IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova REC** Nome:____________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

♠

1. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? Justifique as falsas.

   (a) O tensor $\omega_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ representa a vorticidade e seus termos diagonais representam a deformação por compressão. A. Verdadeiro **B. Falso** [5]

   Resposta:
   Esse tensor representa a vorticidade, mas ele não inclui o efeito da compressão.

   (b) A equação da continuidade pode ser simplificada para a forma $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ quando estudamos circulação abissal. [5]
   A. Verdadeiro B. Falso

   Resposta:
   Ela pode ser simplificada pois o **gradiente** de densidade é pequeno apesar da enorme pressão.

   (c) O potencial de velocidade é definido para fluxos irrotacionais bidimensionais. [5]
   A. Falso **B. Verdadeiro**

   Resposta:
   É definido para fluxos **irrotacionais** 2D.

   (d) As forças de Coriolis e centrífuga não se cancelam pois a primeira depende do referencial ser não inercial e a segunda depende do referencial ser inercial. [5]
   A. Verdadeiro **B. Falso**

   Resposta:
   Ambas existem só nos referenciais não inerciais e não se cancelam pois não são paralelas.

   (e) Apenas nos fluidos Newtonianos a deformação é linearmente proporcional à tensão. [5]
   A. Falso **B. Verdadeiro**

   Resposta:
   Essa é a definição de fluido Newtoniano.

2. Suponha que a bactéria *Vibrio fischeri* é extremamente sensível a mudanças repentinas de pressão e torna–se inativa se a pressão variar de mais de 10^4N.m^2 em 1s. Ondas capilares com período de 0.1s são geradas na superfície plana do mar e quando quebram por *microbreaking* ejetam gotículas de .15mm de raio para a atmosfera. Uma bactéria X está junto à superfície, uma onda capilar quebra e ela é capturada numa gotícula. Ela ficará inativa? [5]

Resposta:

Lembrando que para uma gota $\Delta p = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2\times 73\times 10^{-3}}{1.5\times 10^{-4}} = 973$, na gotícula a pressão é 973 N.m^2. O período da onda é de .1s, portanto a compressão na gotícula é de 973/0.1=0.973$\times 10^4$ $<$ 1.0×10^4N.m^2.s^{-1}, portanto a bactéria não fica inativa.

3. Marque uma alternativa correta (f=campo escalar, $\vec{u}$=campo vetorial): 10

$\nabla\cdot(\nabla\vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla\cdot(\nabla\cdot\vec{u})$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{u})$	○ Vetor	√ **Escalar**	○ NDA	$\nabla\cdot(\nabla f)$	○ Vetor	√ **Escalar**	○ NDA
$\nabla(\nabla\cdot\vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla\cdot(\nabla\times f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla\times(\nabla f)$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla(\nabla\cdot f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla\times(\nabla\times\vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla\times(\nabla\times f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**

4. O fluxo dado pelas equações abaixo é incompressível? Explique a sua resposta (b é constante). 15

$$\begin{cases} u_r &= \frac{1}{r}\cos(br^2) \\ u_\theta &= 2r\theta b\frac{\sin(2br^2)}{\cos(br^2)} \\ u_z &= -2bz\sin(br^2) \end{cases}$$

Resposta:

Divergente em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Para o 1º termo do lado direito, $ru_r = \cos(br^2)$ portanto:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -2b\sin(br^2).$$

A derivada em z do 3º termo do lado direito é trivial:

$$\frac{\partial[-2bz\sin(br^2)]}{\partial z} = -2b\sin(br^2).$$

Antes de se escabelar com a derivada do 2º termo, lembre que
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, portanto
$2\sin(2x) = 4\sin(x)\cos(x)$ e
$4\sin(x) = \frac{2\sin(2x)}{\cos(x)}$.
Faça $x = 2br^2$ e multiplique tudo por $r\theta b$ para obter $4r\theta b\sin(br^2)$.
Desta forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial[4r\theta b\sin(br^2)]}{\partial\theta} = 4b\sin(br^2).$$

A soma é nula e portanto o fluxo é incompressível.

5. Num Domingo sem vento e nem atrito, Verônica descia uma ladeira plana de skate, fazendo bolhas de sabão com um aro de raio R perpendicular ao seu deslocamento. Dona Therezinha, mãe de Verônica, tirou duas fotos separadas por t segundos. Na primeira, uma bolha tinha começado a se formar por causa da pressão dinâmica devido ao deslocamento de Verônica; nessa foto a bolha tinha curvatura $r = 2R$. Na segunda foto a bolha era uma casca hemisférica. Dona Therezinha sabia que a relação entre a pressão dinâmica do ar e a velocidade é dada por $u = \sqrt{\frac{2p_d}{\rho_{ar}}}$, onde ρ é a densidade **do ar** e u a velocidade projetada na direção perpendicular à área. Ela considerou que a tensão superficial da mistura de água com sabão era σ e calculou a inclinação θ da ladeira. Que cálculo ela fez? 20

Resposta:

Resposta:

Tem mais de um jeito de resolver o problema. Eis o meu: No plano inclinado a aceleração devido à força normal projetada horizontalmente é $a = g\,\sin(\theta)$. Essa aceleração é medida indiretamente pelo Seu Edgar, pois as duas fotos estão separadas por t segundos e nelas a Verônica tem velocidades u_1 e u_2 diferentes:

$$g\,\sin(\theta) = \frac{(u_2 - u_1)}{t} \qquad \theta = \arcsin\left(\frac{(u_2 - u_1)}{t\,g}\right). \tag{1}$$

Mas

$$(u_2 - u_1) = \sqrt{2p_{d2}/\rho} - \sqrt{2p_{d1}/\rho}, \text{ sendo } p_{d2} = 2.\frac{2\sigma}{R} \text{ e } p_{d1} = \frac{2\sigma}{R}.$$

Sendo assim,

$$(u_2 - u_1) = \sqrt{2(2\frac{2\sigma}{\rho R})} - \sqrt{2\frac{2\sigma}{\rho R}} = 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}},$$

Substituindo em 1 temos

$$\theta = \arcsin\left(\frac{2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}}}{t\,g}\right).$$

6. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} + g_z - 2\vec{\Omega} \times \vec{u}. \tag{2}$$

Vamos usar a equação 2 aplicada a um problema de circulação na mesa girante. Para simplificar o problema considere o seguinte:

- O balanço de forças na vertical é hidrostático:

$$\rho g_z = -\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{3}$$

- O fluxo é aproximadamente estacionário, linear, invíscido, incompressível e homogêneo.

(a) Escreva as equações das componentes horizontais do balanço de forças. Quero uma equação para a direção x e uma para y. Note que, por causa do produto vetorial, a equação para x tem v e a equação para y tem u. 5

Resposta:

$$
\begin{aligned}
2\Omega v &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\
2\Omega u &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}
\end{aligned}
$$

(b) Derive cruzado e some as duas equações para eliminar o termo em p. Use a equação da continuidade para obter uma expressão para $\frac{\partial w}{\partial z}$. 10

Resposta:

$$
\begin{aligned}
2\Omega \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\
2\Omega \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \\
2\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Usando a continuidade para o caso incompressível e homogêneo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, $\boxed{\frac{\partial w}{\partial z} = 0}$.

Resposta:

(c) Diferencie em z as equações que você obteve no item a e substitua a equação 3 para obter expressões para $\frac{\partial u}{\partial z}$ e $\frac{\partial v}{\partial z}$. Tendo em vista essas expressões juntamente com a obtida no item b, o que acontece quando colocamos um pequeno obstáculo no fundo do tanque girante e forçamos uma corrente horizontal a passar sobre ele? Nota: Essa corrente é dezenas de vezes mais lenta que velocidade tangencial imposta pela rotação. 10

Resposta:

$$
\begin{aligned}
2\Omega \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} \\
2\Omega \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} \\
2\Omega \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho g_z}{\partial x} \\
2\Omega \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho g_z}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
$$

Portanto não há cisalhamento vertical das velocidades! O fluxo não consegue passar por cima do obstáculo, pois isso causaria cisalhamento. A água passa em torno do obstáculo, como se o mesmo fosse uma coluna, daí o nome desse experimento: colunas de Taylor.

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	25	5	10	15	20	25	100
Nota							

Memória não–volátil:
Regra do quociente: se $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ então $f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$.

O coeficiente de tensão superficial da água é 73×10^{-3}N.m-1.

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar	
Função escalar	$E = E(r, \theta, z)$
Função vetorial	$\vec{V} = u_r(r,\theta,z)_{\hat{i}_r} + u_\theta(r,\theta,z)_{\hat{i}_\theta} + u_z(r,\theta,z)_{\hat{i}_z}$
Gradiente é vetor!	$\vec{\nabla} E = \left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente é escalar!	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional é vetor!	$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$

Esta é a definição de ψ em coords. cartesianas:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Esta é a definição de ψ em coords. cilíndricas:

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases}$$