# Equações de Navier-Stokes

J. L. Baliño

Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

Apostila de aula
2017, v. 1

# Sumário

# Relação constitutiva para um fluido newtoniano

É a relação mais simples entre o tensores de estado de tensão e taxa de deformação (Claude-Louis Navier, 1822; George Gabriel Stokes, 1845). Baseada em três postulados:

1. O fluido é continuo e o tensor de tensor de tensões $\underline{\boldsymbol{T}}$ é no máximo uma função linear do tensor taxa de deformação $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$. Corolário: não há efeito da translação ou rotação nem da história pasada (histerese).
2. O fluido é isotrópico (propriedades independentes da direção) e, portanto, a lei é independente dos eixos coordenados escolhidos para descrevé-la. Corolário: os eixos principais dos tensores relacionados são coincidentes.
3. Na ausência de taxa de deformação, o estado de tensão se reduz ao estado hidrostático $\underline{\boldsymbol{T}} = -p\,\underline{\boldsymbol{I}}$.

# Relação constitutiva para um fluido newtoniano

Escolhendo os eixos principais $x_1$, $y_1$, $z_1$ para estabelecer a relação constitutiva. Nestes eixos, as matrices associadas aos tensores são diagonais, resultando das hipóteses:

$$T_{11} = -p + C_1\,\epsilon_{11} + C_2\,\epsilon_{22} + C_3\,\epsilon_{33}$$

Pela condição de isotropia, as direções perpendiculares a $x_1$ são equivalentes, isto é $C_2 = C_3$, resultando dois coeficientes independientes:

$$\begin{aligned} T_{11} &= -p + (C_1 - C_2)\,\epsilon_{11} + C_2\,(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ &= -p + \kappa\,\epsilon_{11} + C_2\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) \end{aligned}$$

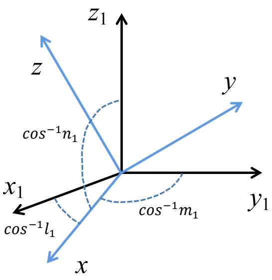
onde $\kappa = C_1 - C_2$. Analogamente para as outras componentes:

$$T_{22} = -p + \kappa\,\epsilon_{22} + C_2\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V})$$

$$T_{33} = -p + \kappa\,\epsilon_{33} + C_2\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V})$$

# Relação constitutiva para um fluido newtoniano

Fazemos uma transformação aos eixos $x$, $y$, $z$ onde as matrices associadas tem elementos extra-diagonais. Se $\underline{T_1}$ e $\underline{\epsilon_1}$ são as matrices associadas aos eixos principais, enquanto $\underline{T}$ e $\underline{\epsilon}$ são as matrices associadas aos eixos transformados, a transformação resulta:




$$\underline{T} = \underline{Q}^T \cdot \underline{T_1} \cdot \underline{Q}$$

$$\underline{\epsilon} = \underline{Q}^T \cdot \underline{\epsilon_1} \cdot \underline{Q}$$

$\underline{Q}$: matriz de transformação (cosenos diretores dos eixos transformados colocados em coluna).

$$\{Q\} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \breve{\imath}_1 = l_1\, \breve{\imath} + l_2\, \breve{\jmath} + l_3\, \breve{k} \\ \breve{\imath}_2 = m_1\, \breve{\imath} + m_2\, \breve{\jmath} + m_3\, \breve{k} \\ \breve{\imath}_3 = n_1\, \breve{\imath} + n_2\, \breve{\jmath} + n_3\, \breve{k} \end{array} \right.$$

# Relação constitutiva para um fluido newtoniano

A transformação para um elemento diagonal (por exemplo $T_{xx}$ e $\epsilon_{xx}$) e um elemento extra-diagonal (por exemplo $T_{xy}$ e $\epsilon_{xy}$ resulta:

$$T_{xx} = l_1^2\, T_{11} + m_1^2\, T_{22} + n_1^2\, T_{33}$$

$$\epsilon_{xx} = l_1^2\, \epsilon_{11} + m_1^2\, \epsilon_{22} + n_1^2\, \epsilon_{33}$$

$$T_{xy} = l_1\, l_2\, T_{11} + m_1\, m_2\, T_{22} + n_1\, n_2\, T_{33}$$

$$\epsilon_{xy} = l_1\, l_2\, \epsilon_{11} + m_1\, m_2\, \epsilon_{22} + n_1\, n_2\, \epsilon_{33}$$

Substituindo as tensões nas direções principais e levando em conta as relações:

$$\breve{\boldsymbol{\imath}} \cdot \breve{\boldsymbol{\imath}} = l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

$$\breve{\boldsymbol{\imath}} \cdot \breve{\boldsymbol{\jmath}} = l_1\, l_2 + m_1\, m_2 + n_1\, n_2 = 0$$

# Relação constitutiva para um fluido newtoniano

$$
\begin{aligned}
T_{xx} &= l_1^2 \left[-p + \kappa\, \epsilon_{11} + C_2\, (\nabla \cdot \boldsymbol{V})\right] + m_1^2 \left[-p + \kappa\, \epsilon_{22} + C_2\, (\nabla \cdot \boldsymbol{V})\right] \\
&\quad + n_1^2 \left[-p + \kappa\, \epsilon_{33} + C_2\, (\nabla \cdot \boldsymbol{V})\right] \\
&= -p \left(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2\right) + \kappa \left(l_1^2\, \epsilon_{11} + m_1^2\, \epsilon_{22} + n_1^2\, \epsilon_{33}\right) \\
&\quad + C_2\, (\nabla \cdot \boldsymbol{V}) \left(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2\right) \\
&= -p + \kappa\, \epsilon_{xx} + C_2\, (\nabla \cdot \boldsymbol{V})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{xy} &= l_1\, l_2 \left[-p + \kappa\, \epsilon_{11} + C_2\, (\nabla \cdot \boldsymbol{V})\right] + m_1\, m_2 \left[-p + \kappa\, \epsilon_{22} + C_2\, (\nabla \cdot \boldsymbol{V})\right] \\
&\quad + n_1\, n_2 \left[-p + \kappa\, \epsilon_{33} + C_2\, (\nabla \cdot \boldsymbol{V})\right] \\
&= -p\, (l_1\, l_2 + m_1\, m_2 + n_1\, n_2) + \kappa\, (l_1\, l_2\, \epsilon_{11} + m_1\, m_2\, \epsilon_{22} + n_1\, n_2\, \epsilon_{33}) \\
&\quad + C_2\, (\nabla \cdot \boldsymbol{V})\, (l_1\, l_2 + m_1\, m_2 + n_1\, n_2) \\
&= \kappa\, \epsilon_{xy}
\end{aligned}
$$

## Relação constitutiva para um fluido newtoniano

Definindo $\kappa = 2\,\mu$ e $C_2 = \lambda$, onde $\mu$ é a *viscosidade dinâmica* e $\lambda$ é o *segundo coeficiente de viscosidade*, resultam finalmente:

$$T_{xx} = -p + 2\,\mu\,\epsilon_{xx} + \lambda\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V})$$

$$T_{yy} = -p + 2\,\mu\,\epsilon_{yy} + \lambda\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V})$$

$$T_{zz} = -p + 2\,\mu\,\epsilon_{zz} + \lambda\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V})$$

$$T_{xy} = 2\,\mu\,\epsilon_{xy}$$

$$T_{yz} = 2\,\mu\,\epsilon_{yz}$$

$$T_{zx} = 2\,\mu\,\epsilon_{zx}$$

Em forma compacta:

$$T_{ij} = [-p + \lambda\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V})]\,\delta_{ij} + 2\,\mu\,\epsilon_{ij} = [-p + \lambda\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V})]\,\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\underline{\boldsymbol{T}} = [-p + \lambda\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V})]\,\underline{\boldsymbol{I}} + 2\,\mu\,\underline{\boldsymbol{\epsilon}} = [-p + \lambda\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V})]\,\underline{\boldsymbol{I}} + \mu\left(\nabla\boldsymbol{V} + \nabla\boldsymbol{V}^T\right)$$

# Pressão mecânica e pressão termodinâmica

Somando as tensões normais, o invariante $I_1$ do tensor de tensões resulta:

$$\begin{aligned} I_1 &= -3\,p + 2\,\mu\,(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + 3\,\lambda\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) \\ &= -3\,p + (2\,\mu + 3\,\lambda)\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) \end{aligned}$$

Definindo a pressão mecânica como $\bar{p} = -\dfrac{I_1}{3}$, resulta:

$$\bar{p} = p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\,\mu\right)(\nabla \cdot \boldsymbol{V})$$

A pressão mecânica não é igual à pressão termodinâmica. O termo conflitivo tem a ver com escoamentos compressíveis (e irrelevante se $\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$) e é objeto de controvérsia. Stokes iludiu o assunto estabelecendo a condição $\bar{p} = p$, isto é, $\lambda = -\dfrac{2}{3}\,\mu$, o que se conhece como *hipótese de Stokes*.

# Termo de força de estado de tensão

Devemos acresentar, na equação de conservação do momento linear, o termos de força do estado de tensão $\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{T}}$:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{T}} &= \nabla \cdot \left\{ \left[ -p + \lambda \left( \nabla \cdot \boldsymbol{V} \right) \right] \underline{\boldsymbol{I}} + \mu \left( \nabla \boldsymbol{V} + \nabla \boldsymbol{V}^T \right) \right\} \\ &= -\nabla p + \left( \nabla \cdot \boldsymbol{V} \right) \nabla \lambda + \lambda \nabla \left( \nabla \cdot \boldsymbol{V} \right) + \left( \nabla \boldsymbol{V} + \nabla \boldsymbol{V}^T \right) \cdot \nabla \mu \\ &\quad + \mu \nabla \cdot \left( \nabla \boldsymbol{V} + \nabla \boldsymbol{V}^T \right)\end{aligned}$$

Calculamos o último termo utilizando a *convenção de sumatória de Einstein* (quando um índice aparece duplicado, significa que deve ser sumado em todos seus valores):

$$\begin{aligned}\left[ \nabla \cdot \left( \nabla \boldsymbol{V} + \nabla \boldsymbol{V}^T \right) \right]_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \\ &= \left( \nabla^2 \boldsymbol{V} \right)_i + \left[ \nabla \left( \nabla \cdot \boldsymbol{V} \right) \right]_i\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \left( \nabla \boldsymbol{V} + \nabla \boldsymbol{V}^T \right) = \nabla^2 \boldsymbol{V} + \nabla \left( \nabla \cdot \boldsymbol{V} \right)$$

# Termo de força de estado de tensão

Substituindo, obtemos:

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{T}} = -\nabla p + (\nabla \cdot \boldsymbol{V})\,\nabla\lambda + (\lambda + \mu)\,\nabla\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) + \left(\nabla \boldsymbol{V} + \nabla \boldsymbol{V}^T\right) \cdot \nabla\mu + \mu\,\nabla^2 \boldsymbol{V}$$

Em termos de operadores "genuinos", o laplaciano vectorial resulta:

$$\nabla^2 \boldsymbol{V} = \nabla\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{V})$$

A equação de conservação do momento linear resulta, finalmente:

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{G} + \nu\,\nabla^2 \boldsymbol{V} + \frac{1}{\rho}\left[(\lambda + \mu)\,\nabla\,(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) + (\nabla \cdot \boldsymbol{V})\,\nabla\lambda + \left(\nabla \boldsymbol{V} + \nabla \boldsymbol{V}^T\right) \cdot \nabla\mu\right]$$

A relação anterior mostra o acoplamento com a equação da energia, através da massa específica e o gradiente da viscosidade.

# Equação de Navier-Stokes

Considerando a hipótesis de Stokes e viscosidade constante, resulta:

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla p + \boldsymbol{G} + \nu\,\nabla^2 \boldsymbol{V} + \frac{1}{3}\,\nu\,\nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{V}\right)$$

Finalmente, considerando escoamento incompressível, resulta a *equação de Navier-Stokes* (N-S):

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla p + \boldsymbol{G} + \nu\,\nabla^2 \boldsymbol{V}$$

A equação de N-S é de segunda ordem na velocidade e está desacoplada da equação da energia. Em coordenadas cartesianas, a componente $x$ resulta:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} + G_x$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

# Condições de contorno em interfase fluido-sólido

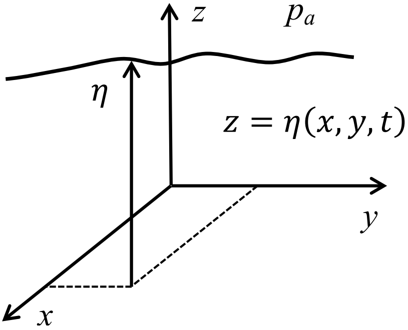
Em interfases fluido-sólido, desprezando efeitos de micro-escala caracterizados por grandes números de Knudsen ($Kn = \frac{l}{L} \leq 0,1$, onde $l$ é o caminho livre médio das moléculas e $L$ é o comprimento característico do problema), é costume supor a *condição de não escorregamento*:

$$\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{r}_s,\ t\right) = \boldsymbol{V}_s\left(t\right)$$

Se o sólido for permeável (por exemplo, nos casos de sucção ou injeção de fluido) ou se existir mudança de fase (vaporização, condensação, sublimação, deposição) se relaxa a componente normal da velocidade, isto é, $V_n\left(\boldsymbol{r}_s,\ t\right) \neq 0$.

# Condições de contorno em superfície livre (cinemática)

Para o caso de uma superfície livre ideal que exerce uma pressão conhecida na interfase, caracterizada pela posição $z = \eta\,(x,\ y,\ t)$, aplíca-se a condição cinemática de que as partículas na superfície permanecem nela, isto é, a velocidade da partícula na direção vertical é igual ao deslocamento vertical acompanhando as partículas:




$$w\,(x,\ y,\ \eta,\ t) = \frac{D\eta}{Dt}$$

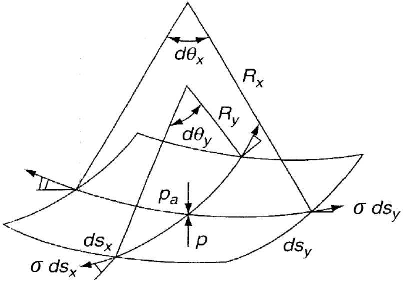
$$= \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\,\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Desprezando a inclinação da superfície, resulta:

$$w\,(x,\ y,\ \eta,\ t) \cong \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

# Condições de contorno em superfície livre (normal)

A *curvatura* na interface está relacionada com uma força na direção normal. Um balanço na direção normal à interface resulta na *equação de Young-Laplace*:



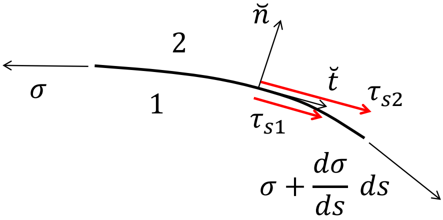

$$p\,(x,\,y,\,\eta,\,t) = p_a - \sigma\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)$$

$$\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}}$$

onde $\sigma$ é a tensão superficial. Desprezando efeitos de tensão superficial ou para grandes raios de curvatura, resulta $p \cong p_a$.

# Condições de contorno em superfície entre fluídos

Considerando que a interfase tem inércia desprezível e possibilidade de variação da tensão superficial ao longo da superfície (escoamento de Marangoni), as condições de contorno resultam:




Continuidade da velocidade:

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2$$

Balanço na direção tangencial:

$$\tau_{s1} + \tau_{s2} = -\frac{d\sigma}{ds}$$

onde:

$$\tau_{s2} = \left(\underline{\boldsymbol{\tau}_2} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\right) \cdot \breve{\boldsymbol{t}}$$

$$\tau_{s1} = -\left(\underline{\boldsymbol{\tau}_1} \cdot \breve{\boldsymbol{n}}\right) \cdot \breve{\boldsymbol{t}}$$