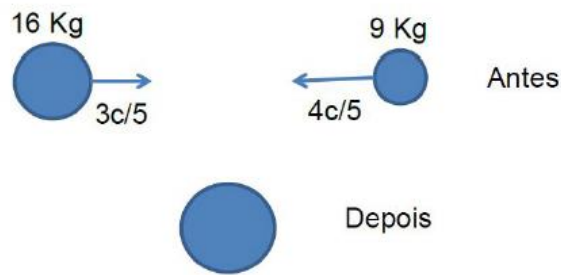


Provinha 4 – Gabarito



Antes

$$m_1 = 16 \text{ kg}$$

$$v_1 = \frac{3c}{5} \text{ m/s}$$

$$m_2 = 9 \text{ kg}$$

$$v_2 = \frac{4c}{5} \text{ m/s}$$

Depois

$$m_3$$

$$v_3 = 0 \text{ m/s}$$

a)

Vamos calcular γ_1, γ_2 e γ_3 com referentes às velocidades v_1, v_2 e v_3 .

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3c}{5c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{5}{4}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4c}{5c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{25}}} = \frac{5}{3}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_3}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0c}{c}\right)^2}} = 1$$

Vamos agora calcular as energias e momentos nos instantes antes e depois da colisão

Momento Inicial

$$p_i = p_1 + p_2 = m_1 \gamma_1 v_1 + m_2 \gamma_2 v_2$$

$$p_i = 16 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3c}{5} - 9 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4c}{5} = 12c - 12c$$

$$p_i = 0 \text{ kg m/s}$$

Energia Inicial

$$E_i = E_1 + E_2 = m_1 \gamma_1 c^2 + m_2 \gamma_2 c^2$$

$$E_i = 16 \cdot \frac{5}{4} c^2 + 9 \cdot \frac{5}{3} c^2 = 20c^2 + 15c^2$$

$$E_i = 35c^2 \text{ J}$$

Momento Final

$$\begin{aligned}p_f &= p_3 = m_3 \gamma_3 v_3 \\p_f &= m_3 \cdot 1.0 \\p_f &= 0 \text{ kg m/s}\end{aligned}$$

Energia Final

$$\begin{aligned}E_f &= E_3 = m_3 \gamma_3 c^2 \\E_f &= m_3 \cdot 1. c^2 \\E_f &= m_3 c^2 J\end{aligned}$$

Agora usando a conservação de energia antes e depois, podemos encontrar o valor da massa resultante m_3 . Então

$$\begin{aligned}E_i &= E_f \\35c^2 &= m_3 c^2 \\m_3 &= 35 \text{ kg}\end{aligned}$$

- b) Vamos usar as transformações de Lorentz para descobrir quanto vale a velocidade da goma de 9kg (v'_2) para um referencial com a mesma velocidade da goma de 16kg. Então:

$$v'_2 = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}$$

Com $v = -4c/5 \text{ m/s}$ e $V = 3c/5 \text{ m/s}$. Então:

$$v'_2 = \frac{-4c/5 - 3c/5}{1 - \frac{(-4c/5)(3c/5)}{c^2}} = \frac{-7c/5}{37/25} = \frac{-35c}{37} \text{ m/s}$$

- c) Vamos recalculer os valores de γ_1, γ_2 com as velocidades desse novo referencial, em que $v_1 = 0 \text{ m/s}$, $v_2 = -35c/37 \text{ m/s}$. Então:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0c}{c}\right)^2}} = 1 \\ \gamma_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{-35c}{37c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{35}{37}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{144}{1369}}} = \frac{37}{12}\end{aligned}$$

Agora podemos calcular a energia do sistema, já que $E_i = E_f$.

Energia Inicial

$$\begin{aligned}E &= E_1 + E_2 = m_1 \gamma_1 c^2 + m_2 \gamma_2 c^2 \\E &= 16.1 c^2 + 9. \frac{37}{12} c^2 = 16c^2 + \frac{111c^2}{4}\end{aligned}$$

$$E = \frac{175c^2}{4} = 43,75c^2 J$$

- d) Depois da colisão, no referencial do laboratório, a goma resultante fica parada. Então basta usar a transformação de Lorentz novamente com $v = 0 \text{ m/s}$ e $V = 3c/5 \text{ m/s}$ para encontrar v'_3 . Então:

$$v'_3 = \frac{0 - 3c/5}{1 - \frac{0 \cdot (3c/5)}{c^2}} = \frac{-3c}{5} \text{ m/s}$$

- e) Novamente podemos usar a conservação de energia do sistema. Vamos calcular a energia final e igualar com a energia inicial calculada no item (c). Primeiro vamos recalculer γ_3 em que $v_3 = -3c/5 \text{ m/s}$:

$$\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_3}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{-3c}{5c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{5}{4}$$

E então temos que:

Energia Final

$$\begin{aligned} E_f &= E_3 = m_3 \gamma_3 c^2 \\ E_f &= m_3 \cdot \frac{5}{4} \cdot c^2 \\ E_f &= \frac{5 m_3}{4} c^2 J \end{aligned}$$

E igualando as energias teremos que:

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ \frac{175c^2}{4} &= \frac{5 m_3}{4} c^2 \\ m_3 &= 35 \text{ kg} \end{aligned}$$

Ou poderíamos fazer o mesmo procedimento com os momentos final e inicial:

Momento Inicial

$$\begin{aligned} p_i &= p_1 + p_2 = m_1 \gamma_1 v_1 + m_2 \gamma_2 v_2 \\ p_i &= 16 \cdot 1.0 + 9 \cdot \frac{37}{12} \cdot \left(\frac{-35c}{37}\right) = \frac{-9 \cdot 35 \cdot c}{12} \\ p_i &= \frac{-105c}{4} \text{ kg m/s} \end{aligned}$$

Momento Final

$$\begin{aligned} p_f &= p_3 = m_3 \gamma_3 v_3 \\ p_f &= m_3 \cdot \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{-3c}{5}\right) \end{aligned}$$

$$p_f = \frac{-3m_3c}{4} \text{ kg m/s}$$

E como o momento se conserva:

$$p_i = p_f$$

$$\frac{-105c}{4} = \frac{-3m_3c}{4}$$

$$m_3 = \frac{105}{3} = 35 \text{ kg}$$