

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A tentativa de violação de qualquer uma das regras abaixo anulará o exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o telefone.

1. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? Justifique as falsas.

- (a) O tensor $\omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ representa a vorticidade e seus termos diagonais representam a deformação por compressão. A. Verdadeiro B. Falso 5

Resposta:

Esse tensor representa a vorticidade, mas ele não inclui o efeito da compressão.

- (b) O termo da forçante do vento na equação da Navier–Stokes depende do coeficiente de viscosidade. A. Falso B. Verdadeiro 5

Resposta:

Verdade, basta perceber que na equação o termo $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ às vezes aparece como $\mu \nabla^2 \vec{u}$.

- (c) A equação da continuidade pode ser simplificada para a forma $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ quando estudamos circulação abissal. A. Verdadeiro B. Falso 5

Resposta:

Ela pode ser simplificada pois o **gradiente** de densidade é pequeno apesar da enorme pressão.

- (d) O potencial de velocidade é definido para fluxos bidimensionais não–divergentes. A. Falso B. Verdadeiro 5

Resposta:

É definido para fluxos **irrotacionais** 2D.

- (e) As forças de Coriolis e centrífuga são fundamentalmente diferentes da força do gradiente de pressão pois dependem da aceleração da gravidade e não do sistema de referência ser inercial ou não. A. Verdadeiro B. Falso 5

Resposta:

Errado, não faz o menor sentido: Coriolis e centrífuga não dependem da aceleração da gravidade, depende do sistema de referência e gradiente de pressão não depende da aceleração da gravidade.

- (f) O teorema de Gauss relaciona o fluxo total de uma propriedade através de uma área fechada com a divergência desse fluxo no volume total encerrado por esta superfície. A. Falso B. Verdadeiro 5

Resposta:

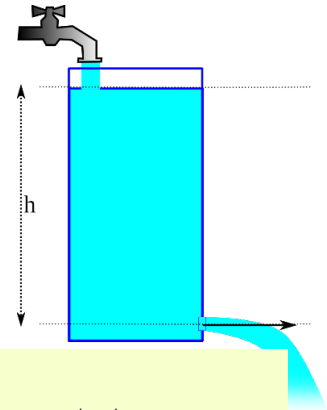
Nesse caso entenda-se “total” como integral.

2. Marque uma alternativa correta (f =campo escalar, \vec{u} =campo vetorial): 10

$\nabla(\nabla \cdot \vec{u})$	<input checked="" type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input type="checkbox"/> NDA	$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u})$	<input type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input checked="" type="checkbox"/> NDA
$\nabla \cdot (\nabla \vec{u})$	<input checked="" type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input type="checkbox"/> NDA	$\nabla \cdot (\nabla \times f)$	<input type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input checked="" type="checkbox"/> NDA
$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u})$	<input type="checkbox"/> Vetor	<input checked="" type="checkbox"/> Escalar	<input type="checkbox"/> NDA	$\nabla \cdot (\nabla f)$	<input type="checkbox"/> Vetor	<input checked="" type="checkbox"/> Escalar	<input type="checkbox"/> NDA
$\nabla \times (\nabla f)$	<input checked="" type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input type="checkbox"/> NDA	$\nabla(\nabla \cdot f)$	<input type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input checked="" type="checkbox"/> NDA
$\nabla \times (\nabla \times \vec{u})$	<input checked="" type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input type="checkbox"/> NDA	$\nabla \times (\nabla \times f)$	<input type="checkbox"/> Vetor	<input type="checkbox"/> Escalar	<input checked="" type="checkbox"/> NDA

3. Uma caixa d'água possui um orifício em sua parte inferior como mostra a figura ao lado. 10

Uma torneira na parte superior lança água nesta caixa com o mesmo fluxo que a água sai pelo orifício de raio r , mantendo o nível h da caixa constante. Se eu escarear o furo até dobrar o valor do raio e trocar a água desse sistema pelo mesmo volume de mercúrio, cuja densidade é 13000 kg.m^{-3} , de quanto aumenta a velocidade com que o líquido sai pelo furo?



Resposta:

A pressão é a mesma (atmosférica) no topo e no furo e a velocidade é zero no topo, portanto

$$\frac{\rho u^2}{2} = \rho g h \Rightarrow u = \sqrt{2gh}$$

, portanto a velocidade não mudaria pois não depende de ρ e nem de r .

4. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} + \vec{g}_a - 2\vec{\Omega} \times \vec{u}.$$

- (a) Obtenha a equação hidrostática na forma escalar e justifique suas aproximações. 5

Resposta:

Se a velocidade é nula, sobra apenas $0 = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}_a$ onde a componente vertical é a única não-nula, portanto $\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_a$.

- (b) Considere o fluxo invíscido e as acelerações desprezíveis quando comparadas aos termos do gradiente horizontal de pressão e da força de Coriolis. Complete as equações do movimento:

10

$$\begin{array}{ll}
 \text{Continuidade} & \underline{\hspace{2cm}} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \\
 \text{Hidrostática} & \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ copie do item a } \odot \\
 \text{Momentum Zonal} & \frac{\partial}{\partial} \underline{\hspace{1cm}} = 2\Omega \underline{\hspace{1cm}} \theta \frac{\partial}{\partial} \\
 \text{Mom. Meridional} & \frac{\partial}{\partial} \underline{\hspace{1cm}} = 2\Omega \underline{\hspace{1cm}} \theta \frac{\partial}{\partial}
 \end{array}$$

Resposta:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Continuidade} & 0 = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \\
 \text{Hidrostática} & \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_a \\
 \text{Momentum Zonal} & \frac{\partial p}{\partial x} = 2\rho\Omega \sin \theta v \\
 \text{Mom. Meridional} & \frac{\partial p}{\partial y} = -2\rho\Omega \sin \theta u
 \end{array}$$

5. Considere um vórtice cuja velocidade tangencial u_θ é como a de um vórtice de Rankine de raio R . Entretanto, a velocidade radial u_r não é nula e assume um perfil Gaussiano na dimensão r . Considere a água do mar incompressível e o fundo do mar não-poroso. Obtenha a fórmula da velocidade vertical u_z em termos de R e da altura h da coluna d'água.

15

Para ajudar:

$$\begin{array}{ll}
 u_r & \text{perfil Gaussiano} \Rightarrow u_r = e^{-(r-R)^2} \\
 u_\theta & \text{vórtice de Rankine} \Rightarrow \begin{cases} u_\theta = \Omega r & \text{se } r \leq R \\ u_\theta = \frac{\Omega^2 R}{r} & \text{se } r \geq R \end{cases} \\
 u_z & \text{fundo não-poroso} \Rightarrow u_z(z = h, h < 0) = 0
 \end{array}$$

Resposta:

Se é incompressível, o divergente se anula, portanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Note que u_θ não é função de θ , portanto a sua derivada se anula.

A derivada em r é:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r e^{-(r-R)^2})}{\partial r}.$$

Usando a memória não volátil,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} = \frac{1}{r} (2Rr - 2r^2 + 1) e^{-(r-R)^2}.$$

Voltando ao divergente - que era zero,

$$\frac{\partial(u_z)}{\partial z} = (2R - 2r + \frac{1}{r})e^{-(r-R)^2}.$$

Integrando em z :

$$u_z = C + z(2R - 2r + \frac{1}{r})e^{-(r-R)^2}.$$

Usando a condição de $u_z = 0$ no fundo ,

$$u_z = (z - h)(2R - 2r + \frac{1}{r})e^{-(r-R)^2}.$$

6. Uma coluna d'água cilíndrica tem, no tempo t_1 raio r_1 e altura h_1 , girando com velocidade angular $\vec{\Omega}_1$ em torno de seu eixo vertical. Ela é advectada pelas correntes e sobe a plataforma continental, reduzindo sua altura para $h_2 = \frac{3}{4}h_1$ no tempo t_2 , sem perder ou ganhar massa. Considere o fluxo invíscido e a coluna em rotação de corpo sólido.

20

Qual a velocidade angular $\vec{\Omega}_2$ no tempo t_2 ?

Resposta:

Por conservação de massa, $\rho V_1 = \rho V_2$, portanto $\rho\pi r_1^2 h_1 = \rho\pi r_2^2 h_2$, $r_1^2 h_1 = r_2^2 h_2$. Mas do enunciado, $h_2 = \frac{3}{4}h_1$, então $r_2 = \sqrt{\frac{4}{3}}r_1$.

O momento angular da coluna é dado por:

$$\vec{H} = \int_V (\rho \vec{u} dV) \times \vec{r} = \int_V \rho u_\theta r dV = \int_V \rho \Omega r^2 dv = \rho \Omega \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^r r^2 dr d\theta dz = \rho \Omega 2\pi h \frac{r^3}{3}.$$

Considerando os dois tempos, por conservação de momento angular temos:

$$\rho \Omega_1 2\pi h_1 \frac{r_1^3}{3} = \rho \Omega_2 2\pi h_2 \frac{r_2^3}{3} \Rightarrow \Omega_1 h_1 r_1^3 = \Omega_2 h_2 r_2^3.$$

Substituindo r_2 da primeira parte e h_2 do enunciado,

$$\Omega_1 h_1 r_1^3 = \Omega_2 \frac{3}{4} h_1 (\sqrt{\frac{4}{3}} r_1)^3 \Rightarrow \Omega_2 = \sqrt{\frac{3}{4}} \Omega_1.$$



Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	30	10	10	15	15	20	100
Nota							

Memória não-volátil:

$$\vec{H} = \int_V (\rho \vec{u} dV) \times \vec{r}$$

$$\frac{\rho u^2}{2} + \rho g z + p = B.$$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar	
Divergente	$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
Gradiente	$\vec{\nabla} V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Rotacional	$\vec{\nabla} \times \vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$