IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova II** Nome:________________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

---

1. As afirmações a seguir são certas ou erradas? Justifique sua resposta.

   (a) Num vórtice irrotacional $du_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = 0$. A. Certo B. Errado $\boxed{4}$

   (b) A função de corrente ψ é escalar e foi deduzida a partir da equação da continuidade para fluxos incompressíveis e bidimensionais. A. Certo B. Errado $\boxed{4}$

   (c) $\dfrac{D\vec{u}}{Dt} = \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$. representa a derivada total da velocidade: A. Errado B. Certo $\boxed{4}$

   (d) As linhas de corrente no fluxo de um rio, do ponto de vista de um observador que voa com velocidade igual à média de velocidades numa seção reta do rio, são nulas.
   A. Certo B. Errado $\boxed{4}$

   (e) Dada uma interface líquido–gás, a tensão superficial é a energia necessária para se aumentar a área da superfície livre de uma unidade. A. Errado B. Certo $\boxed{4}$

2. A Terra gira em torno de si mesma com $\Omega_\oplus$ e em torno do Sol com $\Omega_\odot$. Na nossa dedução da equação de Navier–Stokes ignoramos completamente $\Omega_\odot$. Podemos realmente fazer isso? Justifique quantitativamente sua resposta. $\boxed{5}$

3. Usando 1 m^3 de água e 35 kg de Cloreto de Sódio prove quantitativamente que o efeito das interações elétricas entre a água e o sal dissolvido muda mais a densidade do que a adição de um sal mais denso que a água. Indique as aproximações e suposições utilizadas, não quero só as contas. $\boxed{15}$

4. Durante o curso a segunda lei da termodinâmica e a equação da continuidade foram combinadas na dedução desta equação: $\boxed{10}$

$$\rho\frac{DS}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) - \frac{\vec{q}}{T^2}\cdot\vec{\nabla}T + \frac{\Phi}{T}$$

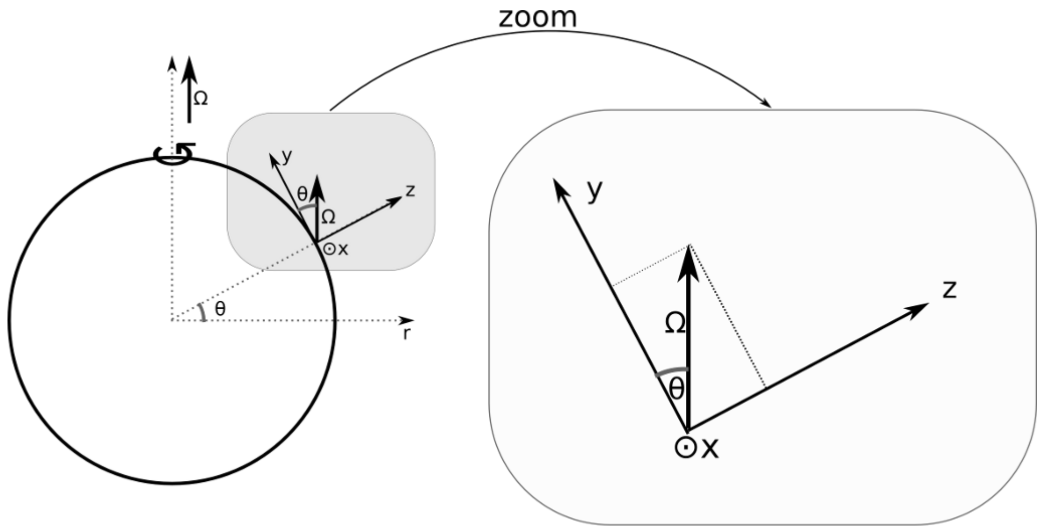
Neste caso S é a entropia, $\vec{q}$ é o fluxo de calor, T a temperatura e Φ a dissipação viscosa. Substitua nela a equação da difusão simples de calor (lei de Fourier) e obtenha a **equação da produção de entropia**. Identifique nessa nova equação o(s) termo(s) relativo(s) à produção de entropia e explique o processo físico associado a ele(s).

5. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} + \vec{g_e} - 2\vec{\Omega}\times\vec{u}. \tag{1}$$

(a) Considere primeiro o termo de Coriolis. Projete $\vec{\Omega}$ no sistema Cartesiano local como indicado na figura abaixo por (x, y, z) completando as fórmulas das componentes do vetor: $\boxed{5}$

$$\Omega_x = \_\_\_\_\_$$
$$\Omega_y = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$\Omega_z = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

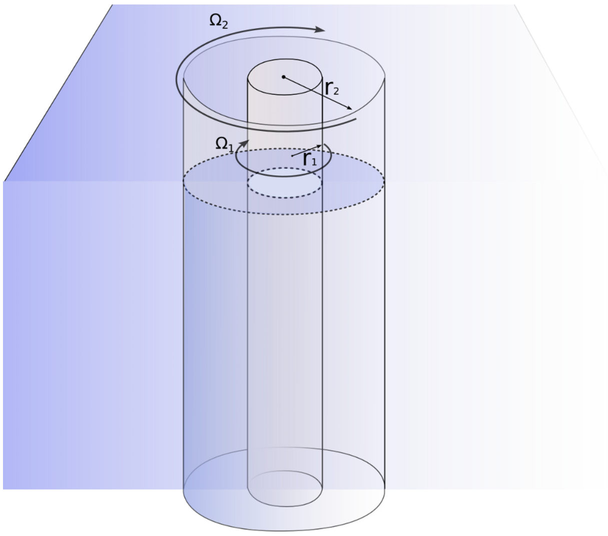


(b) Considere a equação 1 aplicada a um problema de circulação de larga escala, sendo que: $\boxed{15}$

- Despreze balanço de forças na vertical, a hidrostática domina e podemos tirá–la da equação 1 assim: no termo do gradiente de pressão troque a pressão total p pela anomalia em relação à pressão hidrostática que chamaremos de p';
- O fluxo é aproximadamente invíscido e homogêneo;
- Estamos trabalhando com uma única tomada de dados, portanto assumimos que o fluxo é estacionário;
- O termo não–linear é pequeno em relação aos outros.

Escreva as equações das componentes horizontais do balanço de forças, com $f = 2\Omega\sin\theta$.

6.



Para variar, considere o fluxo laminar entre dois canos cilíndricos concêntricos, de paredes finas, como indicado na figura ao lado. Seja r_1 o raio do cano interno que gira com velocidade angular Ω_1 e r_2 o raio do cano externo que gira com velocidade angular Ω_2. Há água dentro do cilindro interno, entre os dois cilindros e fora do cilindro externo até $r \to \infty$. Os canos são vazados e longos, de modo que há simetria na dimensão vertical z. Vamos precisar da equação de Navier–Stokes em coordenadas cilíndricas para tratar este problema:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{u_\theta^2}{r} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) - \frac{u_r u_\theta}{r} \tag{3}$$

$$\text{onde} \quad \nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{4}$$

(a) Estas equações são simplificadas e ficam na forma: $\boxed{5}$

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\theta^2}{r} \qquad (5) \\ 0 &= \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r}\right) \qquad (6) \end{aligned}}$$

Associe ordenadamente os termos (ou grupos de termos) que foram eliminados da Equação 2 com a justificativa física para eliminá–lo(s) da equação 5.

(b) Para obter u_θ no espaço entre os cilindros, integre a Equação 6 duas vezes em r. Ao fazer isso ficam 2 constantes de integração a determinar. Use as condições de não–escorregamento nos contornos interno ($u_\theta = \Omega_1 r_1$ em $r = r_1$) e externo ($u_\theta = \Omega_2 r_2$ em $r = r_2$) para determinar essas constantes. $\boxed{10}$

(c) Como fica u_θ quando $r_2 \to \infty$? Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

(d) Como fica u_θ quando $r_1 \to 0$? Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

(e) Como fica u_θ quando consideramos os campos interno e externo a um cilindro de raio r_1 girando com velocidade angular Ω_1 num oceano infinito? Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	20	5	15	10	20	30	100
Nota							

Memória não–volátil:

A densidade da água pura é 1000 kg.m^{-3}.
A densidade do sal NaCl é 2.16 g.cm^{-3}.
O coeficiente de tensão superficial da água é 83×10^{-3}N.m^{-1}.
O coeficiente de expansão térmica da água é 4×10^{-5}K^{-1}.
O coeficiente de contração halina é 7.9×10^{-4}psu^{-1}.

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{T,S} dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p,S} dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{p,T} dS$$

A lei de Fourier é $\vec{q_t} = -k_t \vec{\nabla} T$ onde k_t é o coeficiente positivo de condutividade térmica.

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar						
Função escalar	$E =$	$E(r, \theta, z)$				
Função vetorial	$\vec{V} =$	$u_r(r, \theta, z)_{\hat{i}_r}$	$+$	$u_\theta(r, \theta, z)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$u_z(r, \theta, z)_{\hat{i}_z}$
Gradiente é vetor!	$\vec{\nabla} E =$	$\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente é escalar!	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_r)}{\partial r}$	$+$	$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$	$+$	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional é vetor!	$\vec{\nabla} \times \vec{V} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$

Esta é a definição de ψ em coords. cartesianas:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Esta é a definição de ψ em coords. cilíndricas:

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases}$$