Gabarito

Q1)

Considere metade da barra com comprimento $l_0 = L_0/2$.

Depois do aumento da temperatura, teremos um acréscimo no comprimento de:

$$l = l_0 + \alpha l_0 \Delta T$$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo de catetos x, l_0 e hipotenusa l, teremos que

$$(l_0 + \alpha l_0 \Delta T)^2 = x^2 + {l_0}^2$$
$$x^2 = (l_0 + \alpha l_0 \Delta T)^2 - {l_0}^2$$
$$x^2 = {l_0}^2 + 2\alpha {l_0}^2 \Delta T + (\alpha l_0 \Delta T)^2 - {l_0}^2$$
$$x^2 = 2\alpha {l_0}^2 \Delta T + (\alpha l_0 \Delta T)^2$$

Desprezando o termo em segunda ordem, teremos que

$$x^2 = 2\alpha {l_0}^2 \Delta T$$
$$x = l_0\sqrt{2\alpha\Delta T} = \frac{3{,}77}{2}\sqrt{2.25.10^{-6}.32} \equiv 0{,}0754\, m = 7{,}54\, cm$$

Sem desprezar os termos em segunda ordem teríamos:

$$x^2 = 2\alpha {l_0}^2 \Delta T + (\alpha l_0 \Delta T)^2$$
$$x^2 = {l_0}^2(2\alpha\Delta T + (\alpha\Delta T)^2)$$
$$x = l_0\sqrt{(2\alpha\Delta T + (\alpha\Delta T)^2)} = \frac{3{,}77}{2}\sqrt{2.25.10^{-6}.32 + (25.10^{-6}.32)^2}$$
$$x = 1{,}885\sqrt{(16.10^{-4} + 64.10^{-6})} \cong 7{,}5415\, cm$$

Ou seja, o termo em segunda ordem apresenta uma diferença da ordem de 10^{-3} no resultado final, por isso podemos desconsiderá-lo.

Q2)

Vamos calcular os diâmetros do anel e da esfera na temperatura de equilíbrio. Sabemos que

$$D_{0\,A} = 2{,}54\ cm \qquad D_{0\,E} = 2{,}54508\ cm$$
$$T_{i\,A} = 0\ \mathrm{°C} \qquad T_{i\,E} = 100\ \mathrm{°C}$$
$$\alpha_A = 17.10^{-6}/\mathrm{°C} \qquad \alpha_E = 23.10^{-6}/\mathrm{°C}$$
$$c_A = 900\ \mathrm{J/kg.K} \qquad c_E = 386\ \mathrm{J/kg.K}$$

O diâmetro do anel depois do aquecimento é dado por:

$$D_A = D_{0\,A}\left(1 + \alpha_A\left(T_f - T_{i\,A}\right)\right) = D_{0\,A}\left(1 + \alpha_A T_f\right)$$

O diâmetro da esfera depois do resfriamento é dado por:

$$D_E = D_{0\,E}\left(1 + \alpha_E\left(T_f - T_{i\,E}\right)\right)$$

No equilíbrio, os dois diâmetros são iguais, então igualando as duas equações acima, teremos:

$$D_{0\,A}\left(1 + \alpha_A T_f\right) = D_{0\,E}\left(1 + \alpha_E\left(T_f - T_{i\,E}\right)\right)$$

Isolando a temperatura final teremos:

$$T_f = \frac{D_{0\,A} - D_{0\,E} + D_{0\,E}\alpha_E T_{i\,E}}{D_{0\,E}\alpha_E - D_{0\,A}\alpha_A}$$
$$T_f = \frac{2{,}54 - 2{,}54508 + 2{,}54508.23.10^{-6}.100}{2{,}54508.23.10^{-6} - 2{,}54.17.10^{-6}} \cong 50{,}3804\ \mathrm{°C} \cong 50{,}4\ \mathrm{°C}\ ou\ 323{,}4K$$

Note que aqui os valores de α estão em unidade de $/\mathrm{°C}$, ou seja, a temperatura final encontrada usando as temperaturas iniciais de 0°C e 100ºC será dada em °C.

Agora vamos calcular quanto calor foi perdido pela esfera e quanto calor foi absorvido pelo anel.

Calor absorvido pelo anel:

$$Q_A = c_A m_A\left(T_f - T_{i\,A}\right)$$

Calor perdido pela esfera:

$$|Q_E| = c_E m_E\left(T_{i\,E} - T_f\right)$$

Como o sistema está isolado, todo o calor perdido pela esfera é absorvido pelo anel, então igualando teremos que:

$$c_A m_A\left(T_f - T_{i\,A}\right) = c_E m_E\left(T_{i\,E} - T_f\right)$$

Isolando m_E teremos que:

$$m_E = \frac{c_A m_A\left(T_f - T_{i\,A}\right)}{c_E\left(T_{i\,E} - T_f\right)} = \frac{900.0{,}02.\,(323{,}4 - 273)}{386(373 - 323{,}4)} \cong 47{,}347.\,10^{-3} Kg \cong 47{,}35\ g$$

Note aqui que aqui os valores de c estão em unidade de $J/\mathrm{kg\ K}$, ou seja, a massa do anel deve ser adequada e a temperatura deve ser transformada em K. No final das contas por se tratar de uma variação de temperatura, o resultado estará certo caso a transformação das temperaturas não seja feito, mas era importante notar esse detalhe.