4320195-Física Geral e Exp. para a Engenharia I - 2^a Prova - 17/05/2012

Nome:____ N^o USP: _______________

Professor:____ Turma: _______________

- A duração da prova é de 2 horas.
- Material: lápis, caneta, borracha, régua. O uso de calculadora é proibido
- Deixe indicada a raiz de números que não sejam quadrados perfeitos. Não é necessário fazer aproximações.
- Preencha todas as folhas, inclusive esta, com o seu nome, número USP e o nome do seu professor, de forma legível.
- Resolva cada exercício começando na frente da folha de respostas possuindo o mesmo número que o exercício, utilizando, se for necessário, o verso da folha.
- Justifique todas as suas respostas com comentários, fórmulas e cálculos intermediários, sem esquecer as unidades das grandezas físicas pedidas.
- Deixe sobre a carteira documento de identificação (identidade ou carteira da USP)
- Revisão da prova e resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ $\quad \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2}$ $\quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$

$\int x^n dx = \frac{1}{(n+1)}x^{n+1}$ $\quad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$

---

(1) Uma mola de massa desprezível com constante k está presa a um bloco de massa M em repouso sobre uma mesa sem atrito. A outra extremidade da mola está fixa a uma parede. Um projétil de massa m_p é disparado na direção do bloco, vindo pela esquerda com velocidade v_0, conforme mostra a Figura 1. Quando o projétil atinge o bloco, este se aloja no bloco (assuma que esse processo acontece instantaneamente).

(0,5) (a) Qual a velocidade do bloco+projétil imediatamente após o projétil se alojar no bloco (v_a)?

(1,0) (b) Qual o deslocamento máximo em relação à posição de equilíbrio do bloco+projétil?

(1,0) (c) Considere agora um novo disparo com a presença de atrito entre o bloco e a mesa. A força de atrito é constante com magnitude f. Quando o bloco+projétil retorna à posição de equilíbrio $x = 0$ pela primeira vez a velocidade medida é a metade da velocidade imediatamente após o projétil se alojar no bloco ($v_f = \frac{v_a}{2}$) Figura 2. Qual foi o deslocamento máximo em relação à posição de equilíbrio do bloco+projétil neste caso, isto é antes de retornar à posição de equilíbrio $x = 0$ pela primeira vez?

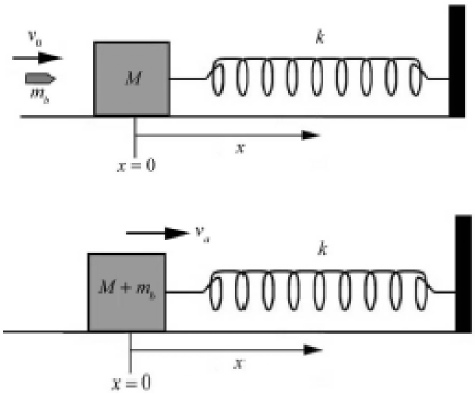


Figura 1: Itens(a) e (b)

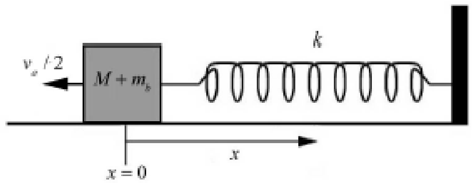


Figura 2: Item (c)

(a) Neste caso temos uma colisão completamente inelástica. Aplicando a conservação de momento:

$m_p v_0 = (M + m_p) v_a$

$v_a = \frac{m_p v_0}{(M+m_p)}$

(b) logo depois da colisão inelástica, como a resultante das forças externas atuando no sistema é nula e a força elástica é conservativa, há a conservação da energia mecânica. Portanto a energia mecânica do sistema na posição de equilíbrio logo após a colisão corresponde á energia cinética do bloco+projétil, pois a energia potencial da mola é nula na posição de equilíbrio. A energia quando o deslocamento é máximo corresponde á energia potencial da mola naquela posição (a velocidade do bloco+projétil é nula nesta posição). Assim:

$\frac{1}{2}(M + m_p) v_a^2 = \frac{1}{2} k x_{max}^2$

$x_{max} = \sqrt{\frac{(M+m_p)}{k}} v_a$ substituindo v_a

$x_{max} = \sqrt{\frac{1}{k(M+m_p)}} m_p v_0$

que corresponde à amplitude de oscilação da mola.

(c) O trabalho da força de atrito é dado por:

$W = -fd$ onde d é a distância total percorrida

O trabalho da força de atrito será igual á variação da energia mecânica do sistema logo após a colisão (E_a) até quando o bloco+projétil retorna à posição de equilíbrio $x = 0$ pela primeira vez (E_1).

$W = \Delta E = E_1 - E_a$

A energia em $x = 0$: $E_1 = \frac{1}{2}(M + m_p)(\frac{v_a}{2})^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}(M + m_p) v_a^2) = \frac{1}{4} E_a$

$-fd = \frac{1}{4}E_a - E_a = -\frac{3}{4}E_a = -\frac{3}{4}(\frac{1}{2}(M+m_p)v_a^2)$

$-fd = -\frac{3}{8}\frac{m_p^2}{(M+m_p)f}v_0^2$

$d = \frac{3}{8}\frac{m_p^2}{(M+m_p)f}v_0^2$

$x_{max} = \frac{d}{2} = \frac{3}{16}\frac{m_p^2}{(M+m_p)f}v_0^2$

(2) As duas massas à direita, m_2 e m_3 conforme mostra figura abaixo, estão ligeiramente separadas e inicialmente em repouso; a massa da esquerda m_1 incide sobre as outras duas com velocidade v_0. Supondo que as colisões sejam diretas e elásticas:

(1,0) (a) Achar a velocidade que a segunda massa m_2 adquire. Considerar o choque elástico e frontal.

(1,0) (b) Achar a velocidade que a última massa m_3 adquire.

(0,5) (c) Mantendo m_1 e m_3 constantes, calcule o valor de m_2 para que a velocidade do terceiro corpo seja máxima.

Método longo

(a) No caso da colisão elástica temos a conservação do momento e da energia mecânica do sistema. Assim:

$m_1V_0 = m_1V_1 + m_2V_2$ (1)

$\frac{1}{2}m_1V_0^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2$ (2)

Da equação (1) temos:

$V_1 = V_0 - \frac{m_2}{m_1}V_2$

Substituindo em (2)

$m_2V_2^2 = m_1V_0^2 - m_1(V_0 - \frac{m_2}{m_1}V_2)^2$

$m_2V_2^2 = m_1V_0^2 - m_1V_0^2 + 2V_0V_2m_2 - \frac{m_2^2V_2^2}{m_1}$

$V_2^2 - 2V_0V_2 + \frac{m_2V_2^2}{m_1} = 0$

$(1+\frac{m_2}{m_1})V_2 = 2V_0$

$V_2 = \frac{2m_1V_0}{(m_1+m_2)}$

(b) Analogamente

$V_3 = \frac{2m_2V_2}{(m_2+m_3)}$

$V_3 = \frac{4m_1m_2V_0}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}$

Método curto

(a) A velocidade obitida pelo segundo corpo após a colisão:

$V_2 = 2V_{cm12} = \frac{2m_1V_0}{(m_1+m_2)}$

(b)Por analogia, a velocidade obtida pelo terceiro corpo após a colisão:

$V_3 = 2V_{cm23} = \frac{2m_2V_2}{(m_2+m_3)} = \frac{4m_1m_2V_0}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}$

(c)Para encontrar o ponto de máximo da velocidade faz-se a derivada em relação à massa igual a zero.

$\frac{dV_3}{dm_2} = 0$

$\frac{dV_3}{dm_2} = 4m_1V_0\frac{d}{dm_2}(\frac{m_2}{(m_1m_2+m_1m_3+m_2^2+m_2m_3)}) = 0$

$\frac{d}{dm_2}(\frac{1}{(m_1+\frac{m_1m_3}{m_2}+m_2+m_3)}) = 0$

$(1-\frac{m_1m_3}{m_2^2}) = 0$

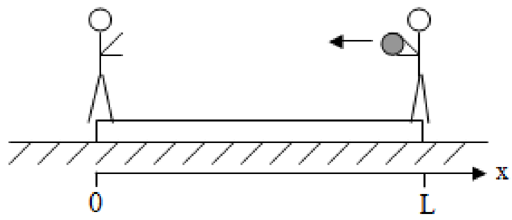
$m_2 = \sqrt{m_1m_3}$

(3) Duas pessoas, de mesma massa M, estão de pé e presas às extremidades opostas de uma prancha, de comprimento L e massa desprezível, que inicialmente se encontra em repouso sobre uma pista de gelo, como mostrado na figura. A pessoa da direita joga, com certa velocidade $\vec{v}$ horizontal, uma bola de massa m em direção à outra pessoa que consegue pegá-la. Despreze os efeitos da resistência do ar e do atrito entre a prancha e a pista de gelo. Para um observador parado na borda da pista:

(0,5) (a) Encontre a equação que descreve a posição do centro de massa (CM) do conjunto prancha + pessoas + bola enquanto a bola vai da direita para a esquerda. Justifique sua resposta com argumentos físicos.

(0,5) (b) Encontre as equações da velocidade e da posição do centro da prancha (que inicialmente vale $L/2$) enquanto a bola vai da direita para a esquerda, em função das massas e da velocidade v da bola.

(1,0) (c) Determine a posição da pessoa da direita, no momento em que a bola é



agarrada pela pessoa da esquerda, usando o referencial da figura.

(0,5) (d) O que acontece com o conjunto prancha + pessoas + bola após que a pessoa da esquerda agarrou a bola? Justifique sua resposta com argumentos físicos.

(a) $F_{ext_x} = 0 = \frac{dP_x}{dt}$

$P_x = constante = 0$

$R_{CM} = constante = \frac{(m+M)L}{(2M+m)}$

(b) Como o CM não pode se deslocar, enquanto a bola se desloca da direita para a esquerda, a prancha deve se deslocar da esquerda para a direita. Durante o movimento da bola $P = constante = 0$

$0 = 2MV - mv$

$V = \frac{mv}{2M}$

Como não existem forças externas ao longo do movimento, uma vez que a pessoa da direita lançou a bola, a prancha vai se deslocar para a direita com velocidade constante ($\frac{mv}{2M}$) e a equação da posição do seu centro será:

$X = \frac{L}{2} - \frac{mvt}{2M}$

(c) No final do movimento, as duas pessoas se deslocaram para a direita de uma mesma distância x em relação às suas posições iniciais.

$X_{CM} = \frac{x(m+M)+(L+x)M}{(2M+m)} = X_{CM_0} = \frac{(m+M)L}{(2M+m)}$

$xM + xm + ML + xM = mL + ML$

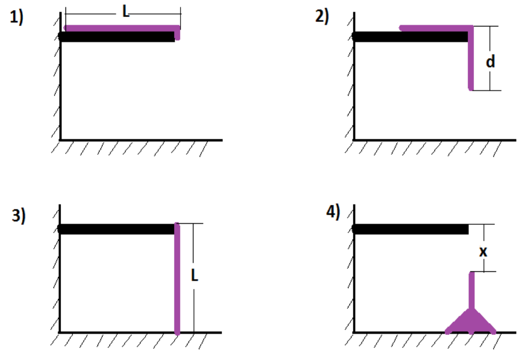
$x(2M + m) = mL$

$x = \frac{mL}{(2M+m)}$

(d) Como a posição do CM é constante o conjunto prancha + pessoas + bola depois que a pessoa da esquerda agarrou a bola permanece em repouso.

(4) Uma corrente de densidade linear λ constante, comprimento $L = 10,0m$ e massa $M =$

$0,5kg$ está sobre uma mesa horizontal cujo comprimento é ligeiramente inferior a L de modo que uma pequena parte da corrente, de comprimento desprezível, fica pendurada. A parte da corrente que está sobre a mesa começa aos poucos a deslizar sem atrito. Pede-se calcular:



(0,5) (a) o trabalho realizado pela força gravitacional quando o comprimento da parte pendurada atinge $d = 2,0m$ (item 2) da figura.

(0,5) (b) a velocidade da corrente no instante em que a parte pendurada d é igual a $2,0m$.

(0,5) (c) a aceleração quando $d = 2,0m$.

(1,0) (d) Supondo agora que a corrente tenha escorregado completamente da mesa como mostra a figura acima (item 3), pede-se calcular a força exercida pelo solo sobre a corrente (força normal) após a corrente ter escorregado uma distancia x igual a $2,0m$, como indicado pela figura acima (item 4). Suponha para tanto que a velocidade inicial com que a corrente começa a cair é nula.

Obs: Considere $g = 10m/s^2$

(a) O trabalho realizado pela força gravitacional é por definição igual a:

$W_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{F}.\mathbf{dr} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{d}} F.dy$

Como a massa é variável, a força também será, portanto temos que:

$F = mg$

onde $m = y.\lambda$ e λ é a densidade linear da corrente. Portanto;

$W_{1,2} = \int_0^d \lambda gydy = \frac{M}{2L}gd^2 = 1J$

(b) Usando o teorema do trabalho e energia cinética temos que:

$\frac{1}{2}MV_f^2 - \frac{1}{2}MV_i^2 = \int_0^d F.dy$

$\frac{1}{2}MV_f^2 = \int_0^d \lambda gydy = \frac{1}{2}\lambda gd^2 \Rightarrow L\lambda V_f^2 = \lambda gd^2$

$V_f = \sqrt{gd^2/L} = 2m/s$

(c) A aceleração pode ser calculada pela segunda lei de Newton, ou seja

$F = Ma \Rightarrow a = \frac{F}{M} = \frac{mg}{\lambda L} = \frac{\lambda l g}{\lambda L} = \frac{lg}{L} = 2m/s^2$

(d) A força exercida pelo solo é por definição igual a:

$F = \frac{dP}{dt} = \frac{d(mV)}{dt} = \frac{d(x\lambda V)}{dt} = \frac{M}{L}\frac{d(xV)}{dt}$

Portanto temos que:

$F = \frac{M}{L}V\frac{dx}{dt} + \frac{M}{L}x\frac{dV}{dt} = \frac{M}{L}V^2 + \frac{M}{L}xg$

Porém $V^2 = 2gx$ Logo temos que:

$F = 2gx\frac{M}{L} + gx\frac{M}{L} = 3gx\frac{M}{L} = 3N$