IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova I** Nome:____________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A tentativa de violação de qualquer uma das regras abaixo anulará a tua prova.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

♠

1. Assinale a(s) alternativa(s) correta(s). Justifique as incorretas. [10]

A. Suponha que prendemos um mini-CTD à pele de uma baleia e soltamos o animal. As medidas tomadas por esse instrumento podem ser consideradas Lagrangianas.

Resposta:
Errado. Baleia tem vontade própria, não segue o fluxo.

B. A dimensão do coeficiente de viscosidade dinâmica μ é [ML^{-1}T^{-1}]

Resposta:
Certo

C. A tensão superficial de uma gota esférica pode ser estimada a partir do equilíbrio entre o trabalho de compressão e a variação da área.

Resposta:
Certo.

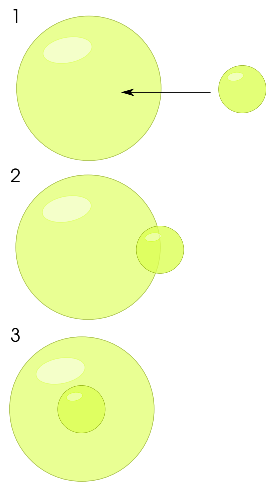
D. O rotacional do divergente da velocidade de um fluxo qualquer é zero.

Resposta:
Errado. O divergente da velocidade é um escalar, calcular o rotacional de um escalar não faz sentido.

E. O termo advectivo da derivada total é chamado de não-linear, pois podemos usar a regra de derivadas do produto para colocar alguns termos na forma $\frac{1}{2}\frac{\partial u_i^2}{\partial x_i}$.

Resposta:
Certo.

2. Considere que no quadro (1) da figura abaixo a bolhinha tem raio r e, no quadro (2), ela colide com a bolhona de raio R, sendo $R^3 \gg r^3$. No quadro (3) a bolhinha atravessou a parede e se instalou no centro, entretanto sem trocar fluido com a bolhona. Considere que a tensão superficial do sabão da bolhinha é σ_1 e a da bolhona é σ_2. Qual a diferença de pressão entre o interior da bolhinha e a região fora da bolhona? [10]



Resposta:
As bolhas tem 2 interfaces, portanto no quadro (1) temos, para a bolhinha $\Delta p_1 = \frac{4\sigma_1}{r}$ e para a bolhona $\Delta p_2 = \frac{4\sigma_2}{R}$. A tensão superficial mantém a diferença de pressão entre as partes interna e externa de cada bolha. Portanto as pressões se somam no quadro (3), resultando em

$$\Delta p = \frac{4\sigma_1}{r} + \frac{4\sigma_2}{R} = 4\left(\frac{R\sigma_1 + r\sigma_2}{rR}\right).$$

Resposta:

3. Um aumento de 2m no nível dos oceanos pode afetar o escoamento de esgoto das cidades costeiras, inundar planícies litorâneas, modificar o ecossistema de manguezais e fragilizar o sistema de proteção a ressacas, tufões e furacões. Segundo dados de satélites altimétricos esse aumento está ocorrendo de fato. Segundo estudos da criosfera, metade desse aumento se dá por derretimento de gelo. **Qual deve ser a variação média aproximada de temperatura para que o nível médio do mar aumente de 2 metros?** $\boxed{10}$
Explique resumidamente as suas contas. Considere que o coeficiente de expansão térmica é 1.3×10^{-4} K^{-1}. Despreze a variação de salinidade. O oceano tem profundidade média de 5000m. Dica: Pense primeiro em termos de conservação de massa e depois em expansão térmica.

Resposta:

Descontando a variação de massa por derretimento de gelo, apenas metade do efeito é por expansão térmica, procuramos pela variação de temperatura que causa 1m de elevação do nível do mar.

Considere uma coluna d'água de área A e altura h que se expande até $h + \eta$ pois a densidade mudou de ρ_1 para $\rho_2 < \rho_1$ Por conservação de massa:

$$Ah\rho_1 = A(h + \eta)\rho_2 \qquad \rho_1 h = \rho_2 h + \rho_2 \eta \qquad \eta = \frac{h(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2} \simeq -h\frac{\Delta\rho}{\rho}$$

Pois a densidade não vai mudar muito, portanto $\rho_2 \simeq \rho$. Defini $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ e $\rho = (\rho_2 + \rho_1)/2$.

Aproximando $\alpha = -\frac{1}{\rho}(\frac{\partial\rho}{\partial T})_{pS}$ para diferenças finitas pois queremos valores médios,

$\alpha = -\frac{1}{\rho}(\frac{\Delta\rho}{\Delta T})$. Isolando $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ e substituindo na expressão de η , temos $\Delta T = \frac{\eta}{h\alpha}$

Substituindo os valores numéricos, $\Delta T = \frac{1}{5 \times 10^3 \; 1.3 \times 10^{-4}} = 1.5$K.

4. Suponha que um cruzeiro oceanográfico descreveu um retângulo no mapa, cujos vértices SW e NE são, respectivamente, 45°W,35°S e 35°W,15°S. $\boxed{10}$

- A aresta zonal ao norte tem 1072 km, nela a velocidade superficial é 0.1 m/s para oeste.
- A aresta ao sul tem 909 km, nela a velocidade superficial é 0.3 m/s para leste.
- A aresta meridional ao oeste tem 2220 km, nela a velocidade superficial é 0.7 m/s para sul.
- A aresta ao leste tem 2220 km, nela a velocidade superficial é 0.2 m/s para norte.

Qual é a vorticidade média dentro do retângulo?
Quantas vezes esse valor é maior ou menor que a vorticidade planetária local $f = 2\Omega\sin(25°)$?
(Dica:$\Omega = 7.27 \times 10^{-5}$ s^{-1}).

Resposta:

Do Teorema de Stokes:

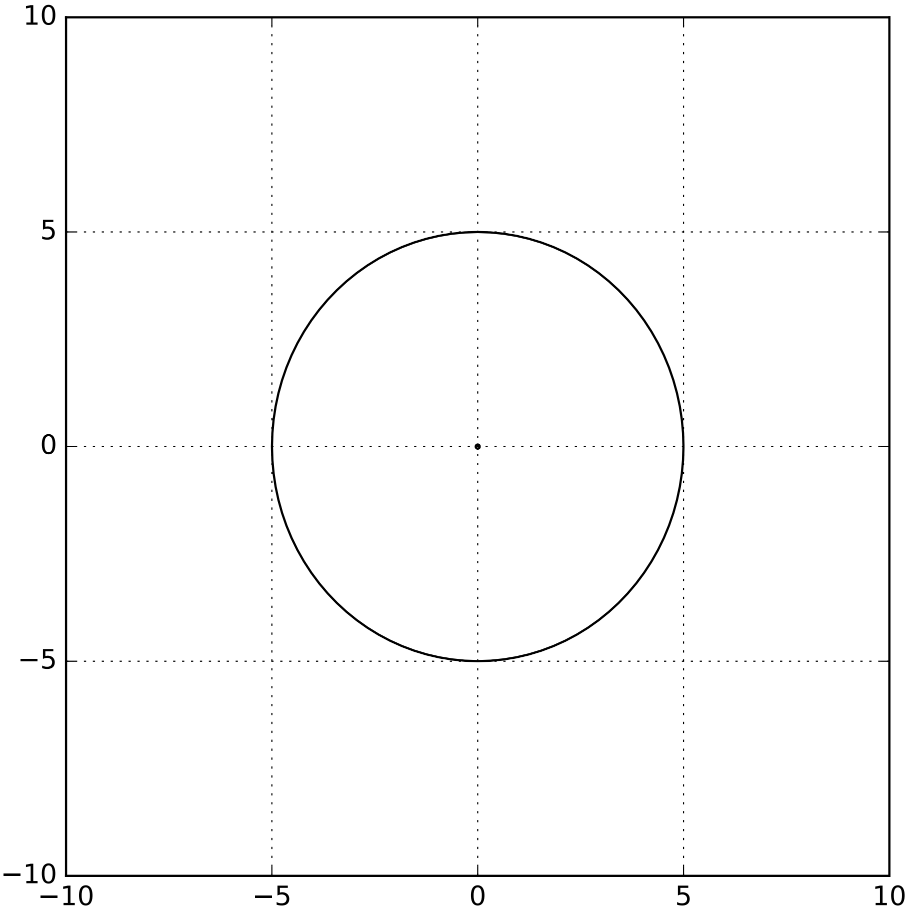
$$\oint_C \vec{u} \cdot \vec{dl} = \int_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right) \cdot \vec{dA} = \int_A \vec{\omega} \cdot \vec{dA},$$

Considerando-se a área plana, a vorticidade reduz-se à sua componente vertical, portanto pode ser tratada como escalar. O último termo é o produto entre a área total e a vorticidade média, $\int_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = \overline{\omega_k} \int_A d\vec{A} = \overline{\omega_k}.A$. Para calcularmos a vorticidade média dentro do retângulo basta fazermos $\overline{\omega_k} = \frac{1}{A} \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}$. A integral de linha é, somando os 4 lados:

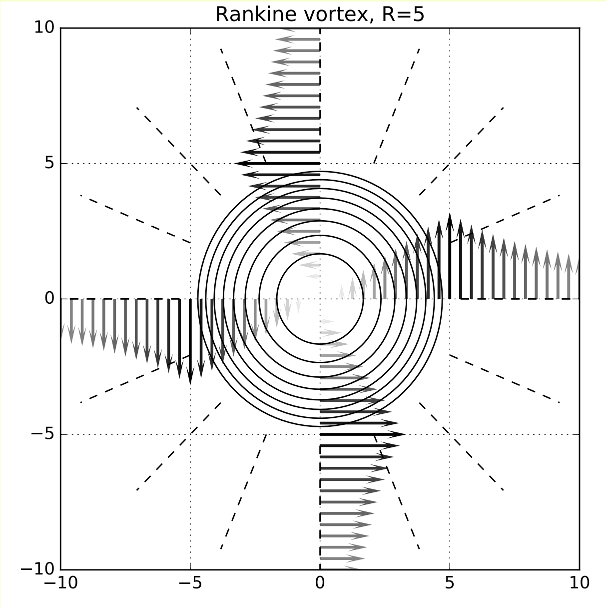
$$\oint_{abcd} \vec{u} \cdot d\vec{l} = 111195(10 \times 0.1 \times \cos(15) + 10 \times 0.3 \times \cos(35) + 20 \times 0.7 + 20 \times 0.2) = 2.38 \times 10^6 \, m^2 s^{-1}.$$

A área é aproximadamente $2220000 \frac{(909000+1072000)}{2} = 2.20 \times 10^{12}$ m^2. Portanto a vorticidade média é $\overline{w_k} = \frac{1}{A} \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} = 1.1 \times 10^{-6}$ s^{-1}. Comparando com $f = 6.6 \times 10^{-5}$, vemos que f é 61 vezes maior.

5. Na figura a seguir representamos um vórtice bidimensional por um círculo de raio R=5. Na parte interna do círculo a vorticidade ζ é constante, $\zeta = 2A$. Na parte externa ao círculo a vorticidade é nula, $\zeta = 0$.



Resposta:



(a) Obtenha a fórmula da velocidade $\vec{U}(r,\theta) = (u_r, u_\theta)$, sabendo que u_r é constante, $u_r = B$. $\boxed{5}$

Resposta:

$$\zeta = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 2A \qquad \text{Como } u_r \text{ é constante,} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} = 2A$$

Integrando em r dos dois lados, $ru_\theta = \frac{2Ar^2}{2}$ portanto $u_\theta = Ar, \quad u_r = B.$

(b) Sabendo que a função de corrente $\psi(r,\theta)$ é uma função escalar, real e definida na parte interna do círculo, determine o valor de B. Desenhe os vetores ao longo de duas seções radiais entre $r = 0$ e $r = R$ e esboce pelo menos 4 linhas de corrente com valores de ψ igualmente espaçados (por exemplo, $\psi = [0.3, 0.6, 0.9, 1.2]$). Não precisa obter o valor de ψ, é só um exemplo. $\boxed{5}$

Resposta:
As isolinhas de ψ existem portanto o fluxo é não-divergente. Para que o primeiro termo do divergente se anule sempre, ou seja $\frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r} = 0$, é necessário que $B = 0$. Note que o segundo termo do divergente se anula trivialmente. Portanto a velocidade é sempre tangencial e aumenta linearmente para fora até $r = R$. As linhas de corrente são tangentes à velocidade, formam círculos e **devem ser mais juntas onde o fluxo é maior**.

(c) Obtenha a fórmula da velocidade tangencial, sabendo que o perfil de velocidades é contínuo inclusive em $r = R$. A componente radial é a mesma que no caso anterior. $\boxed{5}$

Resposta:

$$\zeta = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{Como } u_r \text{ é zero,} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} = 0$$

Integrando em r dos dois lados,$ru_\theta = C$ constante $u_\theta = \frac{C}{r}$, mas temos o mesmo valor de u_θ quando r=R, portanto $\frac{C}{R} = AR, \quad C = AR^2$ assim sendo, em $r > R \quad u_\theta = \frac{AR^2}{r}$.

(d) Sabendo que o potencial de velocidade $\phi(r,\theta)$ é uma função escalar, real e definida na parte externa do círculo, desenhe os vetores complementando as suas seções radiais entre $\boxed{5}$

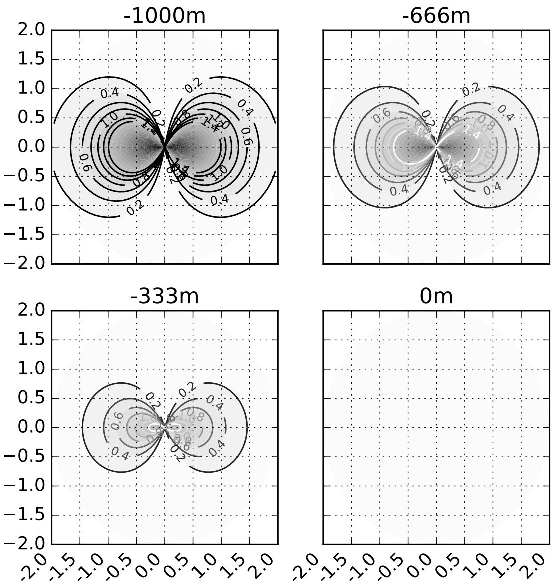
R e $|x|, |y| = 10$. Esboce pelo menos 4 isolinhas de potencial de velocidade com valores de ϕ igualmente espaçados. Não precisa obter o valor de ϕ.

Resposta:

$$u_r = 0 = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \text{ portanto } \phi \text{ não varia com } r, \quad u_\theta = \frac{C}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta},$$

portanto $\phi = C\theta$, as isolinhas de ψ são radiais igualmente espaçadas em θ.

6. Dr. Moriarty jogou um recipiente quebrado com 200kg de Polônio 210 no mar onde a profundidade é de 1km. Considere que a fratura no recipiente é tal que a concentração a 2km ao redor latão é dada pela figura abaixo para 4 profundidades. A melhor função ajustada às concentrações medidas hoje, às 4:30 hora local é: 20



$$C_{Po} = A\,(1 - \tanh(r))\,\cos^2(\theta)\,\frac{z}{-1000}$$

com $A = 6$. Dê a fórmula do vetor fluxo de massa de Polônio em coordenadas cilíndricas, $\vec{q}(r, \theta, z)$, sabendo que o coeficiente de difusão k_{Po} é constante. Descreva em palavras a direção do fluxo, separando em parte horizontal e parte vertical.

Resposta:

Fick nos diz que $\vec{q} = -k\vec{\nabla}C$. Olhe a definição de gradiente em coordenadas cilíndricas. Note que $C_{Po} = C(r, \theta, z)$ é um produto do tipo $F(r).G(\theta).H(z)$ portanto as derivadas podem ser feitas de forma bem simples: As componentes do gradiente são:

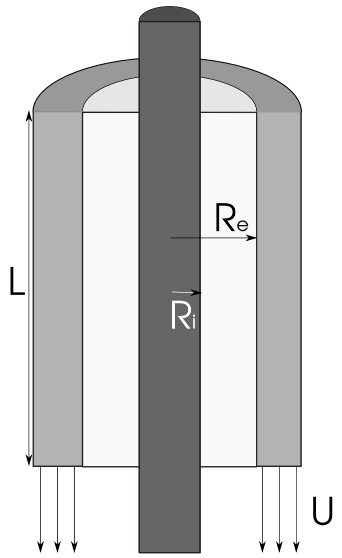
$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{Po}}{\partial r}\hat{r} &= \operatorname{sech}^2(r)\,.\,A\cos^2(\theta)\,.\,\frac{z}{-1000} \\
\frac{1}{r}\frac{\partial C_{Po}}{\partial \theta}\hat{\theta} &= \frac{A}{r}(1 - \tanh(r))\,.\,(-2\cos(\theta)\sin(\theta))\,.\,\frac{z}{-1000} \\
\frac{\partial C_{Po}}{\partial z}\hat{z} &= A(1 - \tanh(r))\,.\,\cos^2(\theta)\,.\,\frac{1}{-1000}
\end{aligned}$$

Portanto aplicando Fick obterás:

$$\begin{aligned}
\vec{q} = \frac{A.k_{Po}}{1000} \quad . \quad & \left[\left(\cos^2(\theta).z.sech^2(r)\right)_{\hat{r}}\right. \\
+ \; & \frac{1}{r}\left((1 - \tanh(r)).z.(-2\cos(\theta)\sin(\theta))\right)_{\hat{\theta}} \\
+ \; & \left.\left((1 - \tanh(r)).\cos^2(\theta)\right)_{\hat{z}}\right].
\end{aligned}$$

A componente vertical do fluxo é para cima em todo o espaço. Na horizontal o fluxo é perpendicular às isolinhas da figura, maior onde há mais linhas por cm^2.

7. Considere o aparato visto em corte na figura a seguir. O cilindro longo de raio R_i está parado. O cano cilíndrico externo, de raio interno R_e está descendo com velocidade constante U pois a região intersticial $(R_e - R_i)$ está lubrificada. $R_e \simeq R_i$, o espaço onde tem lubrificante está obviamente exagerado no desenho. O cilindro externo tem comprimento L e massa m. Considere o fluxo laminar e o que o lubrificante tem coeficiente de viscosidade dinâmica μ constante. Assuma a condição de contorno de não–escorregamento junto às paredes em $r = R_i$ e $r = R_e$. Despreze os efeitos de borda e o atrito com o ar. Obtenha a expressão para a velocidade U usando as variáveis conhecidas. 20



Resposta:

$$\frac{\tau}{\mu} = \frac{du_z}{dr} \quad \text{integrando dos 2 lados}$$

$$\frac{\tau}{\mu} r = u_z + C' \quad \text{ou} \quad u_z = \frac{\tau}{\mu} r + C$$

Resposta:

Usando a condição de contorno interna:

$$u_z = 0 \text{ em } r = R_i \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\tau}{\mu} R_i + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\tau}{\mu} R_i$$

Usando a condição de contorno externa e substituindo C:

$$u_z = U \text{ em } r = R_e \quad \Rightarrow \quad U = \frac{\tau}{\mu}(R_i - R_e) \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{U\mu}{R_i - R_e}.$$

Se o cano não está acelerando, é porque há equilíbrio dinâmico entre a força viscosa e o peso. Para calcular a força viscosa é preciso integrar numa área, a área da casca cilíndrica.

$F = \int_0^{2\pi} \tau L r d\theta$ Não faz muita diferença se você usa R_e, R_i ou $\overline{R} = 0.5(R_e + R_i)$ pois eles são quase iguais. $F = \frac{LU\mu}{R_e - R_i} 2\pi \overline{R}$. e essa força é igual ao peso, ou seja,

$$\frac{LU\mu}{R_e - R_i} 2\pi \overline{R} = mg \qquad U = \frac{mg(R_e - R_i)}{\pi L \mu (R_e + R_i)}$$

Memória não–volátil:

A densidade da água pura é 1000 kg.m^{-3}. A do ar é 1 kg.m^{-3}. O raio da Terra é $\sim$ 6400 km
O calor específico a volume constante da água é 4 J.g^{-1}K^{-1}. O do ar é 1 J.g^{-1}K^{-1}.
A pressão por causa da tensão superficial é $\Delta p = 2\sigma/R$.
$\alpha = -\frac{1}{\rho}(\frac{\partial \rho}{\partial T})_{pS}$.

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar	
Gradiente	$\vec{\nabla} E = \left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\ u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional	$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$

$$\int sech^2(x)dx = 1 - tanh(x) + P$$

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	7	Total
Pontos	10	10	10	10	20	20	20	100
Nota								