 Prova REC Nome:________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A tentativa de violação de qualquer uma das regras abaixo anulará o exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o telefone.

1. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? Justifique as falsas.

 (a) O tensor $\omega_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ representa a vorticidade e seus termos diagonais representam a deformação por compressão. A. Verdadeiro **B. Falso** $\boxed{5}$

 Resposta:
 Esse tensor representa a vorticidade, mas ele não inclui o efeito da compressão.

 (b) O termo da forçante do vento na equação da Navier–Stokes depende do coeficiente de viscosidade. $\boxed{5}$
 A. Falso **B. Verdadeiro**

 Resposta:
 Verdade, basta perceber que na equação o termo $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ às vezes aparece como $\mu\nabla^2\vec{u}$.

 (c) A equação da continuidade pode ser simplificada para a forma $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ quando estudamos circulação abissal. $\boxed{5}$
 A. Verdadeiro B. Falso

 Resposta:
 Ela pode ser simplificada pois o **gradiente** de densidade é pequeno apesar da enorme pressão.

 (d) O potencial de velocidade é definido para fluxos bidimensionais não–divergentes. $\boxed{5}$
 A. Falso B. Verdadeiro

 Resposta:
 É definido para fluxos **irrotacionais** 2D.

 (e) As forças de Coriolis e centrífuga são fundamentalmente diferentes da força do gradiente de pressão pois dependem da aceleração da gravidade e não de do sistema de referência ser inercial ou não. $\boxed{5}$
 A. Verdadeiro **B. Falso**

 Resposta:
 Errado, não faz o menor sentido: Coriolis e centrífuga não dependem da aceleração da gravidade, depende do sistema de referência e gradiente de pressão não depende da aceleração da gravidade.

 (f) O teorema de Gauss relaciona o fluxo total de uma propriedade através de uma área fechada com a divergência desse fluxo no volume total encerrado por esta superfície. $\boxed{5}$
 A. Falso **B. Verdadeiro**

Resposta:
Nesse caso entenda-se "total" como integral.

2. Marque uma alternativa correta (f=campo escalar, $\vec{u}$=campo vetorial): $\boxed{10}$

$\nabla(\nabla\cdot\vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla\cdot(\nabla\cdot\vec{u})$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla\cdot(\nabla\vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla\cdot(\nabla\times f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{u})$	○ Vetor	√ **Escalar**	○ NDA	$\nabla\cdot(\nabla f)$	○ Vetor	√ **Escalar**	○ NDA
$\nabla\times(\nabla f)$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla(\nabla\cdot f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla\times(\nabla\times\vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla\times(\nabla\times f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**

3. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} + \vec{g_a} - 2vec\Omega\times\vec{u}.$$

(a) Obtenha a equação hidrostática na forma escalar e justifique suas aproximações. $\boxed{5}$

Resposta:
Se a velocidade é nula, sobra apenas $0 = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g_a}$ onde a componente vertical é a única não-nula, portanto $\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_a$.

(b) Considere o fluxo invíscido e as acelerações desprezíveis quando comparadas aos termo do gradiente horizontal de pressão e da força de Coriolis. Complete as equações do movimento: $\boxed{10}$

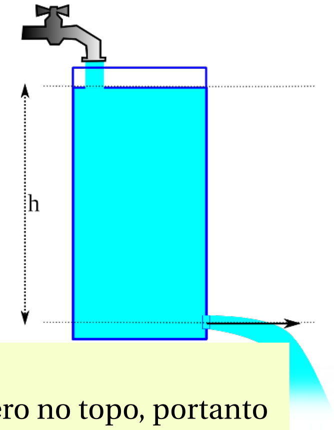
$$\begin{array}{rll}
\text{Continuidade} & \underline{\hspace{2cm}} & = -\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} \\
\text{Hidrostática} & \underline{\hspace{2cm}} & = \underline{\hspace{2cm}} \text{ copie do item acima ☺} \\
\text{Momentum Zonal} & \frac{\partial}{\partial} & = 2\Omega\underline{\hspace{1cm}}\theta\frac{\partial}{\partial} \\
\text{Mom. Meridional} & \frac{\partial}{\partial} & = 2\Omega\underline{\hspace{1cm}}\theta\frac{\partial}{\partial}
\end{array}$$

Resposta:

$$\begin{array}{rll}
\text{Continuidade} & 0 & = -\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} \\
\text{Hidrostática} & \frac{\partial p}{\partial z} & = \rho g_a \\
\text{Momentum Zonal} & \frac{\partial u}{\partial y} & = 2\Omega\sin\theta\frac{\partial p}{\partial x} \\
\text{Mom. Meridional} & \frac{\partial v}{\partial x} & = -2\Omega\sin\theta\frac{\partial p}{\partial y}
\end{array}$$

4. Uma caixa d'água possui um orifício em sua parte inferior como mostra a figura ao lado. $\boxed{10}$

Uma torneira na parte superior lança água nesta caixa com o mesmo fluxo que a água sai pelo orifício de raio r, mantendo o nível h da caixa constante. Se eu escarear o furo até dobrar o valor do raio e trocar a água desse sistema pelo mesmo volume de mercúrio[1], cuja densidade é 13000 kg.m-3, de quanto aumenta a velocidade com que o líquido sai pelo furo?



Resposta:

A pressão é a mesma (atmosférica) no topo e no furo e a velocidade é zero no topo, portanto

$$\frac{\rho u^2}{2} = \rho g h \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{2gh}$$

, portanto a velocidade não mudaria pois não depende de rho e nem de r.

5. Considere um vórtice cuja velocidade tangencial u_θ é como a de um vórtice de Rankine de raio R. Entretanto, a velocidade radial u_r não é nula e assume um perfil Gaussiano na dimensão r. Considere a água do mar incompressível e o fundo do mar não-poroso. Obtenha a fórmula da velocidade vertical u_z em termos de R e da altura h da coluna d'água. 15

Para ajudar:

$$u_r \quad \text{perfil Gaussiano} \Rightarrow \quad u_r = e^{-(r-R)^2}$$

$$u_\theta \quad \text{vórtice de Rankine} \Rightarrow \begin{cases} u_\theta = \Omega r & \text{se } r \leq R \\ u_\theta = \dfrac{\Omega^2 R}{r} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

$$u_z \quad \text{fundo não-poroso} \Rightarrow \quad u_z(z = h, h < 0) = 0$$

Resposta:

Se é incompressível, o divergente se anula, portanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Note que u_θ não é função de θ, portanto a sua derivada se anula.
A derivada em r é:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_r)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\, e^{-(r-R)^2})}{\partial r}.$$

Usando a memória não volátil,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_r)}{\partial r} = \frac{1}{r}(2Rr - 2r^2 + 1)e^{-(r-R)^2}.$$

Voltando ao divergente - que era zero,

$$\frac{\partial(u_z)}{\partial z} = (2R - 2r + \frac{1}{r})e^{-(r-R)^2}.$$

Integrando em z:

$$u_z = C + z(2R - 2r + \frac{1}{r})e^{-(r-R)^2}.$$

Usando a condição de $u_z = 0$ no fundo ,

$$u_z = (z-h)(2R - 2r + \frac{1}{r})e^{-(r-R)^2}.$$

6. Uma coluna d'água cilíndrica no tempo t_1, tem raio r_1, altura h_1, gira com velocidade angular $\vec{\Omega_1}$ em torno de seu eixo vertical. Ela é advectada pelas correntes e sobe a plataforma continental, reduzindo sua altura para $h_2 = \frac{3}{4}h_1$ no tempo t_2, sem perder ou ganhar massa. Considere o fluxo invíscido e a coluna em rotação de corpo sólido. Qual a velocidade angular $\vec{\Omega_2}$ no tempo t_2? 20

Resposta:

Por conservação de massa, $\rho V_1 = \rho V_2$, portanto $\rho\pi r_1^2 h_1 = \rho\pi r_2^2 h_2$, $r_1^2 h_1 = r_2^2 h_2$. Mas do enunciado, $h_2 = \frac{3}{4}h_1$, então $r_2 = \sqrt{\frac{4}{3}}r_1$.

O momento angular da coluna é dado por:

$$\vec{H} = \int_V (\rho\vec{u}dV) \times \vec{r} = \int_V \rho u_\theta r dV = \int_V \rho\Omega r^2 dv = \rho\Omega \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^r r^2 dr d\theta dz = \rho\Omega 2\pi h\frac{r^3}{3}.$$

Considerando os dois tempos, por conservação de momento angular temos:

$$\rho\Omega_1 2\pi h_1 \frac{r_1^3}{3} = \rho\Omega_2 2\pi h_2 \frac{r_2^3}{3} \quad \Rightarrow \quad \Omega_1 h_1 r_1^3 = \Omega_2 h_2 r_2^3.$$

Substituindo r_2 da primeira parte e h_2 do enunciado,

$$\Omega_1 h_1 r_1^3 = \Omega_2 \frac{3}{4} h_1 (\sqrt{\frac{4}{3}} r_1)^3 \quad \Rightarrow \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{3}{4}}\Omega_1.$$

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	30	15	15	10	15	20	105
Nota							

Memória não–volátil:
A derivada de $xe^{-(x-A)^2}$ em relação a x é $(2Ax - 2x^2 + 1)e^{-(x-A)^2}$.

$$\frac{\rho u^2}{2} + \rho g z + p = B.$$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar	
Gradiente	$\vec{\nabla} V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente	$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional	$\vec{\nabla} \times \vec{U} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$