IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova II** Nome:________________________

Informações:

- Duração de 2:30 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra anulará teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

♠

1. Assinale as afirmações erradas e mostre porque estão erradas.

(a) Considere uma gota de óleo esférica submersa e em repouso, com raio $r = 1 \times 10^{-6}$ m e centro à profundidade h num tanque com um líquido polar de densidade ρ igual à do óleo. Na notação usual, a pressão no centro da gota é $p = p_a + \rho g h + \frac{2\rho}{r}$. $\boxed{4}$

A. Errado B. Certo

(b) Num vórtice de raio R em rotação de corpo sólido a circulação para qualquer $r \leq R$ é zero. $\boxed{4}$

A. Certo B. Errado

(c) A taxa de deformação dada por: $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ exclui o termo $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$. $\boxed{4}$

A. Errado B. Certo

(d) A força centrífuga tem a mesma magnitude e direção da força centrípeta, mas sentido oposto, portanto num sistema não acelerado elas se anulam. $\boxed{4}$

A. Certo B. Errado

(e) As linhas de corrente de um fluxo bidimensional incompressível são definidas como: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$, ou seja, $v\,dx = u\,dy$ $\boxed{4}$

A. Certo B. Errado

2. Demonstre que $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ e $\epsilon_{ijk}(\frac{\partial u_k}{\partial x_j})_{\hat{x_i}}$ são iguais. 10

Dica: Abra o rotacional e passe para notação indicial, incluindo os versores.

3. O fluxo dado por $\psi = -2Axy(x^2 + y^2)^{-2}$ é incompressível? Justifique matematicamente. 15

Dica: A equação acima tem partes que parecem com o raio do círculo, com o seno e/ou cosseno. Evidentemente é mais fácil trabalhar num sistema de coordenadas cilíndrico.

4. Esta é a **eq. de Navier–Stokes**: $$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} + \rho(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})) - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}. \quad (1)$$ 10

   Um rio flui para leste sobre 30°N a 3 m/s e tem 1 km de largura. Considere o fluxo estacionário, linear, invíscido, homogêneo e hidrostático. Calcule o desnível meridional entre as margens a partir da equação 1.

   Dica: Na horizontal o balanço é geostrófico e na vertical é hidrostático. Use a gravidade aparente.

5. Esta também é a **eq. de Navier–Stokes**: $$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}. \quad (2)$$

   (a) Dado um fluxo oceânico estacionário, linear e forçado pelo vento, suponha também que a interface oceano-atmosfera é perfeitamente horizontal e que o fluxo é homogêneo e hidrostático. Dois termos formam o **balanço horizontal** e outros dois formam o **balanço vertical de momentum**. Escreva essas duas equações. 10

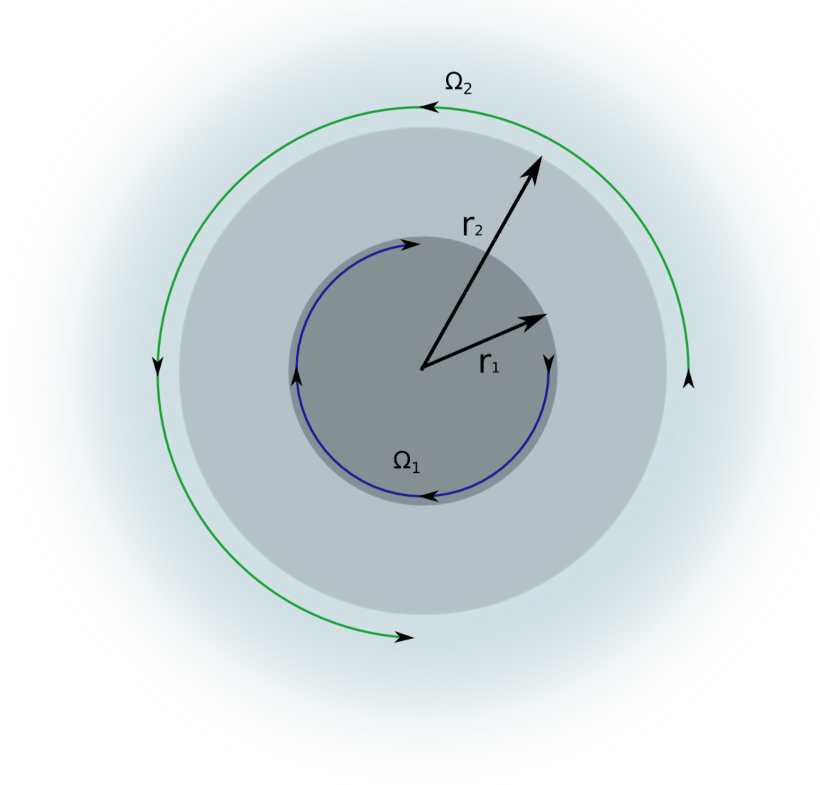
   Dica: Note que as 3 últimas simplificações fazem que só haja variação da pressão por causa do peso da coluna d'água.

(b) Abra a equação do **balanço horizontal** obtida no item (a) em duas componentes horizontais $\hat{i_x}$ e $\hat{i_y}$. 10

> **Dicas:** Vamos simplificar o termo com o Laplaciano, pois $\nabla^2\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})$, abrindo seriam 12 termos! Relaxe. Considere apenas os 2 maiores termos: as derivadas segundas das velocidades horizontais na direção vertical. No balanço horizontal, coloque só esses termos nas equações para cada direção, o termo em u vai na direção $\hat{i_x}$ e o termo em v na direção $\hat{i_y}$, um em cada uma. Não esqueça considerar o seno da latitude ao abrir o outro termo do balanço.

(c) Substitua as tensões horizontais de cisalhamento (τ_x, τ_y) nos termos que vieram do Laplaciano. Bem vindo à dinâmica de Ekman. 5

---

6. 

Considere o fluxo laminar bidimensional entre dois círculos concêntricos, como indicado na figura ao lado. Seja r_1 o raio do círculo interno que gira com velocidade angular Ω_1 e r_2 o raio do externo que gira com velocidade angular Ω_2. Há um fluido newtoniano ocupando todo o espaço. Vamos precisar da equação de Navier–Stokes em coordenadas cilíndricas para tratar este problema:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{u_\theta^2}{r} \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) - \frac{u_r u_\theta}{r} \tag{4}$$

$$\text{onde} \quad \nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{5}$$

(a) Estas equações são simplificadas e ficam na forma: $\boxed{5}$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\theta^2}{r} \tag{6}$$

$$0 = \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r}\right) \tag{7}$$

Associe **ordenadamente** os termos (ou grupos de termos) que foram eliminados da Equação 3 com a justificativa física para eliminá–lo(s) da equação 6.

(b) Para obter uma solução geral para u_θ integre a Equação 7 duas vezes em r. Ao fazer isso ficam 2 constantes de integração a determinar. $\boxed{10}$

(c) Obtenha u_θ para $0 \leq r \leq r_1$ usando a solução geral obtida no item (b) e as condições de não–escorregamento e fluxo zero na origem para determinar as constantes. Como costumamos chamar esse tipo de fluxo? $\boxed{5}$

(d) Obtenha u_θ para $r > r_2$ usando a solução geral obtida no item (b), as condições de não–escorregamento e de energia finita para determinar as constantes. Como costumamos chamar esse tipo de fluxo? $\boxed{5}$

(e) Obtenha u_θ para $r_1 \leq r \leq r_2$ usando a solução geral obtida no item (b) e as condições de não–escorregamento. Deixe A e em termos das constantes conhecidas e B em termos de A e das constantes. $\boxed{5}$

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	20	10	15	10	25	30	110
Nota							

♠

Memória não–volátil:

$\Gamma = \oint_C \vec{u}.\vec{dl}$

O tensor alternante ϵ_{ijk} é definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk = 123,\ 231,\ 312,\ \text{(cíclico)} \\ 0 & \text{se quaisquer dois índices forem iguais,} \\ -1 & \text{se } ijk = 321,\ 213,\ 132 \text{ anticíclico).} \end{cases}$$

Conversão do sistema retangular (x, y, z) para o cilíndrico (r, θ, z) e vice-versa:
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ e
$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $z = z$.
Quanto aos versores,
$i_x = (i_r\cos\theta - i_\theta\sin\theta)$, $i_y = (i_r\sin\theta + i_\theta\cos\theta)$, $i_z = i_z$

Potencial de velocidade e função de corrente:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$\Omega = 7.29 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar

$\vec{\nabla}E =$	$\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial\theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_r)}{\partial r}$	$+$	$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}$	$+$	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
$\vec{\nabla}\times\vec{V} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)_{\hat{i}_z}$