Prova II

Nome:____________________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

---

1. As afirmações a seguir são certas ou erradas? Justifique sua resposta.

   (a) Num vórtice de raio R em rotação de corpo sólido a circulação para qualquer $r \leq R$ é zero. A. Certo B. Errado $\boxed{4}$

   (b) A taxa de deformação dada por: $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, com $i \neq j$ exclui o termo $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$. A. Errado B. Certo $\boxed{4}$

   (c) Considere uma bolha de ar esférica com diâmetro 0,1 mm, submersa, com o centro a 1 m de profundidade num tanque com água do mar com densidade ρ em repouso. A pressão no centro dela é dada exatamente por $p = \rho g h$. A. Errado B. Certo $\boxed{4}$

   (d) A força centrípeta tem a mesma direção da força centrífuga, mas sentido oposto, portanto num sistema em equilíbrio rotacional elas se anulam. A. Certo B. Errado $\boxed{4}$

   (e) A equação de Bernoulli na forma $\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z + p = B$. é aplicável a fluxos estacionários, irrotacionais e incompressíveis. A. Certo B. Errado $\boxed{4}$

2. Marque uma alternativa correta (f=campo escalar, $\vec{u}$=campo vetorial): 10

$\nabla \times (\nabla f)$ ◯ Vetor ◯ Escalar ◯ NDA	$\nabla \times (\nabla \times f)$ ◯ Vetor ◯ Escalar ◯ NDA
$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u})$ ◯ Vetor ◯ Escalar ◯ NDA	$\nabla(\nabla \cdot f)$ ◯ Vetor ◯ Escalar ◯ NDA
$\nabla \cdot (\nabla \times f)$ ◯ Vetor ◯ Escalar ◯ NDA	$\nabla \cdot (\nabla \vec{u})$ ◯ Vetor ◯ Escalar ◯ NDA
$\nabla \times (\nabla \times \vec{u})$ ◯ Vetor ◯ Escalar ◯ NDA	$\nabla \cdot (\nabla f)$ ◯ Vetor ◯ Escalar ◯ NDA
$\nabla(\nabla \cdot \vec{u})$ ◯ Vetor ◯ Escalar ◯ NDA	$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u})$ ◯ Vetor ◯ Escalar ◯ NDA

3. O fluxo dado pelas equações abaixo é incompressível? Demonstre matematicamente e descreva brevemente como é o fluxo. 15

$$\begin{cases} u &= \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,\hat{i} \\ v &= \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\hat{j} \\ w &= \dfrac{22}{7}\,\hat{k} \end{cases}$$

4. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual e responda:

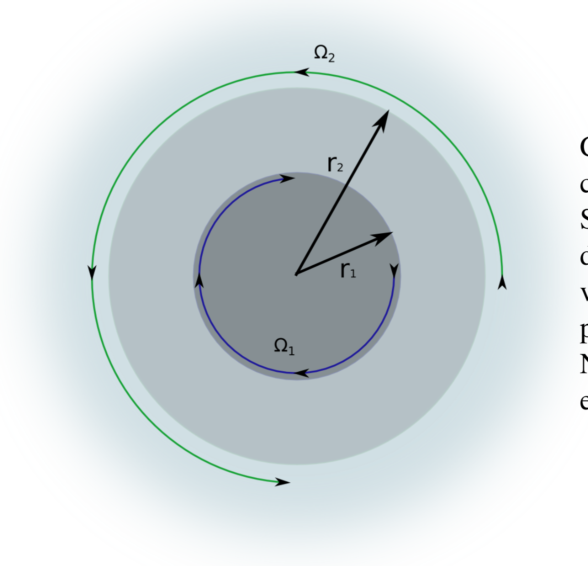
$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} + \rho(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})) - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}. \tag{1}$$

(a) Em que latitude(s) a aceleração centrífuga te deixará mais o mais leve possível? $\boxed{5}$

(b) Simplifique a equação 1 para o caso linear e forçado pelo vento, usando a gravidade aparente. $\boxed{5}$

(c) Simplifique e modifique a equação 1 para um fluxo linear e invíscido que ocorre sobre o Trópico do Serpentário (30°N) de um exoplaneta que gira de forma que um dia de lá tem 30 minutos daqui. Dê a resposta em termos de Ω que é a velocidade angular da Terra. Comente a tua resposta. $\boxed{5}$

5.



Considere o fluxo laminar bi-dimensional entre dois círculos concêntricos, como indicado na figura ao lado. Seja r_1 o raio do círculo interno que gira com velocidade angular Ω_1 e r_2 o raio do externo que gira com velocidade angular Ω_2. Há um fluido newtoniano ocupando todo o espaço. Vamos precisar da equação de Navier–Stokes em coordenadas cilíndricas para tratar este problema:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{u_\theta^2}{r} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) - \frac{u_r u_\theta}{r} \tag{3}$$

$$\text{onde} \quad \nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{4}$$

(a) Estas equações são simplificadas e ficam na forma: $\boxed{5}$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\theta^2}{r} \tag{5}$$

$$0 = \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r}\right) \tag{6}$$

Associe ordenadamente os termos (ou grupos de termos) que foram eliminados da Equação 2 com a justificativa física para eliminá–lo(s) da equação 5.

(b) Para obter u_θ no espaço entre $r = 0$ e $r = r_2$ integre a Equação 6 duas vezes em r. Ao fazer isso ficam 2 constantes de integração a determinar. Use as condições de não–escorregamento para determinar essas constantes. $\boxed{10}$

(c) Qual a expressão para u_θ quando $r_2 \to \infty$? Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

(d) Qual a expressão para u_θ quando $r_1 \to 0$? Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

(e) Qual a expressão para u_θ quando $r_1 \to r_2$? Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

6. Suponha que temos um tanque de 18 m de raio e nele fazemos um vórtice aproximadamente irrotacional e estável cujo olho tem um raio idealmente pequeno. A "força" centrífuga por unidade de volume para um raio de 0.08 m é 7.2 N.m^{-3}.

   (a) Que termo da equação de Navier–Stokes faz o papel de força centrípeta nesse vórtice? $\boxed{5}$

   (b) Utilize a forma geral da equação de Bernoulli para fluxos irrotacionais: $\frac{1}{2}u^2 + gz + \int \frac{dp}{\rho} = B$ e calcule a depressão $z(r)$ (em m) para $r = 25$ cm e $r = 0.5$ cm. $\boxed{15}$

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	20	10	15	15	30	20	110
Nota							

Memória não–volátil:

$\Gamma = \oint_C \vec{u}.\vec{dl}$

Conversão do sistema retangular (x, y, z) para o cilíndrico (r, θ, z) e vice-versa:
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ e
$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $z = z$.
Quanto aos versores,
$i_x = (i_r \cos\theta - i_\theta \sin\theta)$, $i_y = (i_r \sin\theta + i_\theta \cos\theta)$, $i_z = i_z$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar						
Função escalar	$E =$	$E(r,\theta,z)$				
Função vetorial	$\vec{V} =$	$u_r(r,\theta,z)_{\hat{i}_r}$	$+$	$u_\theta(r,\theta,z)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$u_z(r,\theta,z)_{\hat{i}_z}$
Gradiente	$\vec{\nabla}E =$	$\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente	$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_r)}{\partial r}$	$+$	$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$	$+$	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional	$\vec{\nabla}\times\vec{V} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$