- Equação de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow v_{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}}$$

- Equação de onda para densidade e pressão

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = v_{\mathrm{s}}^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v_{\mathrm{s}}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

- Em 3 dimensões

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = v_{\mathrm{s}}^2 \nabla^2 \rho \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v_{\mathrm{s}}^2 \nabla^2 p$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Para ondas senoidais, com $(\omega = k v_{\mathsf{s}})$

$$u(x,t) = A_u \cos(\omega t - kx)$$

$$\delta(x,t) = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \rho_0 k A_u \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

$$p(x,t) = -B \frac{\partial u}{\partial x} = B k A_u \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

$$\omega A_u = \frac{1}{\rho_0 v_{\mathsf{s}}} A_p \qquad A_\rho = \frac{\rho_0}{B} A_p$$

Intensidade das Ondas Sonoras Harmônicas

Intensidade: energia média transmitida através da seção por unidade de tempo e área

A força exercida sobre uma camada fluida, na posição x, devido à passagem da onda é:

$$F = p(x,t)\,A = \mathbb{P}\,A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

A potência instantânea é

$$F\,\frac{\partial u}{\partial t} = \omega\,A\,\mathbb{P}\,\mathbb{U}\,\mathrm{sen}^2(kx - \omega t + \delta)$$

Com isso, a intensidade da onda fica:

$$\boxed{I = \frac{1}{A}\,\overline{\left(F\,\frac{\partial u}{\partial t}\right)} = \frac{1}{2}\,\omega\,\mathbb{P}\,\mathbb{U} = \frac{1}{2}\,\rho_0\,v\,\omega^2\,\mathbb{U}^2}$$

Ou, em termos da pressão:

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\,\frac{\mathbb{P}^2}{\rho_0 v}}$$

$\Rightarrow$ mais conveniente: detectores de pressão

Em termos da densidade: $$I = \frac{1}{2}\frac{v^3\Omega^2}{\rho_0}$$

Nível de Intensidade Sonora: Decibel

Devido ao grande alcance de intensidades audíveis, usa-se, na prática, uma escala logarítmica, onde o nível de intensidade do som (β) é definido por

$$\boxed{\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \text{ db (decibéis)}}$$

Intensidade de referência, tomada como a do limiar de audibilidade: $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$

Fonte do som	β (db)	Fonte do som	β (db)
Limiar de audibilidade	0	Conversa comum	60
Farfalhar de folhas	10	Aspirador de pó	70
Murmúrio	20	Rua barulhenta	90
Apito	30	Sirene/Concerto de Rock	120
Som de um mosquito	40	Tiro	130
Música suave	40	Avião próximo	150

$$\boxed{\frac{I_{\text{máx}}}{I_0} = 10^{12} \Longrightarrow \beta = 120 \text{ db}}$$ limiar de sensação dolorosa

- Um incremento de $10\ \mathrm{dB}$ em β corresponde a um fator 10 na intensidade.
- Um incremento de $1\ \mathrm{dB}$, corresponde a um fator $10^{0,1} = 1{,}26$ na intensidade.

- Limiar de audibilidade para som de $1\ \mathrm{kHz}$

$$I_0 = 1{\times}10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$$

- As amplitudes correspondentes a esta intensidade são

$$A_p = 2{,}9{\times}10^{-5}\ \mathrm{Pa} = 2{,}8{\times}10^{-10}\ \mathrm{atm}$$

$$A_\rho = 2{,}4{\times}10^{-10}\ \mathrm{kg/m^3} = 2{,}0{\times}10^{-10}\rho_0$$

$$A_u = 1{,}1{\times}10^{-11}\ \mathrm{m} = 0{,}11\ \text{Å}$$

- Limiar de dor para som de $1\ \mathrm{kHz}$

$$I_{\text{máx}} \approx 1\ \mathrm{W/m^2} = 10^{12} I_0$$

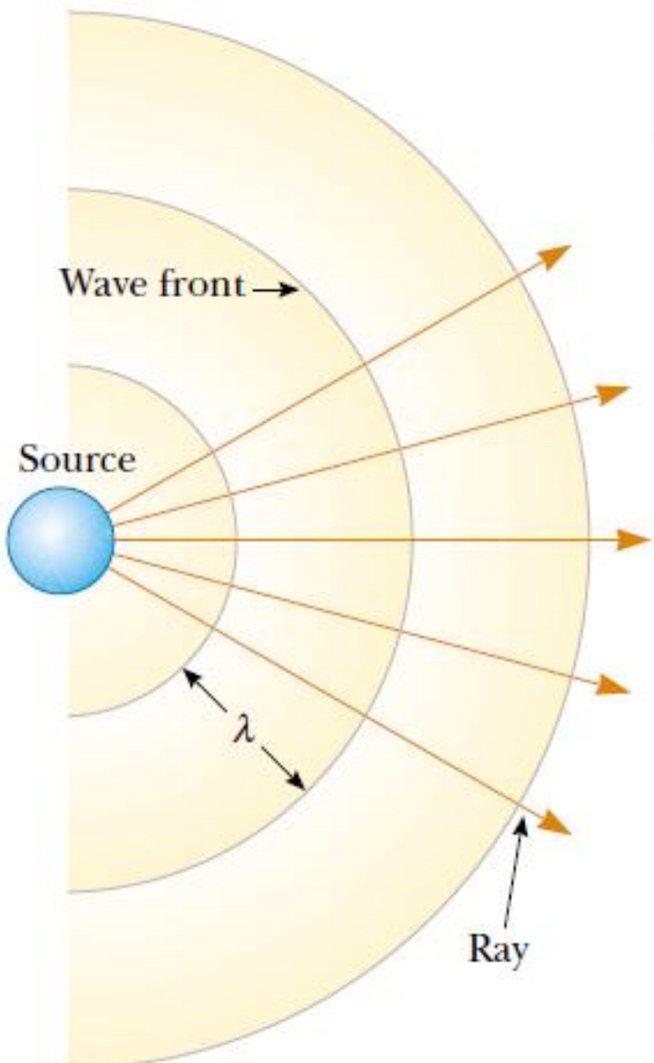
- Para o ar nas mesmas condições as amplitudes correspondentes a esta intensidade são 10^6 maiores que no limiar de audibilidade:

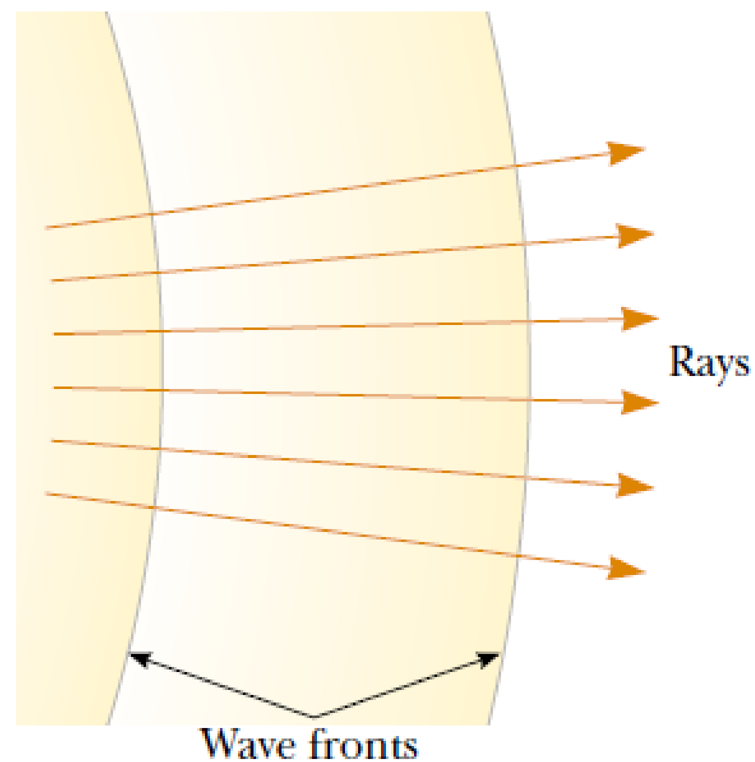
$$A_p = 29\ \mathrm{Pa} = 2{,}8\times10^{-4}\ \mathrm{atm}$$

$$A_\rho = 2{,}4\times10^{-4}\ \mathrm{kg/m^3} = 2{,}0\times10^{-4}\rho_0$$

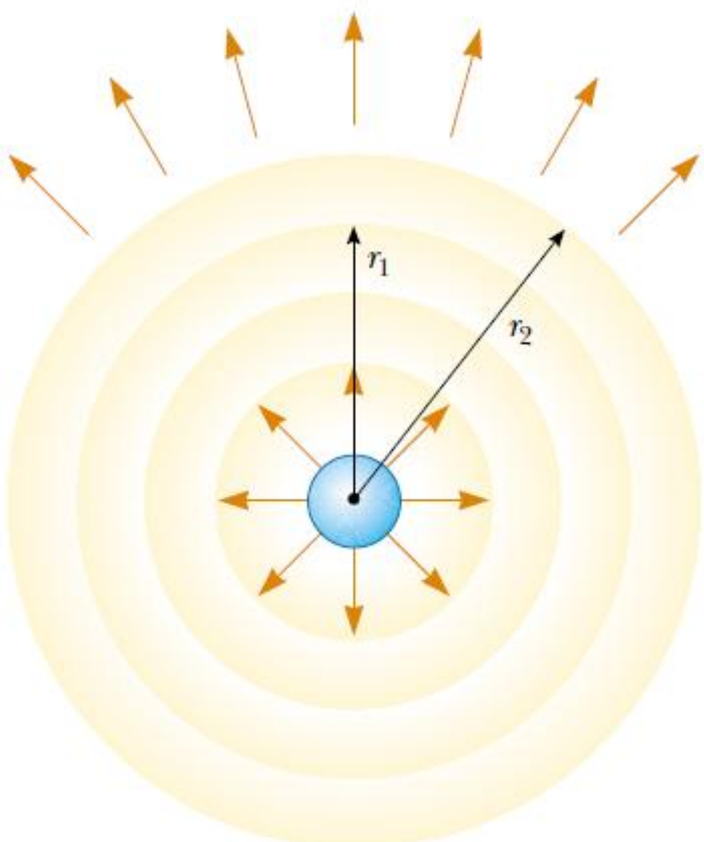
$$A_u = 1{,}1\times10^{-5}\ \mathrm{m} = 11\ \mu\mathrm{m}$$

Ondas Esféricas





Se um corpo esférico ou puntiforme oscila de modo que seu raio varia harmonicamente com o tempo, uma onda sonora esférica é produzida, propagando energia igualmente em todas as direções. Sabendo a potência média emitida, a intensidade da onda é $I = \dfrac{\overline{P}}{4\pi r^2}$

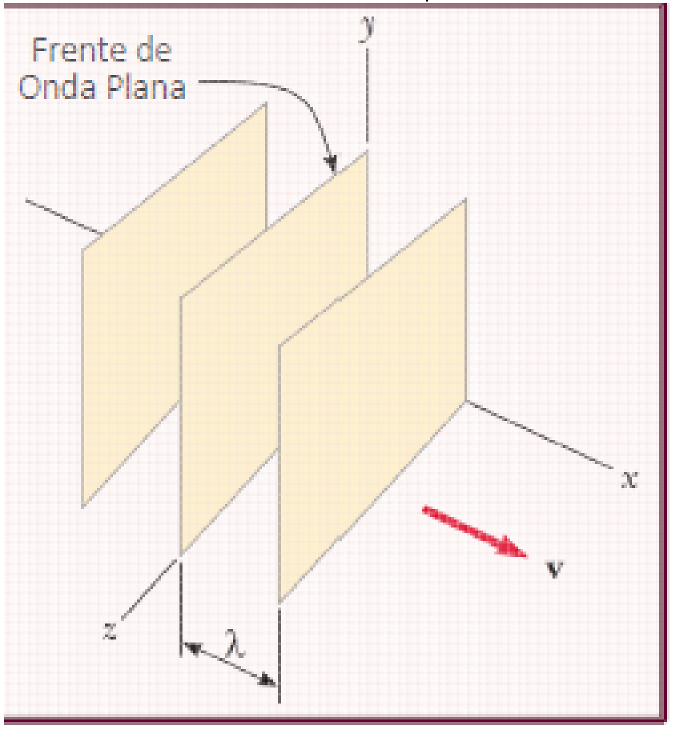


$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

mostrando que a amplitude da onda varia com $1/r$. Assim, a função de onda que representa uma onda esférica harmônica progressiva tem a forma

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{A}{r}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta)$$

Ondas Esféricas e Planas



Assumindo a direção de propagação no eixo x, as frentes de onda planas são paralelas ao plano yz. Neste caso, a função de onda depende só de x e t e tem a forma idêntica à de uma onda progressiva em uma dimensão

$$\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

Exemplo: Uma fonte sonora puntiforme emite ondas com uma potência média de 80 W. Encontrar a intensidade a uma distância de 3,0 m da fonte e a distância para a qual o nível de intensidade sonora é 40 db.

$$\boxed{I = \frac{\overline{P}}{4\pi r^2} = \frac{80}{4\pi(3)^2} = 0,707 \text{ W/m}^2}$$

$$\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 40 \text{ db, onde } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

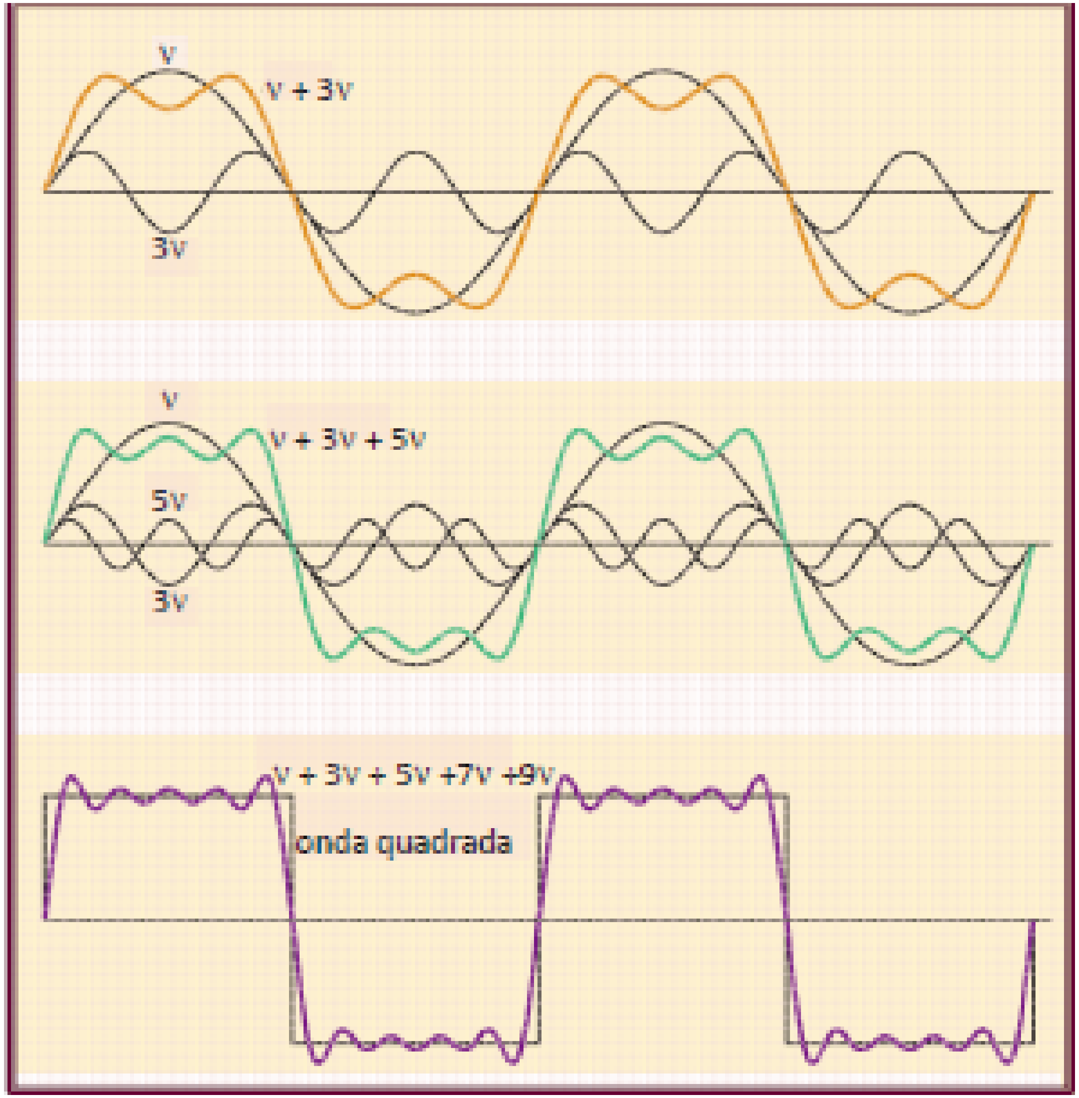
$$\log I - \log(10^{-12}) = \frac{40}{10}$$

$$\log I = 4 - 12 = -8 \Longrightarrow I = 10^{-8} \text{ W/m}^2$$

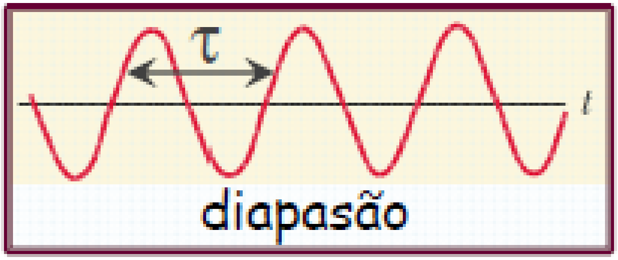
$$\boxed{r = \sqrt{\frac{\overline{P}}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{80}{4\pi \times 10^{-8}}} = 2,52 \times 10^4 \text{ m}}$$

Harmônicos

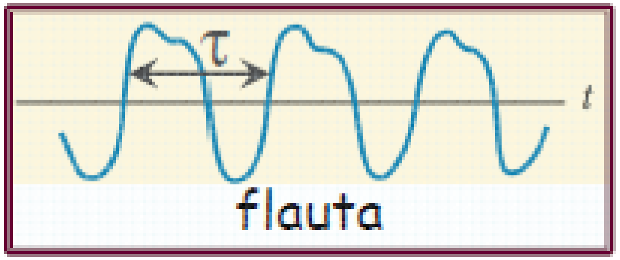
$$y(t) = \sum_n \left[a_n \cos(2\pi\,\nu_n t) + b_n \,\text{sen}\,(2\pi\,\nu_n t)\right]$$

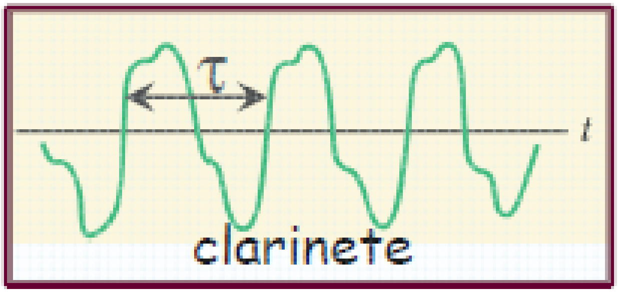


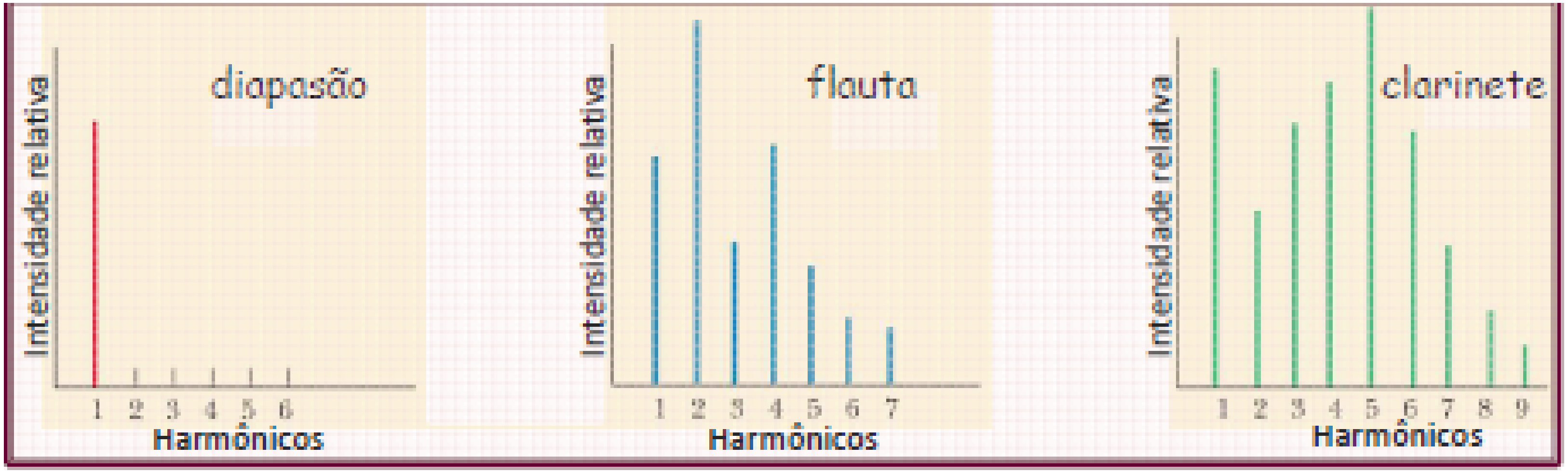
Sons Musicais



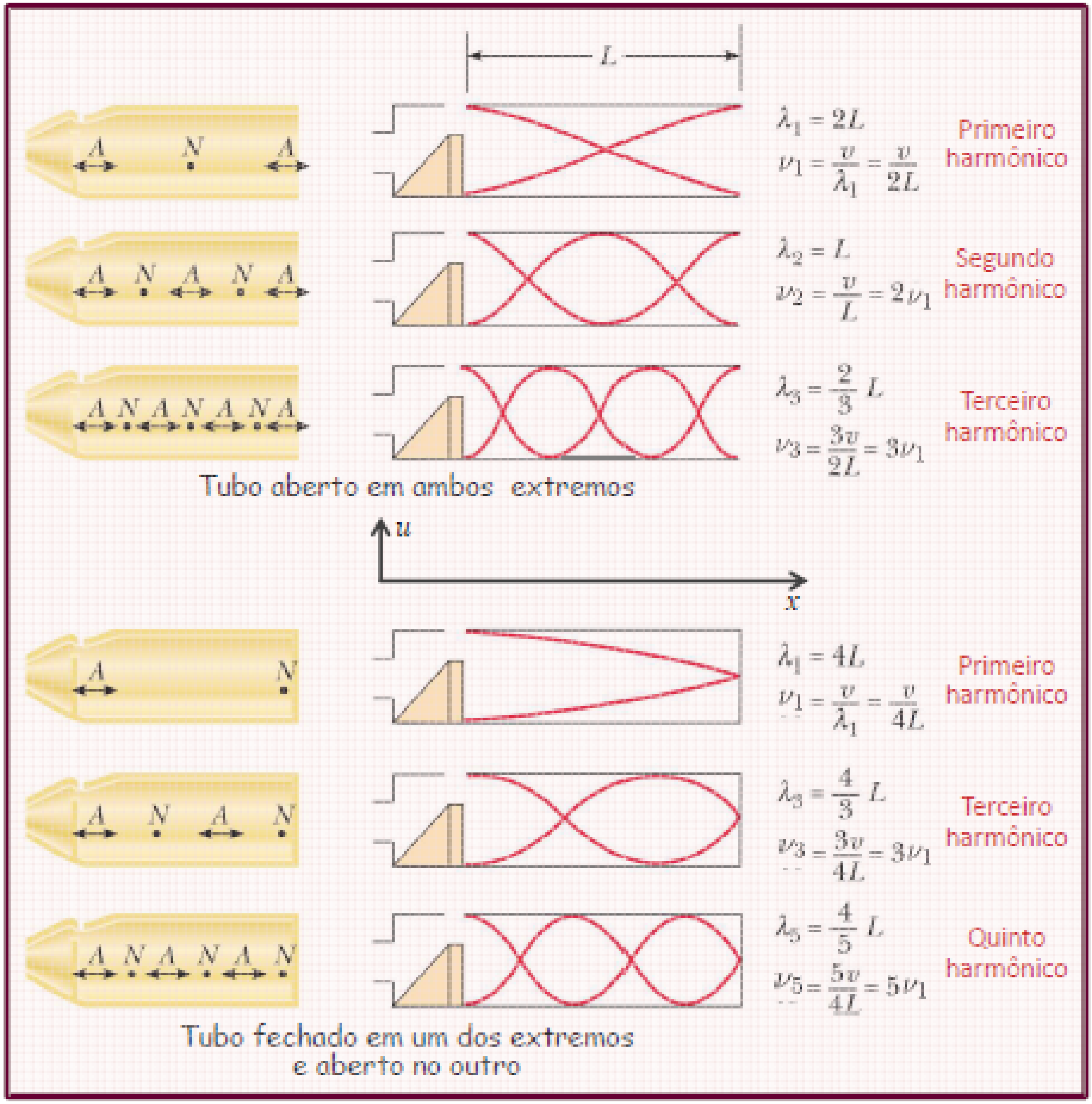
Timbres

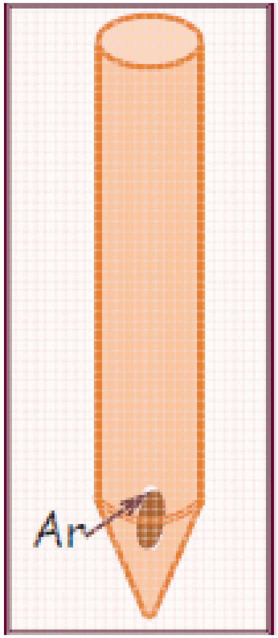




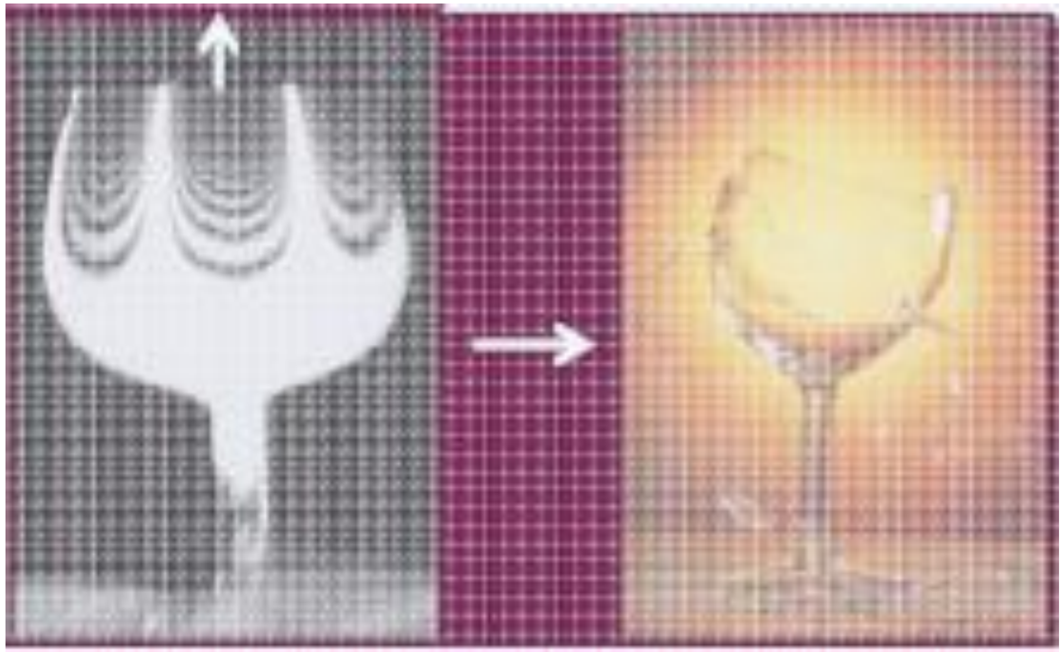


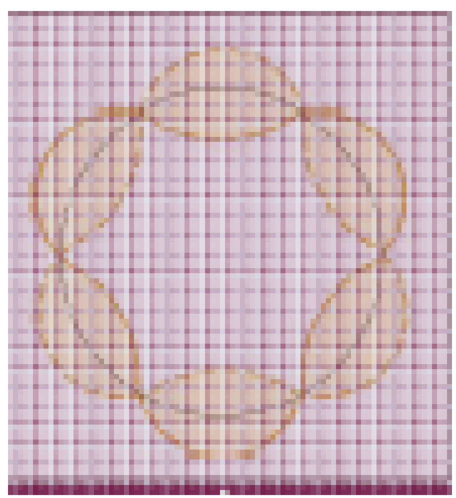
Fontes Sonoras: Colunas de Ar





Ressonância





Ressonância

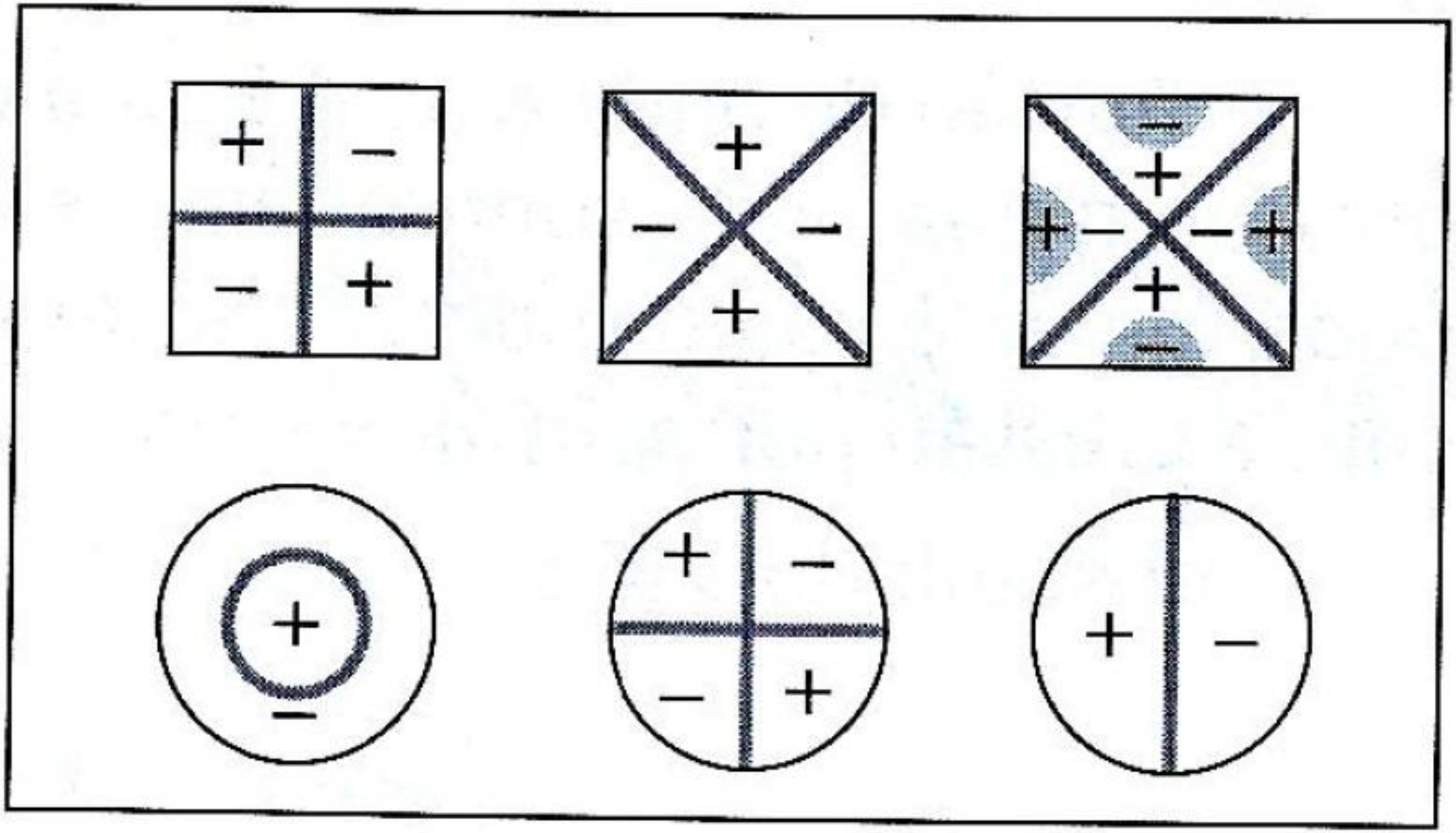
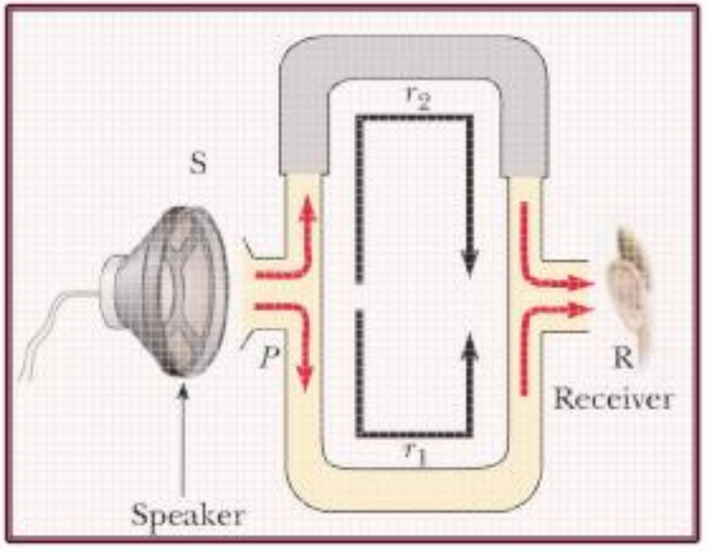


Figura 6.13 — Figuras de Chladni

Interferência de Ondas



$$u(r_1,t)=U_1\cos(kr_1-\omega t)$$
$$u(r_2,t)=U_2\cos(kr_2-\omega t)$$

$$\frac{\varphi}{2\pi}=\frac{\Delta r}{\lambda}\Longrightarrow \Delta r=\frac{\varphi}{2\pi}\lambda$$

Usando a noção de diferença de caminho percorrido pelas ondas, podemos expressar as condições para interferência construtiva e interferência destrutiva Se a diferença de caminho é um múltiplo de $\lambda/2$, então a fase é $\varphi = 2n\pi$ (n=0,1,2,...) e a interferência é <u>construtiva</u>. Se a diferença de caminho for um múltiplo ímpar de $\lambda/2$, então $\varphi = (2n+1)\pi$ (n=0,1,2,...) e a interferência é <u>destrutiva</u>.

Interferência Construtiva $$\boxed{\varphi=2n\pi \Longleftrightarrow \Delta r=(2n)\,\frac{\lambda}{2}}$$

Interferência Destrutiva $$\boxed{\varphi=(2n+1)\pi \Longleftrightarrow \Delta r=(2n+1)\,\frac{\lambda}{2}}$$

$$(n=0,1,2,3,\ldots)$$

Interferência de ondas

3) Batimentos e velocidade de grupo

Vamos considerar a superposição de duas ondas progressivas harmônicas que se propagam no mesmo, têm a mesma amplitude e constante de fase nula, mas têm frequências ligeiramente diferentes ($\therefore$ diferentes número de onda)

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A\cos\left(k_1 x - \omega_1 t\right) \\ y_2(x,t) = A\cos\left(k_2 x - \omega_2 t\right) \end{cases}$$

$$\text{Onde} \quad \begin{cases} \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \overline{\omega} = \frac{1}{2}\left(\omega_1 + \omega_2\right), \text{com } \omega_1 > \omega_2 \\ \Delta k = k_1 - k_2 \ll \overline{k} = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right), \text{com } k_1 > k_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y = y_1 + y_2 = A\left\{\cos\left[\left(\overline{k} + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\overline{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right] + \cos\left[\left(\overline{k} - \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\overline{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]\right\}$$

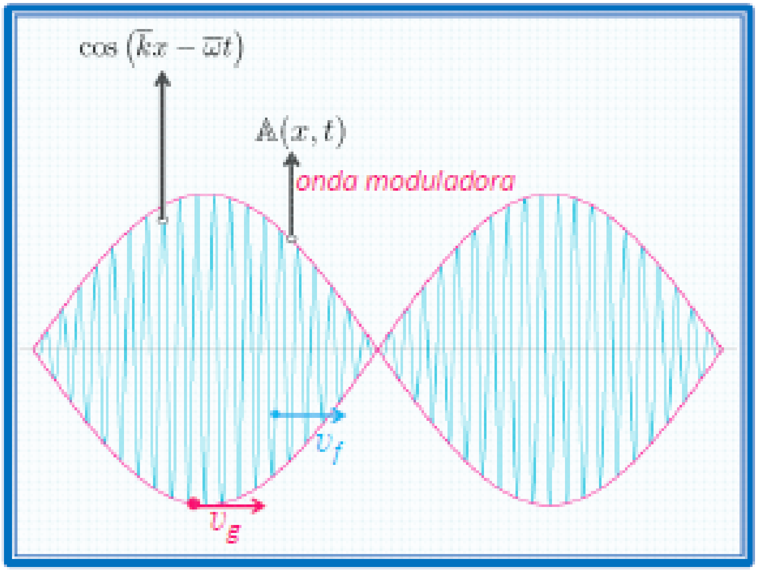
$$\boxed{y(x,t) = \mathbb{A}(x,t)\cos\left(\overline{k}x - \overline{\omega}t\right)}$$

alta frequência

$$\boxed{\mathbb{A}(x,t) = 2\,A\cos\left[\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right]}$$

baixa frequência

Batimentos e velocidade de grupo



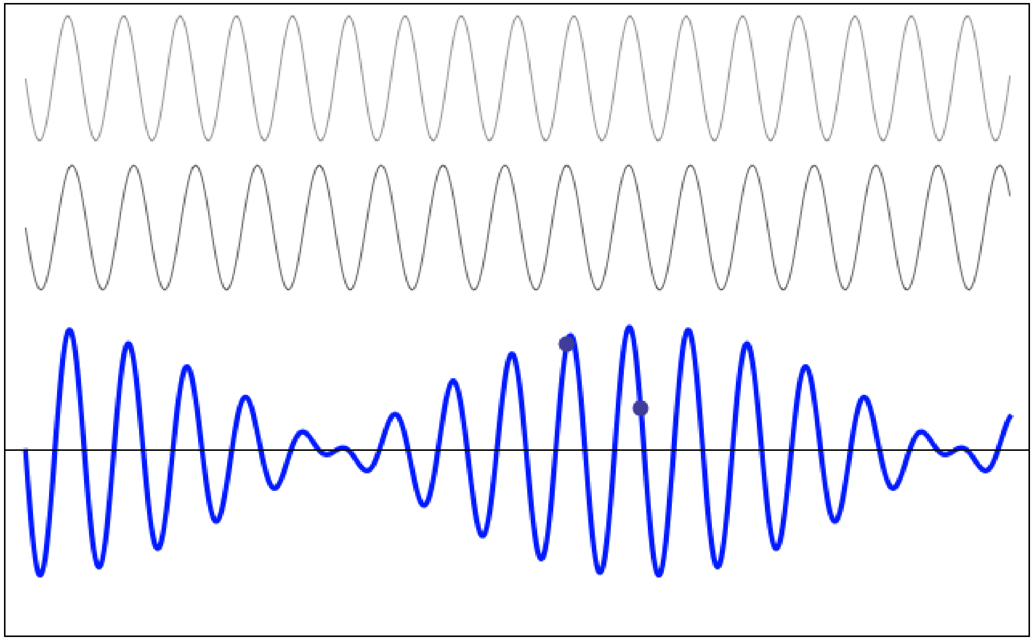
A fase desta onda é dada por:

$$\varphi(x,t) = \bar{k}x - \bar{\omega}t$$

$$v_f = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

$\mathbb{A}$ é constante.

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

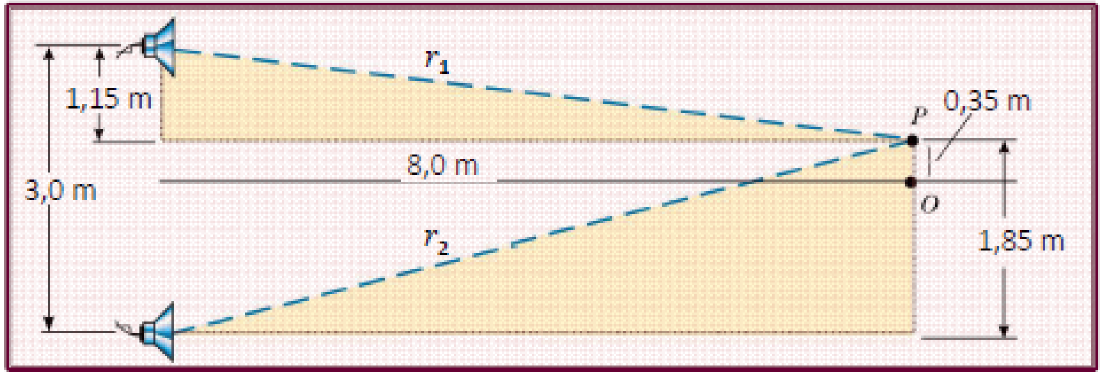


$$\omega_{Bat} = 2\frac{\Delta\omega}{2} = \omega_1 - \omega_2$$

$$\nu_{bat} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2$$

Interferência de Ondas

Exemplo: Um par de *speakers* estão separados pela distância de 3,0 m e estão ligados em uma mesma fonte oscilante. Um ouvinte, originalmente na posição O, desloca-se para o ponto P e alcança o primeiro mínimo de intensidade do som. Qual é a frequência da fonte? (usar v_{som} = 343 m/s)



Pela geometria da figura podemos encontrar os valores de r_1 e r_2:

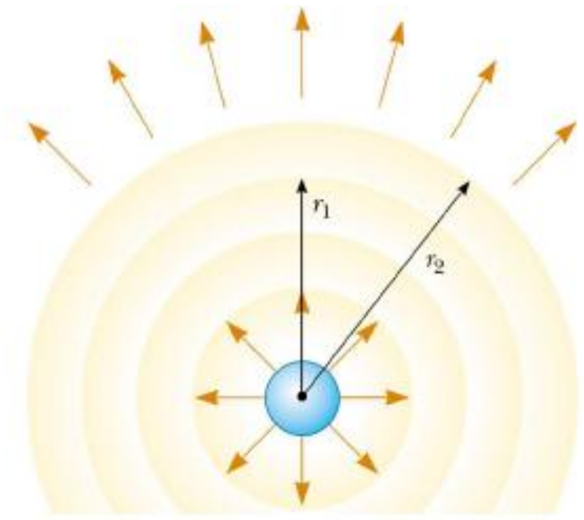
$$r_1 = \sqrt{(8,0)^2 + (1,15)^2} = 8,08 \text{ m} \qquad r_2 = \sqrt{(8,0)^2 + (1,85)^2} = 8,21 \text{ m}$$

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 0,13 = \frac{\lambda}{2} \Longrightarrow \lambda = 0,26 \text{ m}$$

primeiro mínimo

$$\boxed{\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{343}{0,26} = 1,3 \text{ kHz}}$$

Ondas Esféricas e Planas



$$P_S = \frac{d\overline{E}}{dt} = cte$$

$$I(r) = \frac{P_S}{A(r)} = \frac{P_S}{4\pi r^2}$$

$$U = cte\sqrt{I} = cte\frac{1}{r}$$

$$\varphi(r,t) = \frac{a}{r}\cos\left(kr - \omega t + \delta\right)$$

Ondas Esféricas e Planas

Para distâncias grandes da fonte, quando comparadas com o comprimento de onda, podemos aproximar a frente de onda por um plano. Qualquer pequena porção da onda esférica, longe da fonte, pode ser considerada como uma onda plana. A propagação de uma onda plana pode ser representada pelas frentes de onda paralelas entre si e representadas no eixo cartesiano.