



**PSI.3031 – LABORATÓRIO DE CIRCUITOS ELETRICOS**

Edição 2017  
E.Galeazzo / L.Yoshioka

**INTRODUÇÃO TEÓRICA**

**EXPERIÊNCIA 10: REDES DE SEGUNDA ORDEM**

**1- Objetivos**

- Estudar a resposta transitória e permanente de *circuitos RLC*.
- Determinar experimentalmente fator de amortecimento, frequência amortecida e frequência de ressonância de circuitos RLC.
- Estudar o efeito de batimento amortecido em circuitos RLC.

**2- Introdução**

As redes de segunda ordem são circuitos elétricos que possuem dois elementos armazenadores de energia. Estes circuitos são formados pela associação de um ou mais resistores e dois elementos armazenadores de energia, que podem ser de tipos diferentes ou não (desde que não possam ser reduzidos a um só elemento equivalente). Entre as várias possibilidades de circuitos de segunda ordem, alguns exemplos são constituídos por:

- . Dois capacitores;
- . Dois indutores;
- . Um resistor, um capacitor e um indutor associados em série;
- . Um resistor, um capacitor e um indutor associados em paralelo, entre outros.

Na maioria dos casos, um resistor adicional é incorporado nos modelos equivalentes de redes de segunda ordem para representar as perdas do circuito. Exemplos de redes de segunda ordem são ilustrados na Figura 1.

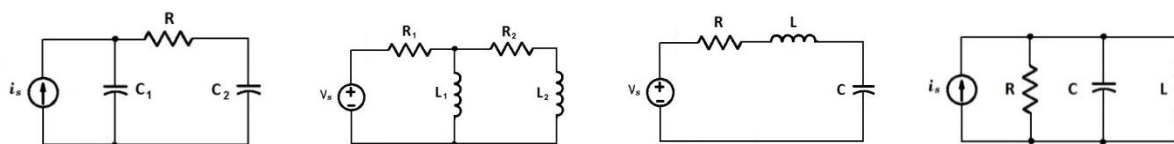


Figura 01 – Exemplos de circuitos elétricos de segunda ordem.

Nas associações R, L e C, a energia total armazenada é igual à soma das energias acumuladas em campo elétrico e campo magnético. A energia é trocada entre os elementos armazenadores de energia (capacitor e indutor) durante o funcionamento do circuito e, com o passar do tempo, a energia total do circuito é dissipada.

Os circuitos RLC que serão tratados neste laboratório são circuitos concentrados lineares invariantes no tempo, e descritos por uma *equação diferencial ordinária de segunda ordem, linear, a coeficientes constantes*. A solução completa da equação diferencial é a soma da solução homogênea e da solução particular. Ou, em outras palavras, a solução completa contempla uma parte que depende apenas do circuito e da energia armazenada inicialmente nos capacitores e indutores (**resposta natural ou livre**), e de uma segunda parte (**resposta forçada**) que depende do circuito e da entrada, ou seja, dos geradores independentes de tensão ou corrente. Podemos também separar a resposta do circuito em dois termos: **resposta transitória e permanente**. A resposta transitória será igual à resposta livre do circuito somente quando a entrada for nula com condições iniciais não nulas. A resposta transitória é definida como a parte da resposta que tende a zero quando o tempo vai a infinito. A resposta em regime permanente é a parte da resposta que permanece quando os transitórios se anulam, podendo ser valor constante ou um sinal que varia no tempo, como por exemplo, um sinal senoidal.

## 2.1 Resposta Natural de um Circuito RLC em Série

Para descrever o comportamento livre ou a resposta natural do circuito RLC em série, é preciso calcular a corrente que surge nos elementos armazenadores de energia com a liberação de energia armazenada no indutor, no capacitor, ou nos dois componentes [1], quando todos os geradores independentes estão inativados. Neste caso, desejamos conhecer a função  $i(t)$ , para  $t > 0$ .

Vamos então supor que o circuito ilustrado na Figura 2, com excitação nula e com certa energia armazenada, começou a operar no instante  $t_0 = 0$ , com as seguintes condições iniciais:

$$v_C(0) = v_0,$$

$$i_L(0) = i_0.$$

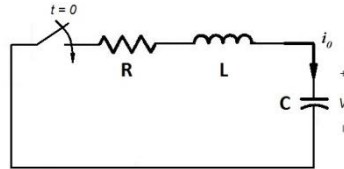


Figura 2 – Esboço de circuito RLC série com alimentação nula e energia armazenada.

Aplicando-se a 2ª Lei de Kirchhoff, temos que:

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0 \quad (1)$$

Considerando que:

$$v_R(t) = Ri(t), \quad (1.1)$$

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad (1.2)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_C(0), \quad (1.3)$$

e substituindo os valores (1.1), (1.2) e (1.3) na expressão (1), obtemos:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau + v_0 = 0. \quad (2)$$

Para reduzir (2) a uma equação diferencial, vamos derivá-la em relação ao tempo. Ao fazermos a derivação e dividindo tal expressão por L, chegamos a:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \quad (3)$$

A abordagem clássica para resolver (3) consiste em supor que a solução não trivial é uma função exponencial, ou seja, deve-se supor que a corrente no circuito é da forma:

$$i(t) = Ae^{st}, \quad (4)$$

onde  $A$  e  $s$  são constantes.

Substituindo (4) em (3) e efetuando as derivações, obtemos a expressão:

$$Ae^{st} \left( s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = 0 \quad (5)$$

A igualdade da expressão (5) será satisfeita para todos os valores de  $t$  se  $A$  for nulo, ou se o termo entre parênteses for nulo, considerando que  $e^{st} \neq 0$  para qualquer valor finito de  $st$ .

Como a solução considerando  $A = 0$  só faz sentido se o circuito estiver inicialmente descarregado (ou seja,  $v_o = 0$  e  $i_o = 0$ , com isso a corrente seria nula em qualquer valor de  $t$ ), em geral é o termo entre parênteses que deve se anular. Assim chegamos à equação característica associada a esta equação diferencial:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_o^2 = 0. \quad (6)$$

Note que foram definidos dois parâmetros em (6):

$\alpha = \frac{R}{2L}$  (para circuitos RLC em série, sendo  $R$  a resistência equivalente do circuito)<sup>1</sup>;  $\alpha$  é denominado fator de amortecimento (em rad/s);

$\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$ ;  $\omega_o$  é denominada frequência própria não amortecida<sup>2</sup> (em rad/s).

Esta equação de segundo grau (6) recebe o nome de equação característica porque, dependendo do valor das suas raízes,  $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$ , a equação (4) (que é solução da equação diferencial homogênea) apresentará um resultado diferente.

Perceba que estes parâmetros são relacionados apenas como os componentes do circuito RLC, nada mais. Além disso, os valores de  $\alpha$  e de  $\omega_o^2$  determinarão a forma da resposta natural do circuito RLC série (isso vale também para o circuito RLC paralelo). Três

---

<sup>1</sup> Para circuitos RLC em paralelo,  $\alpha = \frac{1}{2RC}$ .

<sup>2</sup>  $\omega_o$  é o mesmo para os circuitos RLC série e paralelo.

possíveis soluções para a equação diferencial poderão ser obtidas, sendo que a forma da resposta natural pode ser categorizada como:

. **Superamortecida:** se  $\omega_0^2 < \alpha^2$ , as duas raízes de (6) são reais e distintas. Neste caso, a corrente (ou a tensão) do circuito chega ao seu estado final sem oscilação. A corrente é dada por:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (7)$$

. **Subamortecida ou oscilatória:** se  $\omega_0^2 > \alpha^2$ , as raízes de (6) são dois números complexos conjugados. Neste caso a corrente (ou a tensão) vai oscilar com uma certa frequência de oscilação  $\omega_d$ , porém sua amplitude de oscilação é atenuada exponencialmente com o tempo. A rapidez com que as oscilações diminuem depende do parâmetro “ $\alpha$ ”. Sempre que houver um elemento dissipativo (R) no circuito,  $\alpha \neq 0$  e  $\omega_d < \omega_0$ . A corrente neste caso será dada por:

$$i(t) = B e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) \quad (8)$$

$$\text{onde } \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

O parâmetro  $\omega_d$  é denominado frequência angular amortecida (rad/s).

. **Criticamente Amortecida:** se  $\omega_0^2 = \alpha^2$ , as raízes de (6) são dois números reais e iguais. Trata-se da situação em que o estado final é atingido o mais rápido possível sem que o sistema oscile. Os sistemas criticamente amortecidos raramente são encontrados na prática, já que correspondem ao caso especial em que  $\omega_0 = \alpha$ . Neste caso, será visto no curso de teoria que aparece um termo a mais, sendo a corrente do circuito descrita por:

$$i(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t} \quad (9)$$

Depois de obtida a equação que descreve a resposta natural da corrente no circuito, é possível também calcular a solução homogênea da tensão entre os terminais de qualquer um dos elementos.

## 2.2 Resposta dos Circuitos RLC em Série à Excitação em Degrau

Vamos determinar a resposta do circuito RLC em série com excitação a um degrau, desenvolvendo as equações que descrevem o comportamento da tensão no capacitor da Figura 3. Para facilitar, vamos supor que não há energia armazenada no circuito ilustrado no momento em que a chave do circuito é fechada.

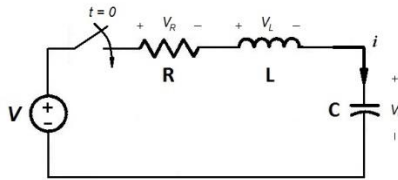


Figura 3 – Circuito RLC série com excitação a um degrau.

Aplicando-se a 2ª Lei de Kirchhoff ao circuito da Figura X, temos que:

$$E = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_c(t) \quad (10)$$

Como desejamos obter a expressão que descreve o comportamento da tensão sobre o capacitor ao longo do tempo (ou seja, desejamos encontrar a solução homogênea e a solução particular da equação diferencial de segundo grau sobre a tensão no capacitor), é conveniente escrevermos a equação (10) em termos da tensão  $v_c(t)$ .

A corrente  $i(t)$  está relacionada à tensão no capacitor  $v_c(t)$  através de:

$$i(t) = i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (11)$$

A partir dela temos que:

$$\frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2v_c(t)}{dt^2} \quad (12)$$

Substituindo (11) e (12) na expressão (10), dividindo a equação resultante por LC e rearranjando os termos, temos:

$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} (v_c(t) - E) = 0 \quad (13)$$

O processo para resolver esta equação diferencial de segundo grau é semelhante ao que foi efetuado no item anterior, a fim de se obter as expressões de  $v_c(t)$ .

As três possíveis soluções para  $v_c(t)$  serão:

$$v_c(t) = E + A'_1 e^{s_1 t} + A'_2 e^{s_2 t} \quad (\text{resposta superamortecida}), \quad (14)$$

$$v_c(t) = E + B'_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) \quad (\text{resposta subamortecida}), \quad (15)$$

$$v_c(t) = E + D'_1 t e^{-\alpha t} + D'_2 e^{-\alpha t} \quad (\text{resposta criticamente amortecida}). \quad (16)$$

Os valores de  $A'_1$ ,  $A'_2$ ,  $B'_1$ ,  $D'_1$  e  $D'_2$  são tais que as condições iniciais no circuito  $v_c(0) = v_0$  e  $i_L(0) = i_0$  sejam satisfeitas (neste exemplo temos que  $v_c(0) = 0$  e  $i_L(0) = 0$ ).

Perceba que as possíveis soluções apresentadas da equação diferencial contêm tanto a solução homogênea quanto a solução particular. Aqui, independentemente do tipo de resposta natural do circuito, o valor final da tensão  $v_c$  tenderá à tensão da fonte,  $E$ . A Figura 4 ilustra possíveis respostas do circuito RLC, exemplificando duas respostas com oscilação subamortecida e com fatores de amortecimento distintos, uma resposta com comportamento criticamente amortecido e outra com resposta superamortecida.

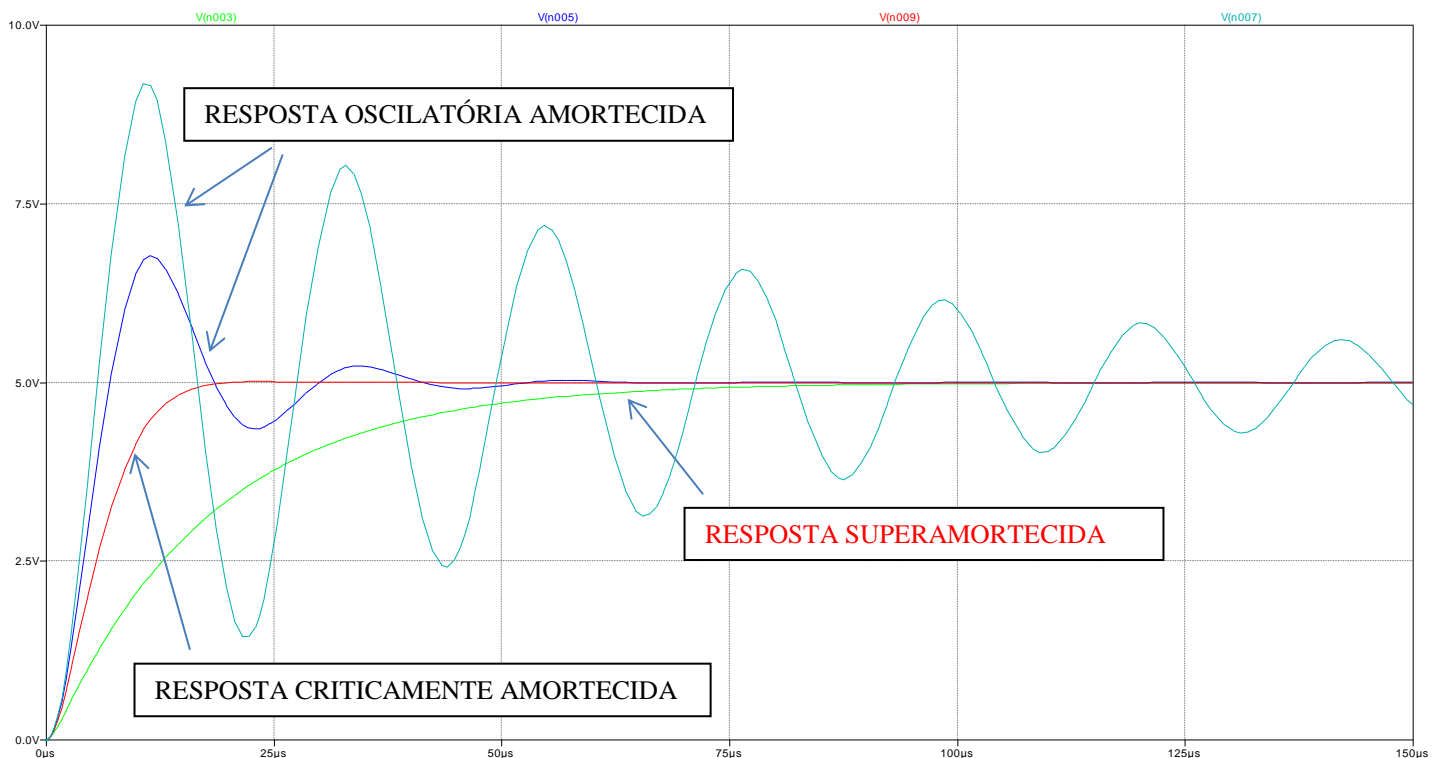


Figura 4 – Possíveis respostas naturais de um circuito RLC com excitação a um degrau.

### 2.3 Fenômeno de Batimento em Circuitos RLC

O fenômeno conhecido por “batimento” é o resultado da superposição de duas ondas com frequências ligeiramente diferentes. Batimentos são observados com ondas elétricas, ondas sonoras, mecânicas, entre outras [2].

Para entender o que é batimento, considere duas ondas com mesma amplitude, porém com frequências ligeiramente diferentes ( $f_1$  e  $f_2=f_1+\Delta f$ ), como indicadas na Figura 5.a, sendo:

$$v_1(t) = A\cos(2\pi f_1 t)$$

$$v_2(t) = A\cos(2\pi f_2 t)$$

A superposição das duas ondas resultará na função resultante  $v(t)$ , representada na Figura 5.b, onde:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = A(\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t) \quad (17)$$

Observa-se que há interferência construtiva quando os sinais estão em fase, e interferência destrutiva quando  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  estão em oposição de fase.

Utilizando-se a identidade trigonométrica:

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Podemos representar  $v(t)$  (17) da seguinte forma:

$$v(t) = \left[2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1-f_2}{2}\right)t\right]\cos 2\pi\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)t \quad (18)$$

Pela expressão (18), deduzimos que a onda  $v(t)$  oscila com uma frequência  $\frac{f_1+f_2}{2}$ , e sua amplitude varia lentamente com o tempo, com uma frequência  $\frac{f_1-f_2}{2}$ , como ilustrado na Figura 5.b.



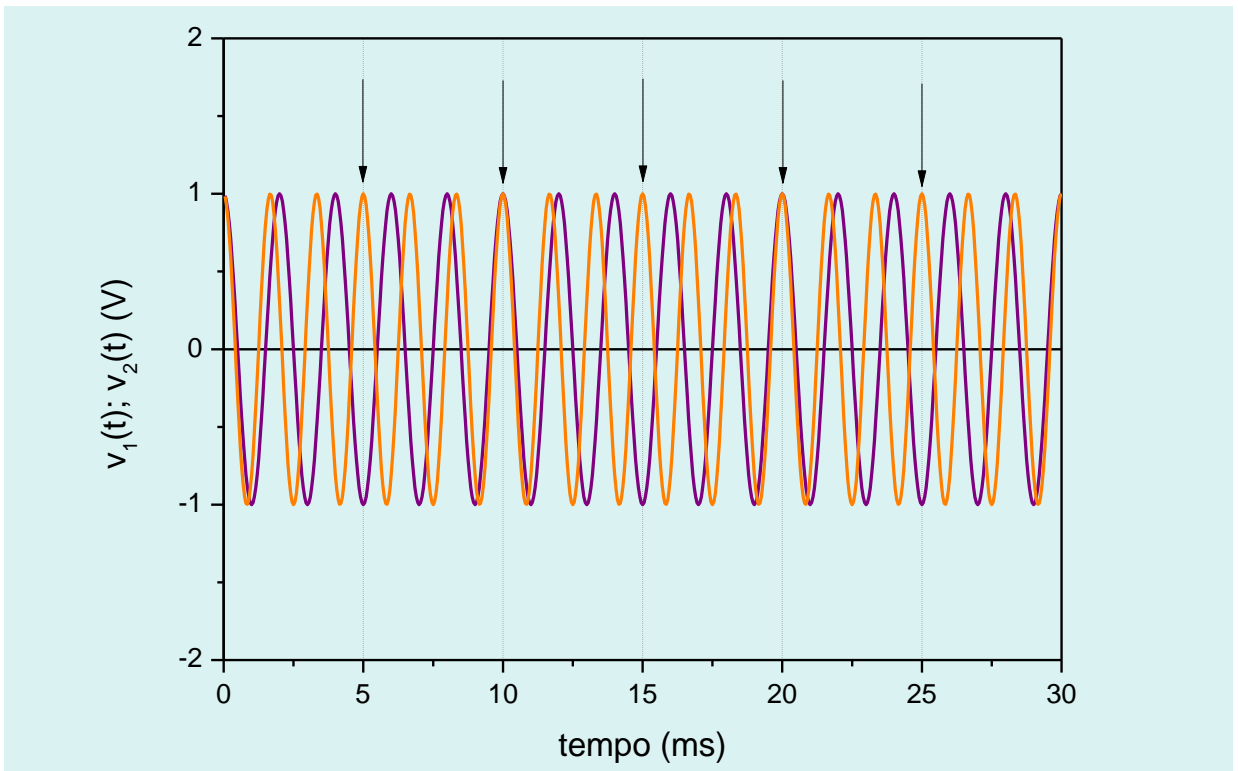
O batimento vem a ser a variação periódica da intensidade do sinal gerado pela superposição de duas ondas com frequências ligeiramente diferentes. A frequência de batimento é definida como o número de máximos da envoltória de  $v(t)$  por segundo, sendo dada pela expressão:

$$f_b = f_1 - f_2$$

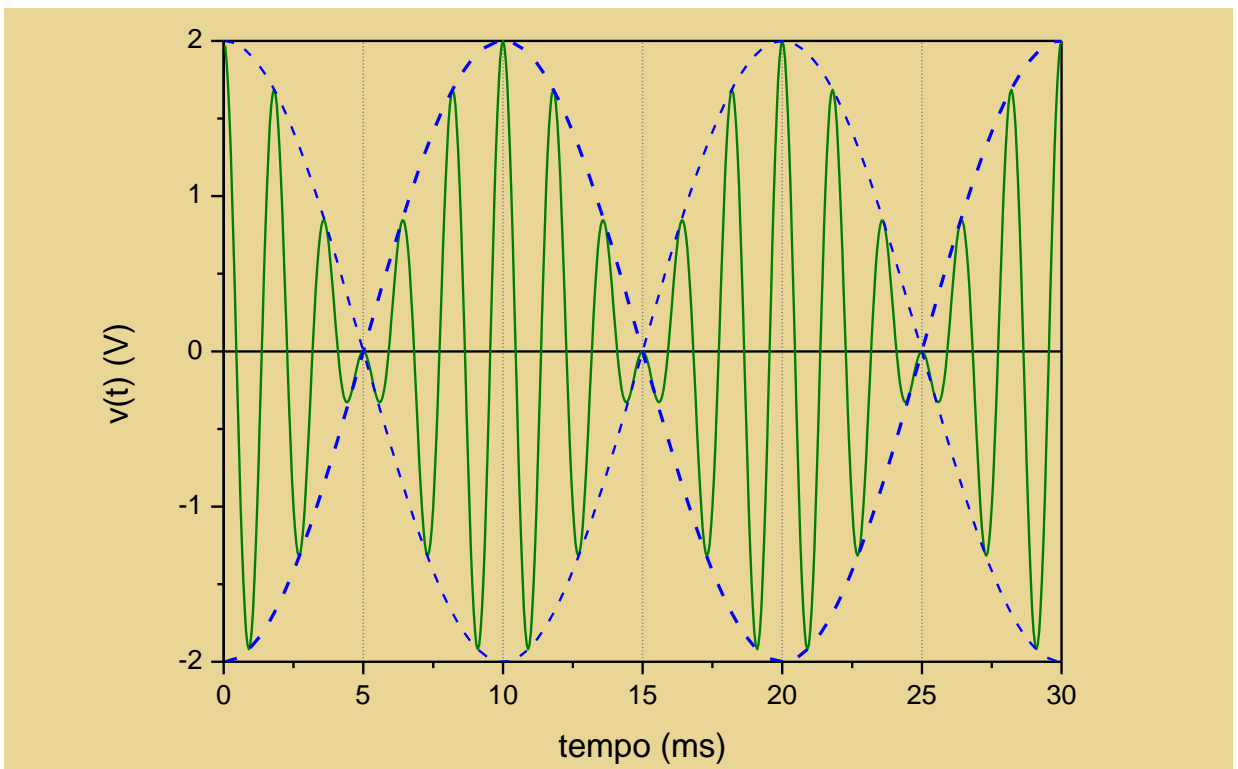
Observe que existem dois máximos de amplitude para cada período da função tracejada da Figura 5.b, que representa a envoltória de  $v(t)$ .

Nos circuitos RLC este fenômeno poderá ser observado no intervalo correspondente à resposta em regime transitório, toda vez que o circuito for alimentado por uma onda senoidal de frequência muito próxima da frequência natural do circuito [2]. Sua visualização será destacada para os circuitos que tenham baixas perdas resistivas.

A superposição da resposta de dois circuitos RLC submetidos à excitação ao degrau (ou onda quadrada), cujas frequências de oscilação amortecidas são próximas entre si, causará por sua vez o batimento amortecido. Exploraremos este fenômeno neste laboratório.



(a)



(b)

Figura 5 – a) Representação gráfica de duas ondas senoidais ( $v_1(t)$  e  $v_2(t)$ ) em função do tempo, com frequências ligeiramente diferentes entre si. b) Representação gráfica da soma das duas funções senoidais ( $v_1(t)+v_2(t)$ ), evidenciando o fenômeno de batimento.

## **Bibliografia**

1. Nilsson, J.W.; Riedel, S.A.. **Circuitos Eléctricos**, 6<sup>a</sup> Edição, Editora LTC.
2. Orsini, L.Q.; Consonni, D.. **Curso de Circuitos Eléctricos**, 2<sup>a</sup> Edição, Editora Edgard Blucher Ltda.