IOF221 - Oceanografia Dinâmica I

Prova II

Nome:________________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

1. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? Justifique as falsas.

   (a) Volume material se move acompanhando o fluxo e tem superfícies externas elásticas que encerram uma quantidade fixa de matéria. **A. Certo** B. Errado $\boxed{4}$

   Resposta:
   Sim, essa é a definição.

   (b) Num fluxo qualquer, a mudança de referencial não altera as linhas de corrente. A. Certo **B. Errado** $\boxed{4}$

   Resposta:
   Mudança de referencial altera as velocidades e linhas de corrente são, por definição, tangentes ao vetor velocidade.

   (c) Num sistema de referência não–inercial a segunda lei de Newton se aplica. Neste caso é necessário apenas um ajuste independente da segunda lei, baseado na cinemática da rotação. **A. Certo** B. Errado $\boxed{4}$

   Resposta:
   A segunda lei de Newton se aplica em qualquer sistema não–relativístico.

   (d) Vírus é muito menor que bactéria. Considere ambos aproximadamente esféricos e compostos 100% de água. A pressão dentro do vírus é menor que dentro da bactéria. A. Certo **B. Errado** $\boxed{4}$

   Resposta:
   A tensão é inversamente proporcional ao raio, portanto a pressão por ela causada é maior no vírus por ele ter raio menor.

   (e) A unidade física de torque, potência e trabalho é a mesma. A. Certo **B. Errado** $\boxed{4}$

   Resposta:
   Torque, energia e trabalho tem a mesma unidade (N.m), potência (N.m/s) não.

2. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual e responda:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{g} + \rho(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})) - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{u}. \tag{1}$$

   (a) Em que latitudes a aceleração centrífuga tem magnitude igual à metade de seu valor no equador? $\boxed{5}$

   Resposta:
   $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \Omega^2 r \cos(\theta) \quad \Omega^2 r \cos(\theta) = \frac{1}{2}\Omega^2 r \cos(0)$ portanto $\cos(\theta) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \pm 60°$.

(b) Simplifique a equação 1 para o caso onde a velocidade é nula. 5

Resposta:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

(c) Simplifique a equação 1 para um fluxo estratificado, linear e viscoso que ocorre sobre o equador de um planeta que gira rápido. 5

Resposta:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \;=\; -\vec{\nabla} p \;+\; \mu \nabla^2 \vec{u} \;+\; \rho \vec{g} \;+\; \rho(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})).$$

3. Considere a seguinte expansão da derivada total de $\vec{u}$. Ela está correta? Justifique a sua resposta. 10

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad = \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})$$
$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Resposta:

O termo advectivo é obtido corretamente a partir de $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ ou seja, $\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Desenvolvendo-o:

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots v\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial w}{\partial y} + \cdots w\frac{\partial u}{\partial z} + w\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Ele expressa a advecção pela componente da velocidade numa dada direção (e.g. u) da variação **de uma componente qualquer** da velocidade (e.g. v) nessa direção (e.g. x).

4. Se F_i representa as forças viscosas num fluxo qualquer, podemos deduzir que $F_i = -\mu(\vec{\nabla} \times \vec{\omega})$ onde μ é o coeficiente de viscosidade e ω é a vorticidade. Podemos afirmar que se essa expresão for correta então a rotação implica na ação de forças associadas à viscosidade? Responda sim ou não e justifique matematicamente a sua resposta. 10

Resposta:

Não, pois as derivadas espaciais qua aparecem sob a forma $\vec{\nabla}\times$ fazem toda a diferença. Do capítulo sobre vórtices lembramos que em fluido em rotação de corpo sólido a vorticidade é constante e portanto a sua derivada se anula, fazendo $F_i = 0$! Portanto a rotação dos **elementos** de fluido, implicitamente assumida como sendo de corpo sólido, não gera forças viscosas. É a **taxa de variação espacial da rotação** que está associada à força viscosa.

5. Considere a equação de conservação da energia para um ponto, onde vemos explicitamente a conexão entre energia mecânica e energia térmica:

$$\rho \frac{D}{Dt}(e + \underbrace{\frac{1}{2}u_i^2}_{A}) \;=\; \rho u_i g_i \;+\; \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij} u_i)}_{B} \;-\; \frac{\partial q_i}{\partial x_i}. \qquad (2)$$

e é a energia interna e q é o fluxo de calor pela superfície.

(a) Indique se essa expressão se aplica a uma superfície de controle, a um volume de controle ou a um ponto qualquer do fluxo. $\boxed{5}$

Resposta:
A expressão toda se aplica para um ponto qualquer do fluxo.

(b) Quais as unidades dos termos dessa equação em termos de M,L e T (massa, comprimento e tempo). $\boxed{5}$

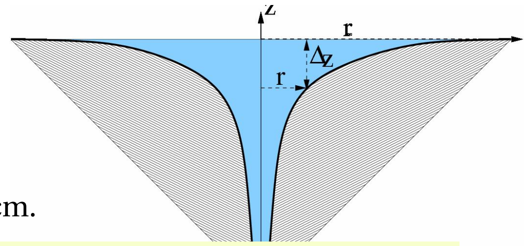
Resposta:
Está escrita em termos de energia por unidade de volume, $\mathrm{ML^{-1}T^{-3}}$.

(c) Explique fisicamente o significado dos termos A e B. $\boxed{10}$

Resposta:
A é a energia cinética (se considerar a derviada material, é a variação total da energia cinética no tempo). B é o trabalho das forças de superfície (por unidade de tempo).

---

6. O redemoinho que se forma no ralo de uma piscina é essencialmente um vórtice irrotacional como ilustra a figura ao lado. A velocidade tangencial é $u_\theta = 30\text{cm.s}^{-1}$ para $r = 8$cm.



(a) Calcule a velocidade tangencial em $r = 2$mm e $r = 40$cm. $\boxed{10}$

Resposta:
$u_\theta = \frac{C}{r}$
em $r = 8 \quad u_\theta = 30 \Rightarrow C = 30 \times 8 = 240\text{cm}^2\text{s}^{-1}$.
Em r=2mm $u_\theta = \dfrac{240}{0.2} = 1200$ cm s^{-1}.
Em r=40cm $u_\theta = \dfrac{240}{40} = 6$ cm s^{-1}.

(b) Utilize a forma geral da equação de Bernoulli para fluxos irrotacionais, $\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z + P = B$ e calcule a depressão $z(r)$ em $r = 25$ cm e $r = .5$ cm. $\boxed{15}$

Resposta:
A interface constitui uma superfície de pressão constante (atmosférica), portanto as constantes e as integrais são iguais: $\dfrac{1}{2}u_\infty^2 + g z_\infty + \int \dfrac{dp}{\rho} = C = \dfrac{1}{2}u_{25}^2 + g z_{25} + \int \dfrac{dp}{\rho}$
Mas se $r \to \infty$ $u_\theta \to 0$ $z \to 0$ a eq. de Bernoulli se reduz a
$\dfrac{1}{2}u_{25}^2 = -g z_{25}$
Analogamente ao item anterior: $u_{25} = \frac{C}{r} = \frac{240}{25} = 9.6$ cms^{-1}
Inserindo na eq. de Bernoulli: $\dfrac{1}{2}(9.6)^2 = -981 z_{25} \quad \Rightarrow z_{25} = -0.047$ cm,
e no caso de r=0.5 cm temos: $u_{0.5} = \frac{C}{r} = \frac{240}{.5} = 480$ cms^{-1}
$\dfrac{1}{2}(480)^2 = -981 z_{0.5} \quad \Rightarrow z_{0.5} = -117$ cm.

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	20	15	10	10	20	25	100
Nota							