IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova II** Nome:________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

---

1. As afirmações a seguir são certas ou erradas? Justifique sua resposta.

   (a) Num vórtice de raio R em rotação de corpo sólido a circulação para qualquer $r \leq R$ é zero. A. Certo **B. Errado** $\boxed{4}$

   Resposta:
   Errado. A circulação é definida como $\Gamma = \oint_0^{2\pi} u_\theta dl$. Em rotação de corpo sólido $u_\theta = \omega r$, e num círculo $dl = r\, d\theta$ portanto $\Gamma = \oint_0^{2\pi} \omega r.rd\theta = \oint_0^{2\pi} \omega r^2 d\theta = 2\pi\omega\, r^2 \neq 0$

   (b) A taxa de deformação dada por: $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, com $i \neq j$ exclui o termo $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$. A. Errado **B. Certo** $\boxed{4}$

   Resposta:
   Sim, exclui $i = j$. ou seja, exclui $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

   (c) Considere uma bolha de ar esférica com diâmetro 0,1 mm, submersa, com o centro a 1 m de profundidade num tanque com água do mar com densidade ρ em repouso. A pressão no centro dela é dada exatamente por $p = \rho g h$. **A. Errado** B. Certo $\boxed{4}$

   Resposta:
   Errado, numa bolha desse tamanho a tensão superficial pode ser relevante.

   (d) A força centrípeta tem a mesma direção da força centrífuga, mas sentido oposto, portanto num sistema em equilíbrio rotacional elas se anulam. A. Certo **B. Errado** $\boxed{4}$

   Resposta:
   Errado. A centrífuga é fictícia e só existe no sistema de referência não-inercial. A centrípeta é uma força verdadeira e só existe no sistema de referência inercial. Por estarem em sistemas diferentes elas não podem ser combinadas de forma nenhuma.

   (e) A equação de Bernoulli na forma $\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z + p = B$. é aplicável a fluxos estacionários, irrotacionais e incompressíveis. **A. Certo** B. Errado $\boxed{4}$

   Resposta:
   Certo. Ela foi deduzida a partir da conservação de momentum com essas restrições para nos livrarmos da aceleração e do termo viscoso.

2. Marque uma alternativa correta (f=campo escalar, $\vec{u}$=campo vetorial): [10]

$\nabla \times (\nabla f)$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla \times (\nabla \times f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u})$	○ Vetor	√ **Escalar**	○ NDA	$\nabla(\nabla \cdot f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla \cdot (\nabla \times f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**	$\nabla \cdot (\nabla \vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA
$\nabla \times (\nabla \times \vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla \cdot (\nabla f)$	○ Vetor	√ **Escalar**	○ NDA
$\nabla(\nabla \cdot \vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u})$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**

3. O fluxo dado pelas equações abaixo é incompressível? Demonstre matematicamente e descreva brevemente como é o fluxo. [15]

$$\begin{cases} u &= \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,\hat{i} \\ v &= \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\hat{j} \\ w &= \dfrac{22}{7}\,\hat{k} \end{cases}$$

Resposta:

Sim. Há várias maneiras de se chegar na resposta certa (e mais ainda de se chegar na errada).

As equações acima lembram as de um círculo. O módulo de $\vec{v}$ é constante ao longo de círculos. Agora fica evidente que é mais fácil trabalharmos num sistema de coordenadas cilíndrico (r,θ,z) associado ao cartesiano (x,y,z). Nesse sistema $y = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$ e $r = \sqrt{(x^2+y^2)}$, portanto a velocidade é:

$$\vec{v} = -\frac{\sin\theta}{r}(i_r\cos\theta - i_\theta\sin\theta) + \frac{\cos\theta}{r}(i_r\sin\theta + i_\theta\cos\theta) + \frac{22}{7}i_z.$$

Note que dentro dos parênteses você tem os versores convertidos. Agrupando em i_r e i_θ,

$$\vec{v} = 0i_r + \frac{1}{r}i_\theta + \frac{22}{7}i_z;$$

ou seja, temos a componente u_θ que depende só do raio (decai com o inverso do raio) e a componente u_z (constante). Do divergente em coordenadas cilíndricas sobram $\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\hat{i_\theta}$ e $\frac{\partial u_z}{\partial z}\hat{i_z}$ que são obviamente nulas.

4. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual e responda:

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} + \rho(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})) - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}. \quad (1)$$

(a) Em que latitude(s) a aceleração centrífuga te deixará mais o mais leve possível? [5]

Resposta:
Nos equador, $\cos(\theta) = 1$.

(b) Simplifique a equação 1 para o caso linear e forçado pelo vento, usando a gravidade aparente. [5]

Resposta:

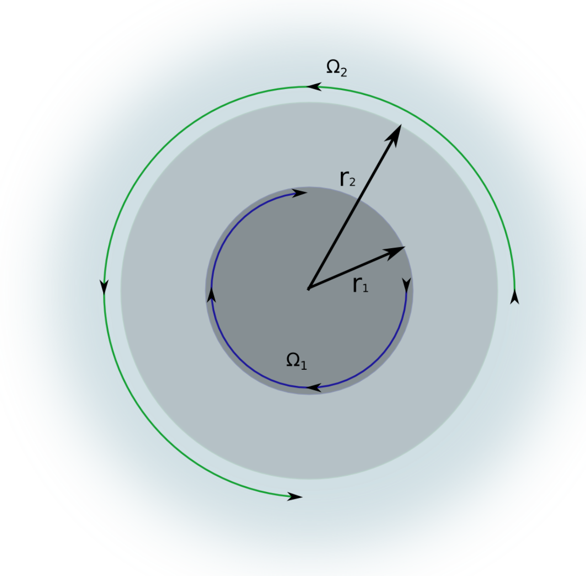
$$\rho(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}) \;=\; -\vec{\nabla} p + \;\mu \nabla^2 \vec{u} \;+\; \rho \vec{g_a} \;-\; 2\rho\vec{\Omega} \times \vec{u}.$$

(c) Simplifique e modifique a equação 1 para um fluxo linear e invíscido que ocorre sobre o Trópico do Serpentário (30°N) de um exoplaneta que gira de forma que um dia de lá tem 30 minutos daqui. Dê a resposta em termos de Ω que é a velocidade angular da Terra. Comente a tua resposta. 5

Resposta:

$$\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \;=\; -\vec{\nabla} p \;\;+\; \rho\vec{g} \;+\; \rho\frac{1}{4}(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})).$$

---

5. 

Considere o fluxo laminar bi-dimensional entre dois círculos concêntricos, como indicado na figura ao lado. Seja r_1 o raio do círculo interno que gira com velocidade angular Ω_1 e r_2 o raio do externo que gira com velocidade angular Ω_2. Há um fluido newtoniano ocupando todo o espaço. Vamos precisar da equação de Navier–Stokes em coordenadas cilíndricas para tratar este problema:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \;=\; -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{u_\theta^2}{r} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \;=\; -\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) - \frac{u_r u_\theta}{r} \tag{3}$$

$$\text{onde} \quad \nabla^2 \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{4}$$

(a) Estas equações são simplificadas e ficam na forma: 5

$$0 \;=\; -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\theta^2}{r} \tag{5}$$

$$0 \;=\; \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r}\right) \tag{6}$$

Associe ordenadamente os termos (ou grupos de termos) que foram eliminados da Equação 2 com a justificativa física para eliminá–lo(s) da equação 5.

Resposta:

1. $\frac{\partial u_r}{\partial t}$ Fluxo estacionário,

2. $u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$ linear,

3. $\frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)$ fluxo radial zero, e fluxo tangencial independente de θ. Note que não pode ser simplesmente invíscido pois há um termo em μ na equação 6

(b) Para obter u_θ no espaço entre $r = 0$ e $r = r_2$ integre a Equação 6 duas vezes em r. Ao fazer isso ficam 2 constantes de integração a determinar. Use as condições de não–escorregamento para determinar essas constantes. 10

Resposta:

Como u_θ só é função de r, $\partial \to d$. Integrando dos dois lados temos:

$$\int \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(ru_\theta)}{dr}\right)dr = \int 0dr$$

$$\frac{1}{r}\frac{d(ru_\theta)}{dr} + C = 0 \qquad \text{multiplicando por } r$$

$$\frac{d(ru_\theta)}{dr} + Cr = 0 \qquad \text{integrando de novo em } r$$

$$\int \frac{d(ru_\theta)}{dr}dr = \int -Crdr$$

$$ru_\theta = -C\frac{r^2}{2} - D \qquad \text{dividindo por } r$$

$$u_\theta = -\frac{C}{2}r - \frac{D}{r} \qquad \text{definindo } A = -\frac{C}{2} \quad B = -D$$

$$u_\theta = Ar + \frac{B}{r}.$$

Utilizando as condições de contorno obtemos:

$$A = \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{e} \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \qquad \text{que resulta em}$$

$$u_\theta = \frac{1}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\left\{\left[\Omega_2 - \Omega_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]r\right\} + \frac{r_1^2}{r}(\Omega_1 - \Omega_2)$$

(c) Qual a expressão para u_θ quando $r_2 \to \infty$? Fisicamente o que representa esse fluxo? 5

Resposta:

Todos os termos com r_2 no denominador vão para zero, restando $u_\theta = \frac{\Omega_1 R_1^2}{r}$, um vórtice irrotacional.

(d) Qual a expressão para u_θ quando $r_1 \to 0$? Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

Resposta:
Todos os termos com r_1 no numerador vão para zero, restando $u_\theta = \Omega_2 R_2$, um vórtice em rotação de corpo sólido.

(e) Qual a expressão para u_θ quando $r_1 \to r_2$? Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

Resposta:
É a soma das duas soluções acima, um vórtice de Rankine.

6. Suponha que temos um tanque de 18 m de raio e nele fazemos um vórtice aproximadamente irrotacional e estável cujo olho tem um raio idealmente pequeno. A "força" centrífuga por unidade de volume para um raio de 0.08 m é 7.2 N.m^{-3}.

(a) Que termo da equação de Navier–Stokes faz o papel de força centrípeta nesse vórtice? $\boxed{5}$

Resposta:
O gradiente de pressão.

(b) Utilize a forma geral da equação de Bernoulli para fluxos irrotacionais: $\frac{1}{2}u^2 + gz + \int \frac{dp}{\rho} = B$ e calcule a depressão $z(r)$ (em m) para $r = 25$ cm e $r = 0.5$ cm. $\boxed{15}$

Resposta:
A interface constitui uma superfície de pressão constante (atmosférica), portanto as constantes e as integrais são iguais: $\dfrac{1}{2}u_\infty^2 + gz_\infty + \int \dfrac{dp}{\rho} = C = \dfrac{1}{2}u_{25}^2 + gz_{25} + \int \dfrac{dp}{\rho}$
Mas se $r \to \infty$ $u_\theta \to 0$ $z \to 0$ a eq. de Bernoulli se reduz a
$\dfrac{1}{2}u_{25}^2 = -gz_{25}$
Como é um vórtice irrotacional: $u_{25} = \frac{C}{r} = \frac{0.00192}{0.25} = 0.0077$ ms^{-1}
Inserindo na eq. de Bernoulli: $\dfrac{1}{2}(0.0077)^2 = -9.81z_{25} \quad \Rightarrow z_{25} = 3 \times 10^-6$ m,
e no caso de r=0.5 cm temos: $u_{0.5} = \frac{C}{r} = \frac{0.00192}{.005} = 0.384$ ms^{-1}
$\dfrac{1}{2}(0.384)^2 = -9.81z_{0.5} \quad \Rightarrow z_{0.5} = 7.5 \times 10^-3$ m ou seja 7.5 mm.

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	20	10	15	15	30	20	110
Nota							

Memória não–volátil:

$\Gamma = \oint_C \vec{u}.\vec{dl}$

Conversão do sistema retangular (x, y, z) para o cilíndrico (r, θ, z) e vice-versa:
$y = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$, $z = z$ e

$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $z = z$.
Quanto aos versores,
$i_x = (i_r \cos\theta - i_\theta \sin\theta)$, $i_y = (i_r \sin\theta + i_\theta \cos\theta)$, $i_z = i_z$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar						
Função escalar	$E =$	$E(r,\theta,z)$				
Função vetorial	$\vec{V} =$	$u_r(r,\theta,z)_{\hat{i}_r}$	$+$	$u_\theta(r,\theta,z)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$u_z(r,\theta,z)_{\hat{i}_z}$
Gradiente	$\vec{\nabla}E =$	$\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente	$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_r)}{\partial r}$	$+$	$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$	$+$	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional	$\vec{\nabla}\times\vec{V} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$