

Informações:

- Duração de 2:30 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra anulará teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

1. Assinale as afirmações erradas e mostre porque estão erradas.

- (a) Considere uma gota de óleo esférica submersa e em repouso, com raio $r = 1 \times 10^{-6}$ m e centro à profundidade h num tanque com um líquido polar de densidade ρ igual à do óleo. Na notação usual, a pressão no centro da gota é $p = p_a + \rho gh + \frac{2\rho}{r}$. 4
- A. Errado B. Certo

Resposta:

Errado, a certa seria $p = p_a + \rho gh + \frac{2\sigma}{r}$ onde σ é a tensão superficial dessa interface que é única, portanto tem o 2.

- (b) Num vórtice de raio R em rotação de corpo sólido a circulação para qualquer $r \leq R$ é zero. 4
- A. Certo B. Errado

Resposta:

Errado. A circulação é definida como $\Gamma = \oint_0^{2\pi} u_\theta dl$. Em rotação de corpo sólido $u_\theta = \omega r$, e num círculo $dl = r d\theta$ portanto $\Gamma = \oint_0^{2\pi} \omega r \cdot r d\theta = \oint_0^{2\pi} \omega r^2 d\theta = 2\pi\omega r^2 \neq 0$

- (c) A taxa de deformação dada por: $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ exclui o termo $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$. 4
- A. Errado B. Certo

Resposta:

Errado. Como inclui $i = j$, inclui $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

- (d) A força centrífuga tem a mesma magnitude e direção da força centrípeta, mas sentido oposto, portanto num sistema não acelerado elas se anulam. 4
- A. Certo B. Errado

Resposta:

Errado. A centrífuga é fictícia e só existe no sistema de referência não-inercial. A centrípeta é uma força verdadeira e só existe no sistema de referência inercial. Por estarem em sistemas diferentes elas não podem ser combinadas de forma nenhuma.

- (e) As linhas de corrente de um fluxo bidimensional incompressível são definidas como: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$, ou seja, $v dx = u dy$ 4
- A. Certo B. Errado

Resposta:

2. Demonstre que $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ e $\epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \hat{x}_i$ são iguais.

10

Dica: Abra o rotacional e passe para notação indicial, incluindo os versores.

Resposta:

Da definição do rotacional:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{u} &= \vec{\omega} \text{ é a vorticidade.} \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{z} \\ &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \hat{x}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \hat{x}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \hat{x}_3 \end{aligned}$$

onde eliminados os parênteses, cada derivada parcial é da forma

$$\omega_i = \pm \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \hat{x}_i \quad \text{em notação tensorial.}$$

Os índices não se repetem e esse \pm é positivo para o 1º, 3º e 5º termos onde ijk é cíclico, e negativo para o 2º, 4º e 6º termos onde ijk é anticíclico. Portanto usando a definição de tensor alternante:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk = 123, 231, 312, \text{ (cíclico)} \\ 0 & \text{se quaisquer dois índices forem iguais,} \\ -1 & \text{se } ijk = 321, 213, 132 \text{ (anticíclico).} \end{cases}$$

$$\vec{\omega} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad \text{Muahahaha!}$$

3. O fluxo dado por $\psi = -2Axy(x^2 + y^2)^{-2}$ é incompressível? Justifique matematicamente.

15

Dica: A equação acima tem partes que parecem com o raio do círculo, com o seno e/ou cosseno. Evidentemente é mais fácil trabalhar num sistema de coordenadas cilíndrico.

Resposta:

Sim. Convertendo para um sistema de coordenadas cilíndrico, com um pouco de trigonometria de ensino médio temos:

$$\psi = \frac{-2Axy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-A}{x^2 + y^2} 2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-A}{r^2} 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{A}{r^2} \sin 2\theta$$

Assim ficou bem mais fácil calcular as velocidades:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{-A}{r^3} \frac{\partial \sin 2\theta}{\partial \theta} = \text{(regra da cadeia)} - \frac{2A}{r^3} \cos 2\theta$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = A \sin 2\theta \frac{\partial r^{-2}}{\partial r} = -\frac{2A}{r^3} \sin 2\theta.$$

Se for incompressível, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, fazendo as derivadas e somando:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = -2A \cos 2\theta \frac{\partial r^{-2}}{\partial r} - \frac{2A}{r^3} \frac{\partial \sin 2\theta}{\partial \theta} =$$

$$\frac{4A}{r^3} \cos 2\theta - \frac{4A}{r^3} \cos 2\theta = 0$$

4. Esta é a **eq. de Navier–Stokes**: $\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{g} + \rho(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})) - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{u}$. (1) 10

Um rio flui para leste sobre 30°N a 3 m/s e tem 1 km de largura. Considere o fluxo estacionário, linear, invíscido, homogêneo e hidrostático. Calcule o desnível meridional entre as margens a partir da equação 1.

Dica: Na horizontal o balanço é geostrófico e na vertical é hidrostático. Use a gravidade aparente.

Resposta:

Sobra o balanço entre as forças de Coriolis e do gradiente de pressão na horizontal e a hidrostática na vertical. Com o rio flui na direção zonal, a velocidade só tem a componente u não-nula. O balanço é

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2\rho\Omega \sin 30^\circ u, \text{ aproximando para diferenças finitas, } \frac{\Delta p}{\Delta y} = 2\rho\Omega \sin 30^\circ u$$

Usando hidrostática para converter a pressão em altura, transformo \vec{g} em gravidade aparente:

$$\rho g \Delta h = 2\rho\Omega \sin 30^\circ u \Delta y, \quad \Delta h = \frac{2\Omega \sin 30^\circ u \Delta y}{g}$$

Fazendo as contas,

$$\Delta h = \frac{2 \cdot 7.2 \times 10^{-5} \cdot 0.5 \cdot 3}{10} = 2.16 \times 10^{-5} \text{ m}$$

5. Esta também é a **eq. de Navier–Stokes**: $\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{g} - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{u}$. (2)

(a) Dado um fluxo oceânico estacionário, linear e forçado pelo vento, suponha também que a interface oceano-atmosfera é perfeitamente horizontal e que o fluxo é homogêneo e hidrostático. Dois termos formam o **balanço horizontal** e outros dois formam o **balanço vertical de momentum**. Escreva essas duas equações. 10

Dica: Note que as 3 últimas simplificações fazem que só haja variação da pressão por causa do peso da coluna d'água.

Resposta:

Aplicando as simplificações temos: $0 = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{g} - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{u}$. Com aquelas 3 condições o balanço hidrostático $\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$ é a componente vertical:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \text{ ou integrando em } z, p = p_a + \rho g z \text{ definindo a pressão atmosférica.}$$

Na horizontal sobra $\mu \nabla^2 \vec{u} = 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{u}$.

- (b) Abra a equação do
- balanço horizontal**
- obtida no item (a) em duas componentes horizontais
- \hat{i}_x
- e
- \hat{i}_y
- .

10

Dicas: Vamos simplificar o termo com o Laplaciano, pois $\nabla^2 \vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$, abrindo seriam 12 termos! Relaxe. Considere apenas os 2 maiores termos: as derivadas segundas das velocidades horizontais na direção vertical. No balanço horizontal, coloque só esses termos nas equações para cada direção, o termo em u vai na direção \hat{i}_x e o termo em v na direção \hat{i}_y , um em cada uma. Não esqueça considerar o seno da latitude ao abrir o outro termo do balanço.

Resposta:

Na horizontal sobrou $\mu \nabla^2 \vec{u} = 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{u}$, simplificando o Laplaciano do termo viscoso e abrindo o produto vetorial do termo de Coriolis:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -2\rho \Omega \sin \theta v \quad \text{em } \hat{i}_x \\ \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= 2\rho \Omega \sin \theta u \quad \text{em } \hat{i}_y \end{aligned}$$

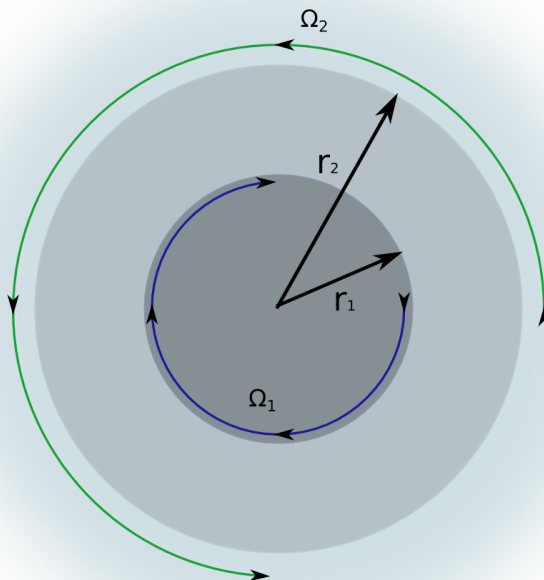
- (c) Substitua as tensões horizontais de cisalhamento (
- τ_x, τ_y
-) nos termos que vieram do Laplaciano. Bem vindo à dinâmica de Ekman.

5

Resposta:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -2\rho \Omega \sin \theta v & \frac{\partial \tau_x}{\partial z} &= -2\rho \Omega \sin \theta v \\ \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= 2\rho \Omega \sin \theta u & \frac{\partial \tau_y}{\partial z} &= 2\rho \Omega \sin \theta u \end{aligned}$$

6.



Considere o fluxo laminar bidimensional entre dois círculos concêntricos, como indicado na figura ao lado. Seja r_1 o raio do círculo interno que gira com velocidade angular Ω_1 e r_2 o raio do externo que gira com velocidade angular Ω_2 . Há um fluido newtoniano ocupando todo o espaço. Vamos precisar da equação de Navier–Stokes em coordenadas cilíndricas para tratar este problema:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{u_\theta^2}{r} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{u_r u_\theta}{r} \quad (4)$$

$$\text{onde } \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (5)$$

(a) Estas equações são simplificadas e ficam na forma:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\theta^2}{r} \quad (6)$$

$$0 = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} \right) \quad (7)$$

Associe **ordenadamente** os termos (ou grupos de termos) que foram eliminados da Equação 3 com a justificativa física para eliminá-lo(s) da equação 6.

Resposta:

1. $\frac{\partial u_r}{\partial t}$ Fluxo estacionário,
2. $u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$ linear,
3. $\frac{\mu}{\rho} \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)$ fluxo radial zero, e fluxo tangencial independente de θ . Note que não pode ser simplesmente invíscido pois há um termo em μ na equação 7

(b) Para obter uma solução geral para u_θ integre a Equação 7 duas vezes em r . Ao fazer isso ficam 2 constantes de integração a determinar.

Resposta:

Como u_θ só é função de r , $\partial \rightarrow d$. Integrando dos dois lados temos:

$$\int \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(ru_\theta)}{dr} \right) dr = \int 0 dr$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(ru_\theta)}{dr} + C = 0 \quad \text{multiplicando por } r$$

$$\frac{d(ru_\theta)}{dr} + Cr = 0 \quad \text{integrando de novo em } r$$

$$\int \frac{d(ru_\theta)}{dr} dr = \int -Cr dr$$

$$ru_\theta = -C \frac{r^2}{2} - D \quad \text{dividindo por } r$$

$$u_\theta = -\frac{C}{2} r - \frac{D}{r} \quad \text{definindo } A = -\frac{C}{2} \quad B = -D$$

$$u_\theta = Ar + \frac{B}{r}.$$

Resposta:

(c) Obtenha u_θ para $0 \leq r \leq r_1$ usando a solução geral obtida no item (b) e as condições de não-escorregamento e fluxo zero na origem para determinar as constantes. Como costumamos chamar

esse tipo de fluxo?

Resposta:

Utilizando a condição de $u_\theta(0) = 0$ obtemos $B = 0$. Utilizando a condição de contorno $u_\theta(r_1) = \Omega_1 r_1$ obtemos $\Omega_1 r_1 = A r_1 \Rightarrow A = \Omega_1$. Portanto na parte interna $u_\theta = \Omega_1 r$ temos rotação de corpo sólido.

- (d) Obtenha u_θ para $r > r_2$ usando a solução geral obtida no item (b), as condições de não-escorregamento e de energia finita para determinar as constantes. Como costumamos chamar esse tipo de fluxo? 5

Resposta:

Utilizando a condição de contorno de energia finita $u_\theta(\infty) = 0$ obtemos $A = 0$. Utilizando a condição de contorno $u_\theta(r_2) = \Omega_2 r_2$ obtemos $\Omega_2 r_2 = \frac{B}{r_2} \Rightarrow B = \Omega_2 r_2^2$. Portanto na parte externa $u_\theta = \frac{\Omega_2 r_2^2}{r}$ temos um vórtice irrotacional.

- (e) Obtenha u_θ para $r_1 \leq r \leq r_2$ usando a solução geral obtida no item (b) e as condições de não-escorregamento. Deixe A e em termos das constantes conhecidas e B em termos de A e das constantes. 5

Resposta:

Utilizando a condição de contorno $u_\theta(r_1) = \Omega_1 r_1$ obtemos $(A - \Omega_1)r_1^2 + B = 0$. Utilizando a condição de contorno $u_\theta(r_2) = \Omega_2 r_2$ obtemos $(A - \Omega_2)r_2^2 + B = 0$. Eliminando B obtemos

$$A = \frac{\Omega_1 r_1^2 - \Omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \text{ e } B = \frac{\Omega_1 - A}{r_1^2}$$

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	20	10	15	10	25	30	110
Nota							



Memória não-volátil:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

O tensor alternante ϵ_{ijk} é definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk = 123, 231, 312, \text{ (cíclico)} \\ 0 & \text{se quaisquer dois índices forem iguais,} \\ -1 & \text{se } ijk = 321, 213, 132 \text{ anticíclico).} \end{cases}$$

Conversão do sistema retangular (x, y, z) para o cilíndrico (r, θ, z) e vice-versa:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$$

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}, \theta = \arctan \frac{y}{x}, z = z.$$

Quanto aos versores,

$$\hat{i}_x = (\hat{i}_r \cos \theta - \hat{i}_\theta \sin \theta), \hat{i}_y = (\hat{i}_r \sin \theta + \hat{i}_\theta \cos \theta), \hat{i}_z = \hat{i}_z$$

Potencial de velocidade e função de corrente:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\Omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar

$$\vec{\nabla} E = \left(\frac{\partial E}{\partial r} \right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial \theta} \right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{\partial E}{\partial z} \right)_{\hat{i}_z}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)_{\hat{i}_z}$$
