IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova II** Nome:________________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

---

1. As afirmações a seguir são certas ou erradas? Justifique sua resposta no caso das erradas.

   (a) Considere um vórtice circular de raio R em rotação de corpo sólido. Nele, a circulação calculada num círculo concêntrico de raio r tem valor máximo $2\pi R\omega$, onde ω é a velocidade angular. A. Certo B. Errado $\boxed{4}$

   (b) A taxa de deformação dada por: $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, inclui o termo $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$. A. Errado B. Certo $\boxed{4}$

   (c) Considere uma bolha esférica, feita de tinta com densidade ρ e raios $r_1 = 0.2$mm e $r_2 = 0.2004$. Ela está flutuando em repouso no meio do caminho entre a latinha de spray e a parede, portanto imersa em ar. A pressão no centro dela é dada exatamente por $p = p_{atm} + 2\frac{\rho}{r}$ onde r é o raio da bolha. A. Errado B. Certo $\boxed{4}$

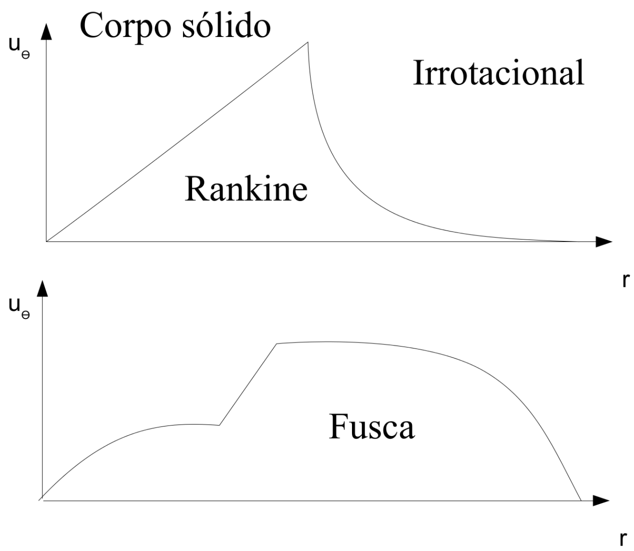
   (d) A força de Coriolis não acrescenta ou retira energia do sistema pois é sempre perpendicular ao deslocamento. A. Certo B. Errado $\boxed{4}$

   (e) Para que a equação de Bernoulli na forma $\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z + p = B$. seja aplicável, basta que o fluxo seja estacionário, irrotacional e incompressível. A. Errado B. Certo $\boxed{4}$

2. Marque uma alternativa correta (f=campo escalar, $\vec{u}$=campo vetorial): $\boxed{10}$

$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u})$	◯ Vetor	◯ Escalar	◯ NDA	$\nabla \times (\nabla \times f)$	◯ Vetor	◯ Escalar	◯ NDA
$\nabla \cdot (\nabla \times f)$	◯ Vetor	◯ Escalar	◯ NDA	$\nabla(\nabla \cdot f)$	◯ Vetor	◯ Escalar	◯ NDA
$\nabla \times (\nabla \times \vec{u})$	◯ Vetor	◯ Escalar	◯ NDA	$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u})$	◯ Vetor	◯ Escalar	◯ NDA
$\nabla \times (\nabla f)$	◯ Vetor	◯ Escalar	◯ NDA	$\nabla \cdot (\nabla f)$	◯ Vetor	◯ Escalar	◯ NDA
$\nabla(\nabla \cdot \vec{u})$	◯ Vetor	◯ Escalar	◯ NDA	$\nabla \cdot (\nabla \vec{u})$	◯ Vetor	◯ Escalar	◯ NDA

3. Considere um vórtice 2D estacionário com simetria circular. Já fizemos isso antes para os casos de corpo sólido, irrotacional e Rankine, cujos perfis radiais de velocidade tangencial estão na figura a seguir.
   (a) Demonstre que um vórtice semelhante aos casos anteriores, mas com esse simpático perfil de Fusca, está associado a um campo não divergente de velocidades. $\boxed{5}$
   (b) Mostre que contornos da função de corrente ψ formam círculos. $\boxed{5}$
   (c) Dê a fórmula de ψ deixando indicado $F(r, \theta)$ como a “função-Fusca”. $\boxed{5}$



4. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual aplicável aos oceanos da Terra (♁):

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} \;=\; -\vec{\nabla}p \;+\; \mu_{H_2O}\nabla^2\vec{u} \;+\; \rho_{H_2O}\vec{g} \;+\; \rho(\vec{\Omega}_{\text{♁}} \times (\vec{\Omega}_{\text{♁}} \times \vec{r})) \;-\; 2\rho_{H_2O}\vec{\Omega}_{\text{♁}} \times \vec{u}. \qquad (1)$$

Ela vale em qualquer oceano, inclusive no de Kepler-69c (♓), cujo raio é $R_{\text{♓}} = 1.4R_{\text{♁}}$ e cuja aceleração da gravidade é $g_{\text{♓}} = 1.2g_{\text{♁}}$. O dia desse exoplaneta é tal que $d_{\text{♓}} = 0.125d_{\text{♁}}$ e a temperatura média na superfície é de $-163°$C. O oceano é feito de CH_4 líquido, cuja densidade é $\rho_{CH_4} = 0.45\rho_{H_2O}$ e cuja viscosidade é $\mu_{CH_4}0.18 \times 10^{-3}$ Pa.s, 12% a da água.

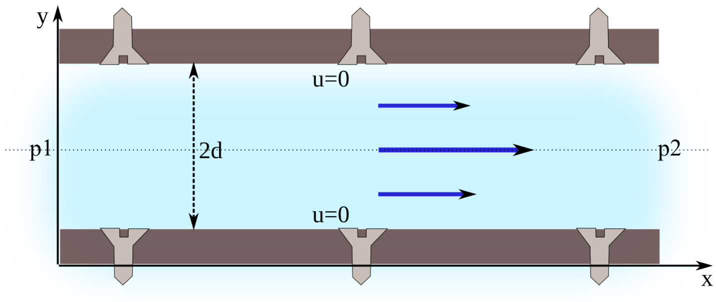
(a) Considere no oceano que lá existe a *Corrente de Clarke*, de 1m/s indo de norte para sul, a 30°S. Compare o termo de Coriolis da equação 1 em Kepler-69c com o de uma corrente equivalente aqui na Terra. É maior, menor ou igual? $\boxed{5}$

(b) A equação 1 tem 6 termos. Quais componentes de quais termos contém o balanço hidrostático? $\boxed{5}$

(c) O nosso veículo não-tripulado vai mergulhar na *Fossa de Verne*, a 0°N 32°E em Kepler-69c, cuja profundidade é de 1 km. Ele compensa a pressão externa gerando uma pressão interna que você deve estimar para que ele não imploda ou exploda. A resistência à diferença de pressão do casco é de 1×10^6Pa, portanto o teu erro deve ser menor que esse valor. Ignore a pressão atmosférica. Responda com o valor da pressão externa em Pa. $\boxed{5}$

5. Suponha que temos um tanque cilíndrico grandão e nele fazemos um furinho em baixo no centro. Surge em minutos um vórtice aproximadamente irrotacional e estável cujo olho tem perfil vertical hiperbólico e tem um raio pequeno. Que termo da equação de Navier–Stokes gera o gradiente de pressão balanceado pela aceleração centrípeta? 5

6. Duas placas são vistas de lado na figura abaixo. As duas são fixas e um fluido passa entre elas.



O fluxo é estacionário e laminar. O fluido é Newtoniano, com densidade ρ e viscosidade μ constantes. As componentes da velocidade nas direções y e z são zero. Como as placas são longas, assuma que $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. A gravidade é $g_y = -g$, constante e vertical. A velocidade é zero em $y = \pm d$, i.e. condição de contorno de não escorregamento. O fluxo é forçado pela diferença de pressão $(p2 - p1)$ aplicada nas bordas distantes como indicado. Esse é o famoso fluxo de Poiseuille (com biquinho).

(a) Simplifique a equação da continuidade. 5

(b) Escreva as 3 componentes da equação de Navier-Stokes. É a do problema 4 sem os dois últimos termos pois estamos num referencial inercial. O balanço numa direção é entre viscosidade e gradiente de pressão, noutra é entre gravidade e pressão hidrostática e na terceira... é bem sem graça. 10

(c) Neste item obtenha a equação da pressão. Vamos com calma. Integre a equação da variação da pressão em y chamando a constante de integração de $f(x)$ (pois ela só é constante em y). Para determinar a pressão $p(x)$, assuma que a pressão $p(x)$ decai linearmente entre $p(0) = p1$ e $p(L) = p2$ sobre a linha pontilhada $y = 0$ usando as condições de contorno em 0 eL. Para completar $p(x, y)$, a parte em y é a boa e velha hidrostática. A resposta deste item é uma expressão para $p(x, y)$ em função de $p_1,\ p_2,\ L,\ \rho$ e g. $\boxed{10}$

(d) Para terminar com chave de ouro, vamos obter o perfil de velocidades. Comece com a tua componente x da equação de Navier-Stokes. É uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem. Pegue a tua fórmula da pressão e obtenha o gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial x}$. Depois integre duas vezes em y, o que gerará duas constantes de integração,c_1 e c_2. Use as condições de contorno $u = 0$ em $y = \pm d$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ em $y = 0$ para obter c_1 e c_2. A tua resposta deve ser uma expressão para $u(y)$ em função de $\mu,\ d,\ L,\ p_1$ e p_2. $\boxed{10}$

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	20	10	15	15	5	35	100
Nota							

Memória não–volátil:

$\Gamma = \oint_C \vec{u}.\vec{dl}$

Continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\, u_i) = 0$$

Conversão do sistema retangular (x, y, z) para o cilíndrico (r, θ, z) e vice-versa:
$y = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$, $z = z$ e
$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $z = z$.
Quanto aos versores,
$i_x = (i_r \cos\theta - i_\theta \sin\theta)$, $i_y = (i_r \sin\theta + i_\theta \cos\theta)$, $i_z = i_z$

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar	
Função escalar	$E = E(r, \theta, z)$
Função vetorial	$\vec{V} = u_r(r,\theta,z)_{\hat{i}_r} + u_\theta(r,\theta,z)_{\hat{i}_\theta} + u_z(r,\theta,z)_{\hat{i}_z}$
Gradiente	$\vec{\nabla} E = \left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional	$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$