,3cm.

Exercício proposto

Em um quarto escuro uma vela acesa está colocada a 1,5m de uma parede branca. Uma lente, colocada entre a parede e a vela, forma uma imagem invertida e ampliada. Quando a lente é deslocada de 90cm, para perto da parede, forma-se outra imagem da vela. Achar

(a) as duas distâncias do objeto à lente que correspondem às imagens formadas e

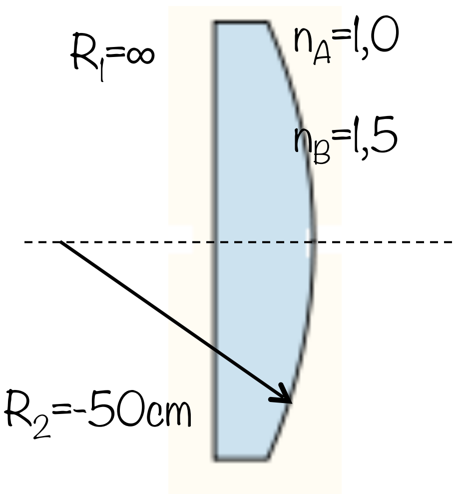
(b) a distância focal da lente.

(c) Caracterizar a segunda imagem.

Aplicações:
Equação dos fabricantes de lentes

Exemplo 1

Calcule a distância focal de uma lente plano convexa de vidro, onde o raio da superfície curva é igual a 50cm, e o vidro tem índice de refração igual a 1,5.



O raio R_1 é infinito e o raio R_2 é negativo; $R_2=-50cm$

$$\frac{1}{f}=\left(\frac{1,5}{1,0}-1\right)\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{-50}\right)$$

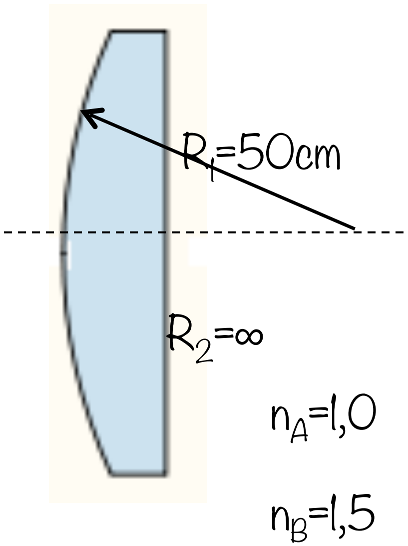
$$\frac{1}{f}=\frac{0,5}{50}=\frac{1}{100}$$

f=100 cm (f>0),

lente convergente

Exemplo 2

A distância focal da lente muda se a lente for invertida?



O raio R_1 é positivo; R_1=50cm e o raio R_2 é infinito

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1{,}5}{1{,}0} - 1\right)\left(\frac{1}{50} - \frac{1}{\infty}\right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{0{,}5}{50} = \frac{1}{100}$$

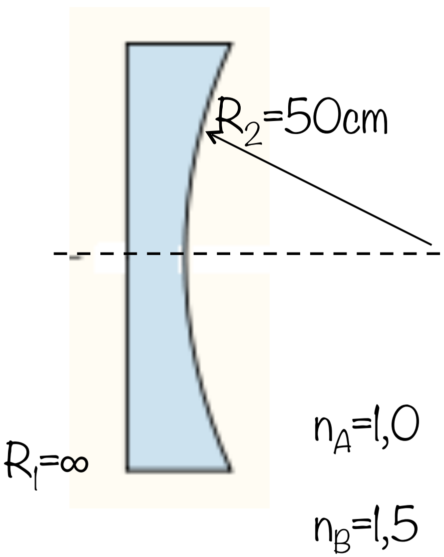
f=100cm (f>0),

lente convergente

$\boxed{\text{A distância focal da lente não é alterada!}}$

Exemplo 3

Calcule a distância focal de uma lente plano côncava de vidro, onde o raio da superfície curva é igual a 50cm, e o vidro tem índice de refração igual a 1,5.



O raio R_1 é infinito e o raio R_2 é positivo; R_2=50cm

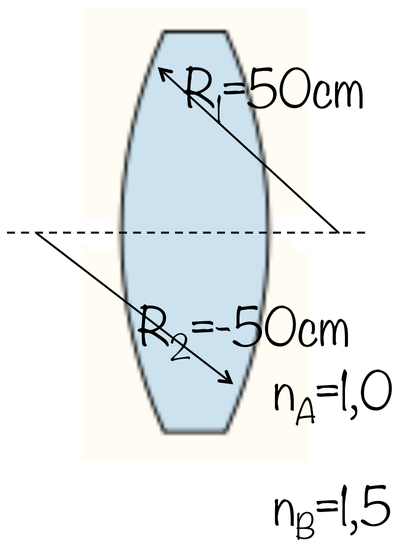
$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1{,}5}{1{,}0} - 1\right)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{50}\right)$$

$$\frac{1}{f} = -\frac{0{,}5}{50} = -\frac{1}{100}$$

$\boxed{f=-100\text{cm } (f<0),\ \text{lente divergente}}$

Exemplo 4

Calcule a distância focal de uma lente biconvexa de vidro, onde os raio das superfície curvas são iguais a 50cm, e o vidro tem índice de refração igual a 1,5.



O raio R_1 é positivo e o raio R_2 é negativo;

R_1=50cm e R_2=-50cm

$$R_2 = -R_1$$

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_B}{n_A} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{-R_1}\right) = \left(\frac{n_B}{n_A} - 1\right)\frac{2}{R_1}$$

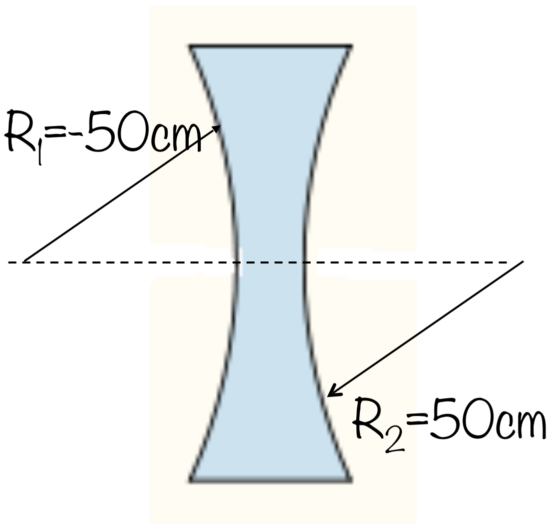
$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1,5}{1,0} - 1\right)\frac{2}{50} = \frac{0,5x2}{50} = \frac{1}{50}$$

f=50cm (f>0), lente convergente

O que acontece com a distância focal dessa lente se for colocada na água (aumenta/ diminui / não muda)?

Exemplo 5

Calcule a distância focal de uma lente bicôncava, como a mostrada na figura, com raio de 50cm em cada uma das superfícies e feita de vidro, cujo índice de refração é 1,5.



O raio R_1 é negativo,e o raio R_2 é positivo:

R_1=-50cm, R_2=50cm

$$R_2 = -R_1$$

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_B}{n_A} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{-R_1}\right) = \left(\frac{n_B}{n_A} - 1\right)\frac{2}{R_1}$$

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1,5}{1,0} - 1\right)\frac{2}{-50} = \frac{0,5x2}{-50} = -\frac{1}{50}$$

f=-50cm (f<0), lente divergente

Exercícios propostos

A face esquerda de uma lente biconvexa tem o raio de curvatura de 12cm e a face direita tem raio de curvatura de 18 cm. O índice de refração do vidro é 1,44.

(a) Calcular a distância focal da lente.

(b) Calcular a distância focal se os raios de curvatura das duas faces forem trocados um pelo outro.

Uma lente convexa "oca", de paredes delgadas, está imersa na água. A lente oca tem R_1=20cm e R_2=30cm. Calcular a distância focal desta lente de "ar" imersa na água (n=1,33).