PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

Amostragem e efeitos: Transformada de Fourier

Prof. Sérgio S Furuie

LEB/PTC/EPUSP

Abordagem: motivação – intuição – formalização - prática

Bibliografia indicada: cap. 7 (sampling) do Oppenheim

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

Transformada de Fourier

- O que é?
- Para que serve?
- Base complexa. Por que?
- O que representa o módulo e a fase?
- Por que da distinção entre contínuo e discreto?

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

Domínio do tempo		Domínio da frequência
Contínuo, aperiódico $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w).e^{jwt}\,dw$	TF	Contínuo, aperiódico w=2πf $X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-jwt}\,dt$ w
Contínuo, periódico(T) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k.e^{jkw_0 t}$ T	SF	Discreto(2π/T), aperiódico $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t).e^{-jkw_0 t}\,dt$
Discreto (nΔ), aperiódico $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega).e^{j\Omega n}\,d\Omega$ Δ $f_a=1/\Delta$	TFTD	Contínuo, periódico(2π/Δ) $\Omega=2\pi f/f_a$ $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].e^{-j\Omega n}$
Discreto(nΔ), periódico(T) $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k.e^{j2\pi\frac{k}{N}n}$ N	SFTD	Discreto(2π/T), periódico(2π/Δ) $a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n].e^{-j2\pi\frac{n}{N}k}$

InCor/EPUSP SF 32

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

Transformada de Fourier Discreto

$$\text{Dado}: x(n) \qquad n = 0, N-1$$

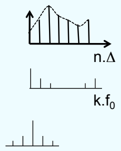
Obtém-se TDF por:

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n).e^{-j2\pi kn/N}$$

$$k = 0, N-1$$

E a inversa por:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k).e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0, N-1$$



- Discreto no tempo e discreto na frequencia
- Note a semelhança com SFTD
  - **Interpretação: assume a periodicidade do sinal tanto no tempo quanto na frequencia !**

Envolve NxN multiplicações. Algoritmos eficientes?

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

Transformada de Fourier Discreto
DFT =>FFT: Fast Fourier Transform

The **Cooley–Tukey algorithm**, (1965) named after J.W. Cooley and John Tukey, is the most common fast Fourier transform (FFT) algorithm. It re-expresses the discrete Fourier transform (DFT) of an arbitrary composite size $N = N_1N_2$ in terms of smaller DFTs of sizes N_1 and N_2, recursively, in order to reduce the computation time to O(N log N) for highly-composite N

$N = 1000$

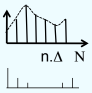
DFT de N valores sem FFT => N^2 produtos => 1.000.000

DFT com FFT => $N\log_2(N) \cong 10000$

reduz-se para $\frac{\log_2(N)}{N} = 1/100 = 1\%$ de operações necessárias

Como associar com unidades físicas reais?

Associando unidades físicas ao FFT



Em Hz

Δ : intervalo de amostragem

$\therefore$ freq. amostragem $= f_a = 1/\Delta$

Período do sinal no tempo = T = N.Δ

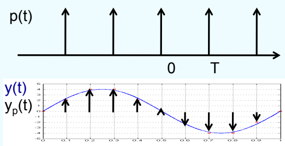
$\therefore$ intervalo de frequencia $= f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{N.\Delta} = \frac{f_a}{N}$

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

Efeito da amostragem no domínio do tempo

- Amostragem regular (freq. Constante)

Trem de impulsos=p(t)



$y_d(k)$= [0 2 4 4 2 0 -2 -4 -4 -2 0]

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT)$$

$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} y(t).\delta(t - nT)$$

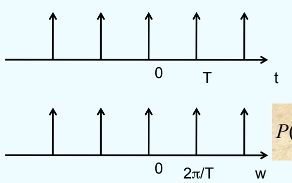
$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} y(nT).\delta(t - nT)$$

$$y_d(k) = y_p(kT)$$

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

Efeito da amostragem no dom. freq.

- Amostragem regular (freq. Constante)



$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT)$$

$$P(w) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(w - n.\frac{2\pi}{T})$$

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

Efeito da amostragem no domínio da frequencia: *aliasing*

p(t)

y(t) → x → $y_p(t)$

$$y_p(t) = y(t).p(t)$$

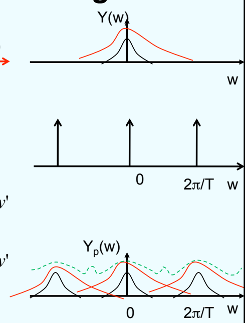
$$Y_p(w) = Y(w) * P(w)$$

$$Y_p(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(w').P(w - w')dw'$$

$$Y_p(w) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(w').\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(w - w' - n.\frac{2\pi}{T}).dw'$$

$$Y_p(w) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y(w').\delta(w - w' - n.\frac{2\pi}{T})dw'$$

$$Y_p(w) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} Y(w - n.\frac{2\pi}{T})$$



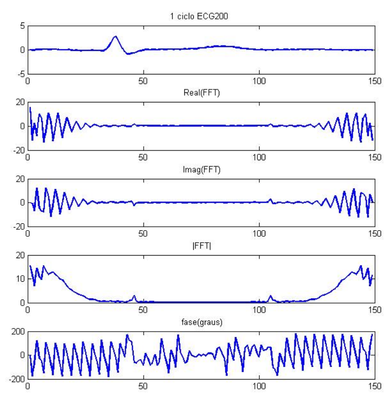
Aliasing ...

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

Domínio do tempo	Domínio da frequência
Contínuo, aperiódico $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w).e^{jwt}\,dw$	Contínuo, aperiódico $X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-jwt}\,dt$ w=2πf w
TF	
Contínuo, periódico(T) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k.e^{jkw_0t}$ T	Discreto(2π/T), aperiódico $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t).e^{-jkw_0t}\,dt$
SF	
Discreto (nΔ), aperiódico $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega).e^{j\Omega n}\,d\Omega$ Δ f_a=1/Δ	Contínuo, periódico(2π/Δ) Ω=2πf/f_a $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].e^{-j\Omega n}$
TFTD	
Discreto(nΔ), periódico(T) $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k.e^{j2\pi\frac{k}{N}n}$ N	Discreto(2π/T), periódico(2π/Δ) $a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n].e^{-j2\pi\frac{n}{N}k}$
SFTD	

InCor/EPUSP SF 32

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos



Discutir:
1) FFT
2) Freq. Negativas
3) Num. Complexos
4) Módulo
5) Fase

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

Resumindo

- FFT: realiza DFT discreto => presume que o sinal é periódico (discreto)

Exercício

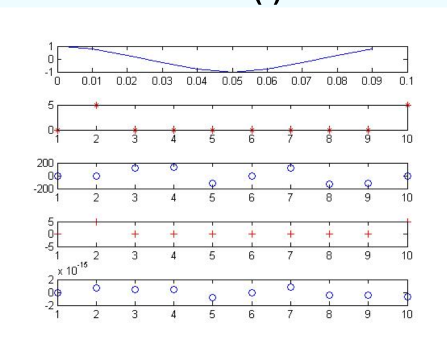
1. Gerar um ciclo de uma cosenoide $s(t)=\cos(2\pi f_0 t)$ com $f_o=10$ Hz
2. Obter a DFT de s(t) usando FFT. Observar o módulo e fase. Interpretar.
3. Atrase o sinal, ou seja, obtenha $s_1(t)=s(t-t_0)$, $t_0=1/(12f_0)$ e repita o item 2. Qual a fase obtida?

(atente para a fórmula implementada que podem ser diferentes por uma constante)

FFT de cos e coseno defasado

EXEMPLO NO MATLAB

S(t) e FFT



Sinal no tempo

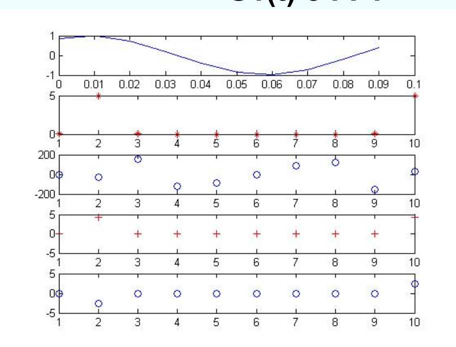
Real (FFT)

Imag(FFT)

|FFT|

Fase(FFT)

S1(t) e FFT



Sinal no tempo

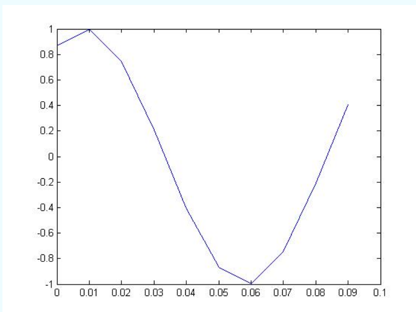
Real (FFT)

Imag(FFT)

|FFT|

Fase(FFT)

ifft



Bibliografia

- Apostila de Processamento de Sinais de Tempo Discreto. C Itiki, V H Nascimento
- Biomedical Signal Analysis. R.M. Rangayyan. Wiley Interscience, 2002
- Signals and Systems (2nd Edition) A.V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab Hardcover: 957 pages. Publisher: Prentice Hall; 1996. ISBN-10: 0138147574.
- Biosignal and Medical Image Processing. John L. Semmlow.CRC Press,2009