

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A tentativa de violação de qualquer uma das regras abaixo anulará o exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o telefone.

1. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? Justifique as falsas.

- (a) O tensor $\omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ representa a vorticidade e seus termos diagonais representam a deformação por compressão. A. Verdadeiro B. Falso 5

Resposta:

Esse tensor representa a vorticidade, mas ele não inclui o efeito da compressão.

- (b) O termo da forçante do vento na equação da Navier–Stokes depende do coeficiente de viscosidade. A. Falso B. Verdadeiro 5

Resposta:

Verdade, basta perceber que na equação o termo $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ às vezes aparece como $\mu \nabla^2 \vec{u}$.

- (c) A equação da continuidade pode ser simplificada para a forma $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ quando estudamos circulação abissal. A. Verdadeiro B. Falso 5

Resposta:

Ela pode ser simplificada pois o **gradiente** de densidade é pequeno apesar da enorme pressão.

- (d) O potencial de velocidade é definido para fluxos bidimensionais não–divergentes. A. Falso B. Verdadeiro 5

Resposta:

É definido para fluxos **irrotacionais** 2D.

- (e) As forças de Coriolis e centrífuga são fundamentalmente diferentes da força do gradiente de pressão pois dependem da aceleração da gravidade e não do sistema de referência ser inercial ou não. A. Verdadeiro B. Falso 5

Resposta:

Errado, não faz o menor sentido: Coriolis e centrífuga não dependem da aceleração da gravidade, depende do sistema de referência e gradiente de pressão não depende da aceleração da gravidade.

- (f) O teorema de Gauss relaciona o fluxo total de uma propriedade através de uma área fechada com a divergência desse fluxo no volume total encerrado por esta superfície. A. Falso B. Verdadeiro 5

Resposta:

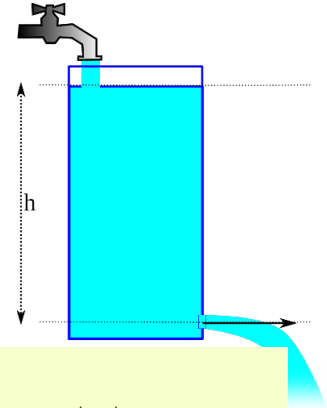
Nesse caso entenda-se “total” como integral.

2. Marque uma alternativa correta (f =campo escalar, \vec{u} =campo vetorial): 10

$\nabla(\nabla \cdot \vec{u})$	<input checked="" type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input type="checkbox"/> NDA	$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u})$	<input type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input checked="" type="checkbox"/> NDA
$\nabla \cdot (\nabla \vec{u})$	<input checked="" type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input type="checkbox"/> NDA	$\nabla \cdot (\nabla \times f)$	<input type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input checked="" type="checkbox"/> NDA
$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u})$	<input type="checkbox"/> Vetor	<input checked="" type="checkbox"/> Escalar	<input type="checkbox"/> NDA	$\nabla \cdot (\nabla f)$	<input type="checkbox"/> Vetor	<input checked="" type="checkbox"/> Escalar	<input type="checkbox"/> NDA
$\nabla \times (\nabla f)$	<input checked="" type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input type="checkbox"/> NDA	$\nabla(\nabla \cdot f)$	<input type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input checked="" type="checkbox"/> NDA
$\nabla \times (\nabla \times \vec{u})$	<input checked="" type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input type="checkbox"/> NDA	$\nabla \times (\nabla \times f)$	<input type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input checked="" type="checkbox"/> NDA

3. Uma caixa d'água possui um orifício em sua parte inferior como mostra a figura ao lado. 10

Uma torneira na parte superior lança água nesta caixa com o mesmo fluxo que a água sai pelo orifício de raio r , mantendo o nível h da caixa constante. Se eu escarear o furo até dobrar o valor do raio e trocar a água desse sistema pelo mesmo volume de mercúrio, cuja densidade é $13000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, de quanto aumenta a velocidade com que o líquido sai pelo furo?



Resposta:

A pressão é a mesma (atmosférica) no topo e no furo e a velocidade é zero no topo, portanto

$$\frac{\rho u^2}{2} = \rho g h \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{2gh}$$

, portanto a velocidade não mudaria pois não depende de ρ e nem de r .

4. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} + \vec{g}_a - 2\vec{\Omega} \times \vec{u}.$$

- (a) Obtenha a equação hidrostática na forma escalar e justifique suas aproximações. 5

Resposta:

Se a velocidade é nula, sobra apenas $0 = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}_a$ onde a componente vertical é a única não-nula, portanto $\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_a$.

- (b) Considere o fluxo invíscido e as acelerações desprezíveis quando comparadas aos termos do gradiente horizontal de pressão e da força de Coriolis. Complete as equações do movimento:

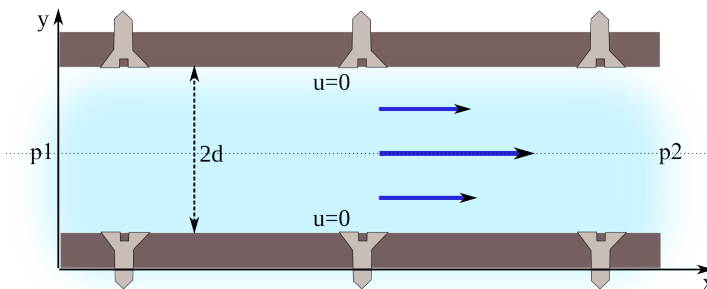
10

Continuidade	_____	=	= $-\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$
Hidrostática	_____	=	_____ copie do item a ☺
Momentum Zonal	$\frac{\partial}{\partial}$ _____	=	2Ω _____ θ $\frac{\partial}{\partial}$ _____
Mom. Meridional	$\frac{\partial}{\partial}$ _____	=	2Ω _____ θ $\frac{\partial}{\partial}$ _____

Resposta:

Continuidade	0	=	= $-\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$
Hidrostática	$\frac{\partial p}{\partial z}$	=	ρg_a
Momentum Zonal	$\frac{\partial p}{\partial x}$	=	$2\rho\Omega \sin \theta v$
Mom. Meridional	$\frac{\partial p}{\partial y}$	=	$-2\rho\Omega \sin \theta u$

5. Duas placas são vistas de lado na figura abaixo. As duas são fixas e um fluido passa entre elas.



O fluxo é estacionário e laminar. O fluido é Newtoniano, com densidade ρ e viscosidade μ constantes. As componentes da velocidade nas direções y e z são zero. Como as placas são longas, assuma que $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. A gravidade é $g_y = -g$, constante e vertical. A velocidade é zero em $y = \pm d$, i.e. condição de contorno de não escorregamento. O fluxo é forçado pela diferença de pressão ($p_2 - p_1$) aplicada nas bordas distantes como indicado. Esse é o famoso fluxo de Poiseuille (com biquinho).

- (a) Simplifique a equação da continuidade.

5

Resposta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \rho \text{ é constante, o fluxo é estacionário e 1D, só sobra } \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

- (b) Escreva as 3 componentes da equação de Navier-Stokes. É a do problema 4 sem os dois últimos termos pois estamos num referencial inercial. O balanço numa direção é entre viscosidade e gradiente de pressão, noutra é entre gravidade e pressão hidrostática e na terceira... é bem sem graça.

10

Resposta:

Bem, dadas simplificações propostas no enunciado, sobra só isso:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

- (c) Neste item obtenha a equação da pressão. Vamos com calma. Integre a equação da variação da pressão em y chamando a constante de integração de $f(x)$ (pois ela só é constante em y). Para determinar a pressão $p(x)$, assumamos que a pressão $p(x)$ decai linearmente entre $p(0) = p_1$ e $p(L) = p_2$ sobre a linha pontilhada $y = 0$ usando as condições de contorno em 0 e L . Para completar $p(x, y)$, a parte em y é a boa e velha hidrostática. A resposta deste item é uma expressão para $p(x, y)$ em função de p_1, p_2, L, ρ e g .

10

Resposta:

Integrando a equação em y temos $p = -\rho g \int dy + f(x) = -\rho g y + f(x)$.

Se $p = a + bx$ nos resta determinar a e b . Em $x = 0, p = p_1$, portanto $a = p_1$ em $x = L, p = p_2$, portanto $a + bL = p_2$ $p_1 + bL = p_2$ $b = \frac{p_1 - p_2}{L}$.

$$p(x, y) = p_1 - \left(\frac{p_1 - p_2}{L} \right) x - (\rho g) y$$

- (d) Para terminar com chave de ouro, vamos obter o perfil de velocidades. Comece com a tua componente x da equação de Navier-Stokes. É uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem. Pegue a tua fórmula da pressão e obtenha o gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial x}$. Depois integre duas vezes em y , o que gerará duas constantes de integração, c_1 e c_2 . Use as condições de contorno $u = 0$ em $y = \pm d$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ em $y = 0$ para obter c_1 e c_2 . A tua resposta deve ser uma expressão para $u(y)$ em função de μ, d, L, p_1 e p_2 .

10

Resposta:

Partindo daqui, $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$ podemos substituir o gradiente de pressão obtido ali

em cima: $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \left(\frac{p_1 - p_2}{L} \right)$. Devemos integrar esta expressão 2 vezes em y :

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{p_1 - p_2}{L} \right) y^2 + c_1 y + c_2. \quad \text{Usando as condições de contorno,}$$

$$\frac{du(0)}{dy} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \text{ e } u(d) = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{d^2}{2\mu} \left(\frac{p_1 - p_2}{L} \right)$$

$$\dots \text{voilà: } u(y) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{p_1 - p_2}{L} \right) y^2 + \frac{d^2}{2\mu} \left(\frac{p_1 - p_2}{L} \right) = \left(\frac{p_1 - p_2}{2\mu L} \right) (d^2 - y^2).$$



Questão	1	2	3	4	5	Total
Pontos	30	10	10	15	35	100
Nota						

Memória não-volátil:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

Continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0$$

Conversão do sistema retangular (x, y, z) para o cilíndrico (r, θ, z) e vice-versa:

$$y = r \cos \theta, x = r \sin \theta, z = z \text{ e}$$

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}, \theta = \arctan \frac{y}{x}, z = z.$$

Quanto aos versores,

$$i_x = (i_r \cos \theta - i_\theta \sin \theta), i_y = (i_r \sin \theta + i_\theta \cos \theta), i_z = i_z$$

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} & u_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} & v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\vec{H} = \int_V (\rho \vec{u} dV) \times \vec{r}$$

$$\frac{\rho u^2}{2} + \rho g z + p = B.$$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar	
Divergente	$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
Gradiente	$\vec{\nabla} V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{i_r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{i_\theta} + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{i_z}$
Rotacional	$\vec{\nabla} \times \vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{i_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{i_\theta} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{i_z}$