IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova I** Nome:______________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A tentativa de violação de qualquer uma das regras abaixo anulará o exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o telefone.

---

1. Considerando a segunda lei da termodinâmica, argumente porque o coeficiente de condutividade térmica é sempre positivo. [5]

Resposta:

Por *reductio ad absurdum* considere um coeficiente negativo na equação de Fourier: $\vec{q} = k\vec{\nabla}T$: o fluxo de calor seria a favor do gradiente. Neste caso o calor seria transferido naturalmente de um corpo para outro a uma temperatura mais alta, o que viola a segunda lei.

2. Considerando o tensor $e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, como são e o que representam fisicamente as componentes diagonais e não–diagonais? [5]

Resposta:

As componentes diagonais são da forma $i = j$ e representam a deformação linear. Somadas resultam no operador divergente. As componentes não–diagonais são da forma $i \neq j$ e representam a deformação por cisalhamento. Elas não estão associadas a nenhum operador vetorial.

3. Baleias nadam grandes distâncias e podem ser usadas como plataforma de coleta de dados, basta prendermos um sensor de temperatura, salinidade e pressão dotado de GPS, transmissor e antena. Com este aparato, enquanto estiver viva e transmitindo dados, a baleia é um instrumento Lagrangeano ou Euleriano? Justifique. [5]

Resposta:

Euleriano, pois não acompanha o fluxo (ela nada).

4. Considere um volume de água que é capturado por um vórtice. Suponha ainda que esse volume é um sistema termodinâmico adiabático e fechado. O vórtice o faz girar e o carrega para oeste, portanto adiciona energia cinética de rotação e de translação ao referido sistema termodinâmico. Considerando a primeira lei da termodinâmica ($Q + W = \Delta e$), o valor de Δe muda? Justifique sua resposta. [5]

Resposta:

Não. Δe não inclui energia cinética de rotação e translação do sistema como um todo.

5. Considere um volume V cuja superfície externa é A. Para que a massa se conserve, a taxa de aumento de massa dentro de V tem de ser igual ao fluxo de massa para dentro da área A, ou seja: [10]

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_A \rho\vec{u} \cdot d\vec{A}.$$

Aplique o Teorema de Gauss ao lado direito da equação acima para obter a equação da continuidade (ao lado) e interprete–a.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho\vec{u} = 0$$

Resposta:

Usando Gauss $\displaystyle\int_A (\rho\vec{u})\cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})dV,$ obtemos $\displaystyle\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV + \int_V \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})d\vec{V} = 0.$

Agrupando, temos $\displaystyle\int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})\right) d\vec{V} = 0$ Para que o integrando da última expressão se anule para qualquer V é necessário que:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{u} = 0\ .$$

Para que a densidade de matéria contida num dado volume mude com o tempo é preciso que haja divergência do fluxo de massa $\rho\vec{u}$.

6. Num tanque é possível fazer boiar uma moeda de alumínio de 1cm de raio (r) e 0.5mm de espessura (h). A água está pura ou contaminada com o poluente abaixo descrito? Justifique quantitativamente a sua resposta, levando em conta que a 25°C a densidade ρ do alumínio é 2.7 gm^{-3}, a tensão superficial σ_a da água pura é de 71×10^{-3}Nm^{-2} e a tensão superficial σ_p do poluente orgânico apolar e menos denso qua a água é 22×10^{-3}Nm^{-2}. A aceleração gravitacional local g é 10 ms^{-2}. $\boxed{10}$

Resposta:

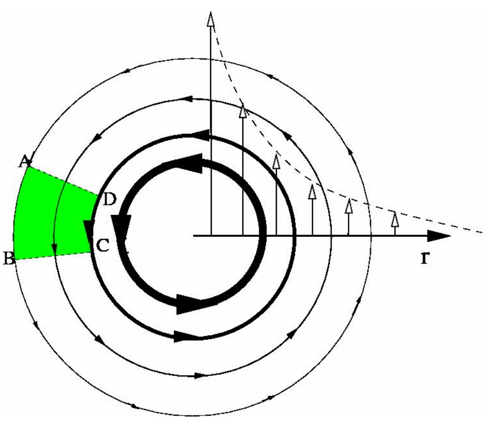
Por hipótese a tensão superficial σ em torno da moeda sustenta o peso da mesma, portanto:

$$\oint \sigma dr = \rho\, 2\pi r^2 h\, g \quad \text{como } \sigma \text{ é constante,} \quad \sigma 2\pi r = \rho 2\pi r^2 hg \quad \text{portanto o raio é} \quad r = \frac{2\sigma}{\rho hg}.$$

Este r é o raio da moeda de que equilibra exatamente tensão superficial e peso. Substituindo o valor de σ_a chegamos a $r = 1.05$cm, portanto a moeda de 1cm é quase o caso limite. Se a tensão diminuisse mais de 5% a moeda de 1cm afundaria. Mas se a água estivesse contaminada por um líquido apolar e pouco denso este boiaria e sua tensão superficial prevaleceria. Note que σ_p é 69% menor que σ_a, portanto se a água estivesse contaminada a moeda afundaria; como ela bóia, a água está pura.

7. Considere o vórtice abaixo cujas velocidades V em coordenadas cilíndricas são da forma: $\boxed{10}$

$$\begin{cases} u_r &= 0 \\ u_\theta &= \frac{C}{r}, \text{ com } C \text{ constante,} \\ u_z &= 0 \end{cases}$$



Calcule a vorticidade $\vec{\omega}$ e a circulação Γ.

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{V} \quad \text{e} \quad \Gamma = \oint_0^{2\pi} \vec{u}d\vec{l}$$

Tendo em mente o teorema de Stokes, como podemos conciliar $\Gamma \neq 0$ com $\omega = 0$? Quero uma resposta com base matemática e não puramente dissertativa.

Lembre–se: $$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\vec{i_r}} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\vec{i_\theta}} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\, u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)_{\vec{i_z}}$$

Resposta:
Temos apenas $\vec{\omega} = \omega_z$. Aplicando–se o rotacional à velocidade angular temos:

$$\omega_z = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\left[r\left(\frac{C}{r}\right)\right]}{\partial r} = 0.$$

Sem surpresas, haja visto o enunciado. Ao calcular a circulação pela integral de linha:

$$\Gamma = \oint \vec{u}\vec{dl} = \int_0^{2\pi} u_\theta r d\theta = \int_0^{2\pi} C d\theta = 2\pi C,$$

vemos o problema de conciliar $\Gamma \neq 0$ com $\omega_z = 0$. Note que $\omega_z = 0$ em todo vórtice menos na origem. Se calcularmos a circulação em um circuito ABCD sem a origem, Γ deve ser zero, resolvendo o paradoxo:

$$\Gamma_{ABCD} = \int_{AB} u_\theta r d\theta + 0 + \int_{CD} u_\theta r d\theta + 0 = -\int C d\theta + \int C d\theta = 0.$$

8. Considere uma seção zonal-vertical de temperatura (i.e. $T(x,z)$) no Atlântico tropical. Nessa região passam vórtices que duram ~25 dias e movem a termoclina para baixo ~50 m, causando um fluxo vertical de calor. A 150 m de profundidade a temperatura varia de 5 $°C$ por causa da passagem dos vórtices.

   (a) Estime, em $W\,m^{-2}$, esse fluxo de calor turbulento (Q_t) multiplicando a velocidade vertical por causa do vórtice (w) pela capacidade térmica específica (ρC_p)* e pela variação de temperatura induzida pela passagem do vórtice (ΔT). $\boxed{10}$

   Resposta:
   $$Q_t = w\rho C_p \Delta T = \frac{50}{25 \times 86400}\left(\frac{m}{s}\right) 1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) 4187 \left(\frac{J}{kg.K}\right) 5(K) = 484.61 (\frac{W}{m^2})$$

   (b) Estime, também em $W\,m^{-2}$, o fluxo difusivo de calor aplicando a lei de Fourier†. Use–a nessa mesma região de 50 m de espessura junto à termoclina, portanto a 150 m de profundidade, onde a temperatura varia de 5 $°C$. Assuma um coeficiente de difusão térmica constante $k_m = 0.58\,W\,m^{-1}K^{-1}$. $\boxed{10}$

   Resposta:
   $$Q_m = -k_m \nabla T = 0.58 \left(\frac{W}{m\,K}\right) \frac{5}{50} \left(\frac{K}{m}\right) = 0.058 (\frac{W}{m^2})$$

   (c) O que você conclui sobre o efeito da difusão molecular em relação ao da difusão turbulenta nesse caso específico? $\boxed{5}$

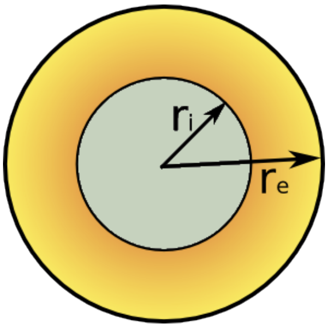
   Resposta:
   O efeito da difusão molecular é desprezível pois $\frac{Q_m}{Q_t} \sim 10^{-4}$.

9. Considere dois cilindros vistos de cima na figura abaixo. O interno, de raio r_i está parado e o

---

* $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$, $C_p = 4187 \frac{J}{kg.K}$

† Dica: Parece com a de Fick.



externo, de raio r_e se move com velocidade angular Ω. Considere o fluxo laminar e o coeficiente de viscosidade dinâmica μ constante. Assuma a condição de contorno de não–escorregamento junto às paredes do cilindro. Esta é a versão mais simples desse problema que já foi tratado por:

- Newton,
- Taylor,
- Stokes,
- Couette,
- Chandrasekar e outros notáveis. Agora é a sua vez.

(a) Obtenha o perfil de velocidades $u_\theta(r)$ em função das variáveis conhecidas. 10

Resposta:

$$\frac{\tau}{\mu} = \frac{du_\theta}{dr} \quad \text{integrando dos 2 lados} \quad \frac{\tau}{\mu} r = u_\theta + C \quad \text{ou} \quad u_\theta = \frac{\tau}{\mu} r + C$$

Usando a condição de contorno interna:

$$u_\theta = 0 \text{ em } r = r_i \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\tau}{\mu} r + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{\tau}{\mu} r_i$$

Usando a condição de contorno externa e substituindo C:

$$u_\theta = \Omega r_e \text{ em } r = r_e \quad \Rightarrow \quad \Omega r_e = \frac{\tau}{\mu}(r_e - r_i) \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau}{\mu} = \frac{\Omega r_e}{r_e - r_i} \quad \Rightarrow \quad u_\theta = \frac{\Omega r_e}{r_e - r_i}(r - r_i).$$

(b) Obtenha a tensão de cisalhamento em qualquer ponto do fluido em função das variáveis conhecidas. 10

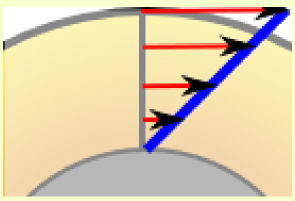
Resposta:

Da condição de contorno externa:

$$\frac{\tau}{\mu} = \frac{\Omega r_e}{r_e - r_i} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\mu \Omega r_e}{r_e - r_i}$$

(c) Esboçe o perfil de velocidades. 5

Resposta:



Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Pontos	5	5	5	5	10	10	10	25	25	100
Nota										