IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova II** Nome:________________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

---

1. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? Justifique as falsas.

(a) A taxa de deformação por cisalhamento na forma tensorial, $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, inclui o termo de deformação por compressão. A. Errado **B. Certo** $\boxed{4}$

Resposta:
Sim, trata–se dos termos onde $i = j$.

(b) A equação da continuidade pode ser simplificada para a forma $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ mesmo em processos vigorosamente convectivos no oceano pois o fluido é compressível. Tome como exemplo a região próxima de plumas hidrotérmicas, desconsiderando bolhas, mudança de estado e reações químicas. **A. Errado** B. Certo $\boxed{4}$

Resposta:
Errado, ela não pode ser simplificada pois o termo advectivo da derivada material é significativo por causa do gradiente de densidade.

(c) O potencial de velocidade é indefinido para fluxos irrotacionais bidimensionais. **A. Errado** B. Certo $\boxed{4}$

Resposta:
É justamente o contrário: se $\vec{v}$ é irrotacional então $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, se definirmos $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ e $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ essa condição é satisfeita.

(d) As forças de Coriolis e centrífuga são fundamentalmente diferentes da força gravitacional pois dependem da velocidade do sistema de referência e não de propriedades da matéria. **A. Errado** B. Certo $\boxed{4}$

Resposta:
Dependem da variação da velocidade (rotação) do sistema de referência e não da velocidade.

(e) Apenas nos fluidos Newtonianos a deformação é linearmente proporcional à tensão. A. Errado **B. Certo** $\boxed{4}$

Resposta:
Essa é a definição de fluido Newtoniano.

2. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual e responda:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{g} + \rho(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})) - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{u}. \tag{1}$$

(a) Em que latitude(s) a aceleração centrífuga tem magnitude zero? $\boxed{5}$

Resposta:
Nos polos pois $r\cos(\theta) = 0$.

(b) Simplifique a equação 1 para o caso estacionário, não–linear e forçado pelo vento, usando a gravidade aparente. 5

Resposta:

$$\rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \;=\; -\vec{\nabla}p + \;\mu\nabla^2\vec{u} \;+\; \rho\vec{g_a} \;+ - \; 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}.$$

(c) Simplifique a equação 1 para um fluxo estratificado, estacionário, não–linear e viscoso que ocorre sobre o equador de um planeta que gira rápido. 5

Resposta:

$$\rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \;=\; -\vec{\nabla}p \;+\; \mu\nabla^2\vec{u} \;+\; \rho\vec{g} \;+\; \rho(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})).$$

3. Desenvolva o termo advectivo da equação 1 explicitando todas as componentes. Explique o significado físico dessas componentes. 10

Resposta:
O termo advectivo é obtido a partir da derivada material:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned}
&u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots\\
&v\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial w}{\partial y} + \cdots\\
&w\frac{\partial u}{\partial z} + w\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}$$

Ele expressa a advecção pela componente da velocidade numa dada direção (e.g. u) da variação de uma componente qualquer da velocidade (e.g. v) nessa direção (e.g. x).

4. Durante o curso a segunda lei da termodinâmica e a equação da continuidade foram combinadas na dedução desta equação:

$$\rho\frac{DS}{Dt} \;=\; \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) \;-\; \frac{\vec{q}}{T^2}\cdot\vec{\nabla}T \;+\; \frac{\Phi}{T} \tag{2}$$

(a) Utilize a equação da difusão simples de calor na Equação 2 e obtenha a **equação da produção de entropia**. Identifique nela os seguintes termos: 5

1. variação total da entropia,
2. convergência do fluxo de calor,
3. produção de entropia por condução e
4. produção de entropia por atrito viscoso.

Resposta:

$$\underbrace{\rho\frac{DS}{Dt}}_{\text{var. da entropia}} = \underbrace{-\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right)}_{\text{converg. calor}} + \underbrace{\frac{k}{T^2}(\vec{\nabla}T)^2}_{\text{prod.ent.condução}} + \underbrace{\frac{\Phi}{T}}_{\text{prod.ent.viscosidade}}$$

(b) Simplifique a equação obtida no item (a) considerando um fluxo invíscido com divergente do fluxo de calor igual a zero. Este caso restringe de algum modo a variação da entropia? $\boxed{5}$

Resposta:

$$\rho\frac{DS}{Dt} = \frac{k}{T^2}(\vec{\nabla}T)^2$$

Sim, restringe a valores não–negativos, ou seja, a entropia se conserva (caso isotérmico) ou aumenta com o tempo (caso geral).

(c) Simplifique a equação obtida no item (a) considerando um fluxo invíscido e horizontalmente isotérmico. Dica: a resposta deve ter um termo com o divergente do fluxo de calor, e dois que dependem da estratificação. $\boxed{10}$

Resposta:
O último termo se anula pela inviscidez. Todas as derivadas de T em x e y do penúltimo termo se anulam e restam estes termos:

$$\rho\frac{DS}{Dt} = -\frac{\partial\left(\frac{q_x}{T}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{q_y}{T}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{q_z}{T}\right)}{\partial z} + \frac{k}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2$$

usando a regra do quociente, anulando as derivadas de T em x e y e reagrupando o divergente temos:

$$\rho\frac{DS}{Dt} = -\frac{1}{T}\vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{q_z}{T^2} + \frac{k}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2$$

5. O fluxo dado pelas equações abaixo é incompressível? Explique a sua resposta (b é constante). $\boxed{15}$

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r}\cos(br^2) \\ u_\theta = 2r\theta b\frac{\sin(2br^2)}{\cos(br^2)} \\ u_z = -2bz\sin(br^2) \end{cases}$$

Resposta:

Divergente em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Para o 1º termo do lado direito, $ru_r = \cos(br^2)$ portanto:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -2b\sin(br^2).$$

A derivada em z do 3º termo do lado direito é trivial:

$$\frac{\partial[-2bz\sin(br^2)]}{\partial z} = -2b\sin(br^2).$$

Antes de se escabelar com a derivada do 2º termo, lembre que
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, portanto
$2\sin(2x) = 4\sin(x)\cos(x)$ e
$4\sin(x) = \frac{2\sin(2x)}{\cos(x)}$.
Faça $x = 2br^2$ e multiplique tudo por $r\theta b$ para obter $4r\theta b\sin(br^2)$.
Desta forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial[4r\theta b\sin(br^2)]}{\partial\theta} \quad = \quad 4b\sin(br^2).$$

A soma é nula e portanto o fluxo é incompressível.

6. Considerando o fluxo independente do tempo descrito por: $\vec{v} = \dfrac{-2y}{x^2+4y^2}\vec{i} + \dfrac{x}{x^2+4y^2}\vec{j} + 0\vec{k}$, $\boxed{20}$

   Deduza a equação das linhas de corrente ($\psi(x,y)$).

Resposta:

Tem mais de um jeito de resolver este problema. Este é o que eu acho mais fácil:
Primeiro note que se fizermos a mudança de variáveis $2y = Y$ temos denominadores da forma $x^2 + Y^2$ que fazem o módulo de $\vec{v}$ ser constante ao longo de círculos. É evidente que fica mais fácil trabalharmos num sistema de coordenadas cilíndrico (r, θ, z) associado ao cartesiano (x,Y,z).

$$\vec{v} = -\frac{\sin\theta}{r}(i_r\cos\theta - i_\theta\sin\theta) + \frac{\cos\theta}{r}i_r(\sin\theta + i_\theta\cos\theta)$$

agrupando em i_r e i_θ,

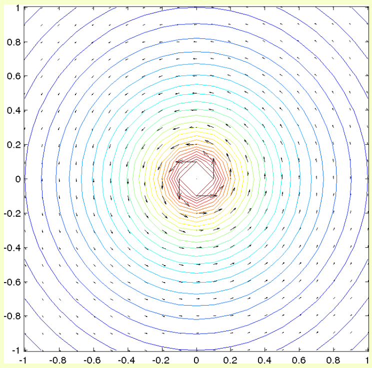
$$\vec{v} = 0i_r + \frac{1}{r}i_\theta;$$

ou seja, os vetores são tangenciais e constantes em θ e portanto formam círculos cuja magnitude cai com o raio. Vejamos como fica ψ:

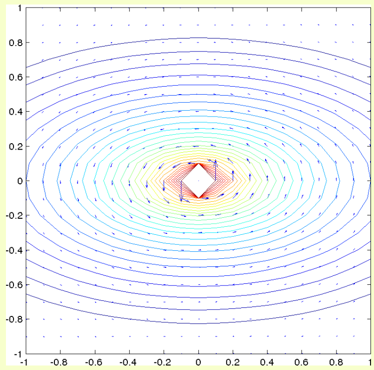
$$\psi = \psi(r,\theta)$$
$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}dr + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta$$
$$\psi = \int \frac{\partial\psi}{\partial r}dr + \int \frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta$$
$$\psi = \int u_\theta dr + \int r u_r d\theta$$
$$\psi = \int -\frac{1}{r}dr + \int r0d\theta$$
$$\psi = -\ln r$$

mas $r = \sqrt{x^2+Y^2}$. precisamos substituir para y:

$$\psi = -\ln(\sqrt{x^2+4y^2}).$$



Neste caso o eixo vertical é Y, precisamos fazer $y = Y/2$.



Revertendo para o y original, o campo de ψ fica assim.

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	20	15	10	20	15	20	100
Nota							

Memória não–volátil:

A lei de Fourier é $\vec{q_t} = -k_t\vec{\nabla}T$ onde k_t é o coeficiente positivo de condutividade térmica. Na transformação de sistemas de coordenadas cartesianas para cilíndricas,

$$\begin{cases} \hat{i} = \hat{i}_r\cos(\theta) - \hat{i}_\theta\sin(\theta) \\ \hat{j} = \hat{i}_r\sin(\theta) + \hat{i}_\theta\cos(\theta) \\ \\ x = r\cos(\theta) \\ y = -r\sin(\theta) \end{cases}$$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar						
Função escalar	$E =$	$E(r,\theta,z)$				
Função vetorial	$\vec{V} =$	$u_r(r,\theta,z)_{\hat{i}_r}$	$+$	$u_\theta(r,\theta,z)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$u_z(r,\theta,z)_{\hat{i}_z}$
Gradiente é vetor!	$\vec{\nabla} E =$	$\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente é escalar!	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\ u_r)}{\partial r}$	$+$	$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$	$+$	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional é vetor!	$\vec{\nabla} \times \vec{V} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$

Esta é a definição de ψ em coords. cartesianas:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Esta é a definição de ψ em coords. cilíndricas:

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases}$$