IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova II** Nome:______________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o telefone.

♠

1. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? Justifique as falsas. Um item errado desta questão anula um certo.

   (a) Num sistema de referência não–inercial a segunda lei de Newton não se aplica. Neste caso é necessária uma teoria independente da segunda lei, baseada na conservação de momento angular. A. Certo **B. Errado** 5

   Resposta:
   A segunda lei de Newton se aplica em qualquer sistema não–relativístico e além disso a conservação de momento angular é um caso particular da segunda lei.

   (b) A unidade de torque, energia e trabalho é a mesma. **A. Certo** B. Errado 5

   Resposta:

   (c) Precisamos de, no mínimo, duas medidas de velocidade num fluxo bi–dimensional para podermos estimar a vorticidade. A. Certo **B. Errado** 5

   Resposta:
   $w = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{\Delta v}{\Delta y} - \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{v_2 - v_1}{y_2 - y_1} - \frac{u_4 - u_3}{x_4 - x_3}$ onde os pontos 1,2 e 3,4 estão dispostos em cruz simétrica com 1,2 dispostos na vertical.

   (d) A velocidade angular é um vetor perpendicular ao plano de rotação e tem unidade de s^{-1}. **A. Certo** B. Errado 5

   Resposta:

   (e) A equação de Navier–Stokes num sistema em rotação, portanto não–inercial, expressa a conservação de momento angular. A. Certo **B. Errado** 5

   Resposta:
   Ela expressa a conservação de momentum (momento linear) em qualquer sistema de referência. A conservação de vorticidade (i.e. de momento angular) é deduzida a partir do rotacional da equação de Navier–Stokes.

2. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual e responda:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{g} + \rho(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})) - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{u}. \qquad (1)$$

   (a) Em que latitude(s) a aceleração centrífuga tem direção oposta à aceleração gravitacional? 2

   Resposta:
   No equador.

(b) Simplifique a equação 1 para o caso estacionário e invíscido usando a gravidade aparente. $\boxed{5}$

Resposta:

$$0 \;=\; -\vec{\nabla}p \;+\; \rho\vec{g_a} \;+ -\; 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}.$$

(c) Simplifique a equação 1 para um fluxo estratificado, estacionário, não–linear e viscoso onde se pode desprezar a aceleração de Coriolis mas não a centrífuga. $\boxed{5}$

Resposta:

$$\rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \;=\; -\vec{\nabla}p \;+\; \mu\nabla^2\vec{u} \;+\; \rho\vec{g} \;+\; \rho(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})).$$

3. A contração halina, mantendo–se pressão e temperatura constantes, pode ser quantificada desta forma: $\boxed{10}$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \beta\Delta S.$$

Mostre que o coeficiente de contração halina β é dado por

$$\beta = \left(\frac{\partial \ln\rho}{\partial S}\right)_{pT}$$

e explique todas as passagens.

Resposta:

Partindo de que ρ depende de p, T e S, para pequenas variações Δ podemos assumir uma variação linear e independente:

$$\Delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_{ST}\Delta p + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{pS}\Delta T + \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)_{pT}\Delta S;$$

pelo enunciado, p e T são constantes, portanto

$$\Delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)\Delta S;$$

dividindo dos dois lados por ρ, temos

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)\Delta S;$$

lembrando que $\frac{\partial\ln\rho}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}$ e substituindo na equação acima, ela fica assim:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\partial\ln\rho}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\right)\Delta S;$$

podemos "passar o $\ln$" para dentro dos parênteses reconhecendo a regra da cadeia em $\frac{\partial\ln\rho(S)}{\partial S} = \frac{\partial\ln\rho}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial S}$, obtendo

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial S}\right)\Delta S;$$

4. Considerando o fluxo independente do tempo descrito por: $\vec{v} = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j} + 0\vec{k}$, $\boxed{15}$

Deduza a equação das linhas de corrente (ψ).

Dica: esta é a definição de ψ em coords. cartesianas:
$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$
e esta é a definição de ψ em coords. cilíndricas:
$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases}$$

Resposta:

Tem mais de um jeito de resolver este problema. Em coords. cilíndricas eu acho mais fácil:

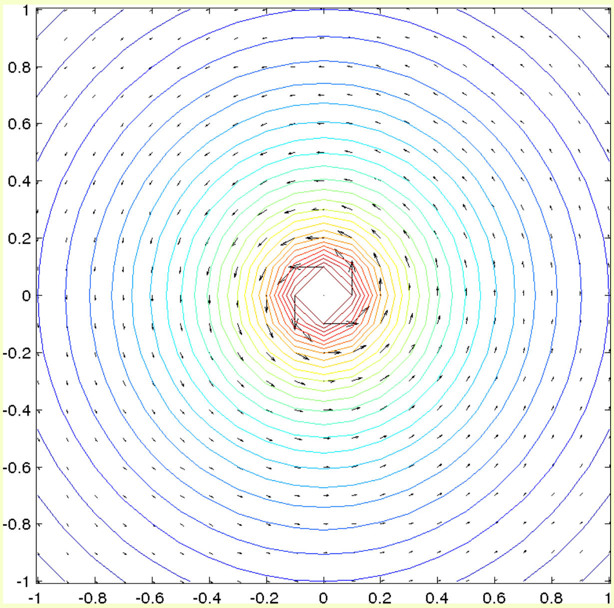
$$\vec{v} = -\frac{\sin\theta}{r}(i_r\cos\theta - i_\theta\sin\theta) + \frac{\cos\theta}{r}i_r(\sin\theta + i_\theta\cos\theta)$$

agrupando em i_r e i_θ,

$$\vec{v} = 0i_r + \frac{1}{r}i_\theta;$$

ou seja, os vetores são tangenciais e constantes em θ e portanto formam círculos cuja magnitude cai com o raio. Vejamos como fica ψ:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(r,\theta) \\ d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r}dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}d\theta \\ \psi &= \int \frac{\partial \psi}{\partial r}dr + \int \frac{\partial \psi}{\partial \theta}d\theta \\ \psi &= \int u_\theta dr + \int r u_r d\theta \\ \psi &= \int -\frac{1}{r}dr + \int r0d\theta \quad = -\ln r \end{aligned}$$



5. Considere a equação de Cauchy na notação usual:

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\cdot\tau \qquad (2)$$

(a) Desenvolva o termo advectivo da equação 2 com todas as suas componentes em (x, y, z, u, v, w) e mostre matematicamente porque ele é chamado de termo não–linear. $\boxed{10}$

Resposta:

O termo advectivo é obtido a partir da derivada material:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \boxed{u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}.$$

Desenvolvendo o último termo:

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{i}+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial w}{\partial y}\right)\hat{j}+\left(w\frac{\partial u}{\partial z}+w\frac{\partial v}{\partial z}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\hat{k}$$

Ele expressa a advecção pela componente da velocidade numa dada direção (e.g. u) da variação de uma componente qualquer da velocidade (e.g. v) nessa direção (e.g. x). Tomando como exemplo o termo $u\frac{\partial u}{\partial x}$, podemos reescrevê–lo como metade da derivada do produto $\frac{1}{2}\frac{\partial u.u}{\partial x}$. Isso é o mesmo que $\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}$ que é quadrática em u, daí a alcunha de não–linear.

6. O redemoinho que vimos no laboratório era um vórtice aproximadamente irrotacional. Suponha que temos agora um tanque de 18 m de raio e nele fazemos um redemoinho cujo olho tem um raio idealmente pequeno. A "força" centrífuga por unidade de volume para um raio de 0.08 m é 7.2 N.m^{-3}.

   (a) Nesse vórtice que termo da equação de Navier–Stokes faz o papel de força centrípeta? $\boxed{3}$

   Resposta:
   O gradiente de pressão.

   (b) Calcule a velocidade tangencial (em m/s) para $r = 5$mm e $r = 40$cm. $\boxed{10}$

   Resposta:
   Para um dado $R = 8mm$, u_θ é dado por: $u_\theta = \Omega R$ portanto $\Omega = \frac{u_\theta}{R}$. A força centrífuga por unidade de volume é dada por $F = \rho\Omega^2 r$ substituindo Ω,

$$F(R) = \rho\frac{u_\theta^2}{R^2}R \;= \rho\frac{u_\theta^2}{R} \qquad \Rightarrow u_\theta = \sqrt{\frac{FR}{\rho}} \;= \sqrt{\frac{7.2\times 0.08}{1000}} \;= 0.024m.s^{-1}$$

   Para qualquer r, como o vórtice é irrotacional, $u_\theta = C/r$ ou $C = ru_\theta$. Posso usar $r = R$ para achar o valor de C:

$$C = ru_\theta \;= 0.08\times 0.024 \;= 0.00192$$

   Em $r = 5\ mm$ temos:

$$u_\theta = \frac{C}{r} \;= \frac{0.00192}{0.005} \;= 384ms^{-1}!!!$$

   Em $r = 40\ cm$ temos:

$$u_\theta = \frac{0.00192}{0.4} = 0.0048ms^{-1} \;= 4.8mms^{-1}.$$

   (c) Utilize a forma geral da equação de Bernoulli para fluxos irrotacionais, $\frac{1}{2}u^2+gz+\int\frac{dp}{\rho} = B$ e calcule a depressão $z(r)$ (em m) para $r = 25$ cm e $r = 0.5$ cm. $\boxed{15}$

   Resposta:
   A interface constitui uma superfície de pressão constante (atmosférica), portanto as constantes e as integrais são iguais: $\frac{1}{2}u_\infty^2 + gz_\infty + \int\frac{dp}{\rho} \;= C \;= \frac{1}{2}u_{25}^2 + gz_{25} + \int\frac{dp}{\rho}$
   Mas se $r\to\infty$ $u_\theta\to 0$ $z\to 0$ a eq. de Bernoulli se reduz a
   $\frac{1}{2}u_{25}^2 = -gz_{25}$

Analogamente ao item anterior: $u_{25} = \frac{C}{r} = \frac{0.00192}{0.25} = 0.0077$ ms^{-1}
Inserindo na eq. de Bernoulli: $\dfrac{1}{2}(0.0077)^2 = -9.81 z_{25} \quad \Rightarrow z_{25} = 3 \times 10^-6$ m,
e no caso de r=0.5 cm temos: $u_{0.5} = \frac{C}{r} = \frac{0.00192}{.005} = 0.384$ ms^{-1}
$\dfrac{1}{2}(0.384)^2 = -9.81 z_{0.5} \quad \Rightarrow z_{0.5} = 7.5 \times 10^-3$ m ou seja 7.5 mm.

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	25	12	10	15	10	28	100
Nota							