

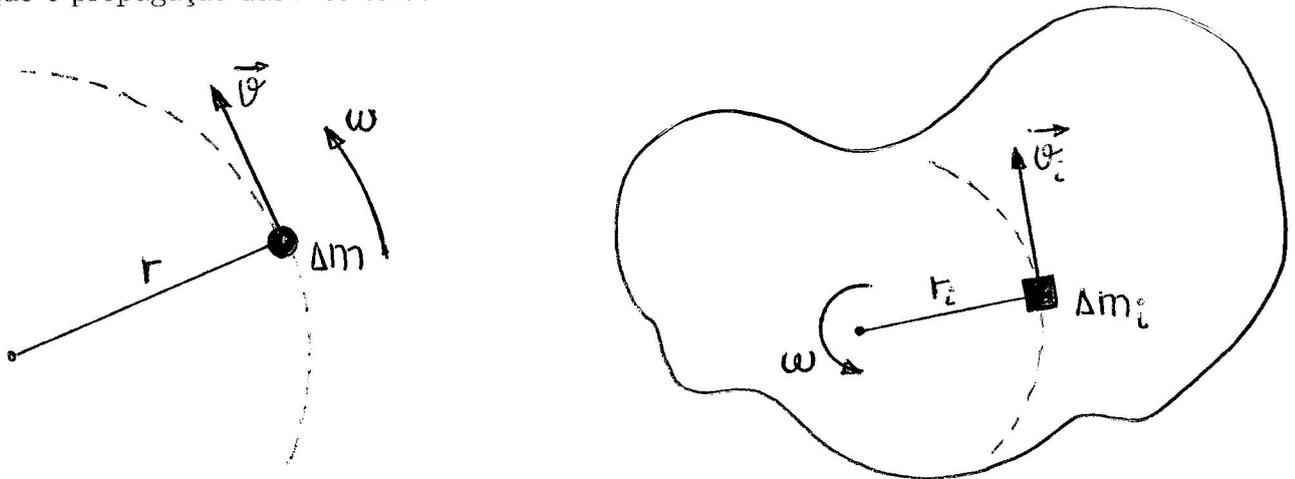
2a Experiência: Momento de inércia

4320254 - Laboratório de Mecânica - 1o Semestre/2015

Equipe: Turma:.....
..... Data:
..... Rotor No:

1.Introdução: Momento de inércia

Neste experimento será feita a determinação do momento de inércia de um rotor a partir de densidade e características geométricas de um rotor. Um aspecto importante a ser considerado será a avaliação e propagação das incertezas.



Uma massa Δm , realizando um movimento de rotação, tem energia cinética dada por

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m v^2 \quad \text{ou} \quad \Delta K = \frac{1}{2} (\Delta m r^2) \omega^2$$

onde r é o raio e ω é a velocidade angular de rotação ($\omega = v/r$).

Um corpo em rotação em torno de um eixo pode ser entendido como constituído de pequenas massas Δm_i . Assim, a energia cinética total é a soma das energias cinéticas ΔK_i das massas Δm_i . Isto é,

$$K = \sum_i \Delta K_i = \frac{1}{2} (\sum_i \Delta m_i r_i^2) \omega^2 \quad \text{ou} \quad K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

onde

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

é definido como o *momento de inércia do corpo em relação ao eixo*.

Se as massas Δm_i são entendidas como massas infinitesimais (ver Figura), indicadas por dm , então a somatória pode ser substituída por uma integral:

$$I = \int r^2 dm$$

Esta integral também pode ser escrita em termos da densidade ρ e do volume infinitesimal dV correspondente à massa $dm = \rho dV$:

$$I = \int_{\text{volume}} \rho r^2 dV \quad \text{ou} \quad I = \rho \int_{\text{volume}} r^2 dV$$

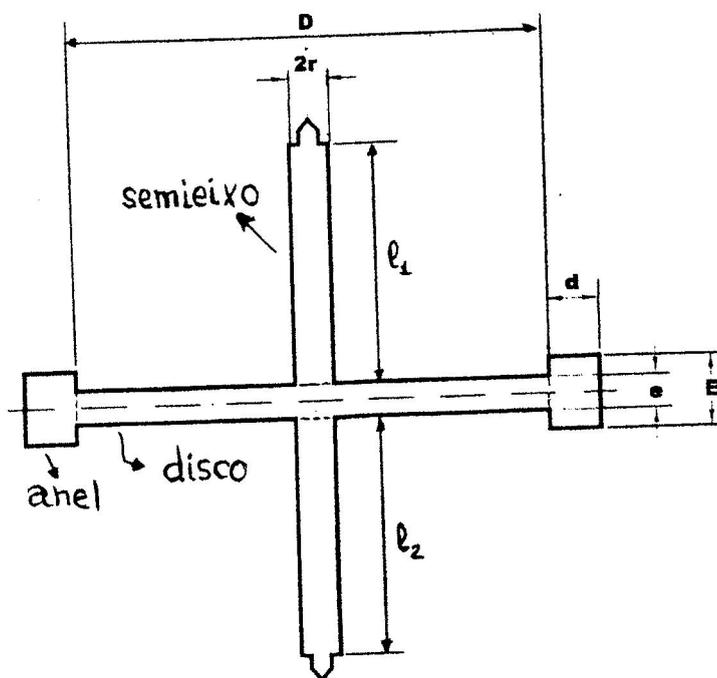
O momento de inércia pode ser calculado a partir desta expressão, escolhendo elemento dV adequado e resolvendo a integral. Deve ser observado que a integral depende da distância r ao eixo de rotação. Isto é, os momentos de inércia dependem explicitamente do eixo de rotação.

A tabela abaixo apresenta exemplos de momentos de inércia em relação ao eixo de simetria.

Corpo	I
Disco de massa M e raio R	$\frac{1}{2} M R^2$
Cilindro de massa M e raio R	$\frac{1}{2} M R^2$
Anel de massa M e raios R_1 e R_2	$\frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$

2. Parte experimental

O rotor a ser medido é esquematizado abaixo. O rotor pode ser entendido como formado por um disco de diâmetro D e espessura e , um anel de diâmetro interno D , espessura E e espessura radial d , e 2 semieixos de raio r e comprimentos l_1 e l_2 . As ponteiros de apoio e outros detalhes do rotor podem ser desprezados no cálculo do momento de inércia, porque as massas correspondentes são muito pequenas, bem como os raios.



Desenho esquemático do rotor

Observações sobre a avaliação da incerteza padrão σ_{Px} :

A incerteza padrão σ_{Px} no resultado final x de uma medição é sempre obtida por meio de

$$\sigma_{Px}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 \quad \text{ou} \quad \sigma_{Px} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

onde σ_A é avaliada por métodos estatísticos e σ_B é avaliada por outros métodos (não-estatísticos).

No caso mais simples, a medição de uma grandeza x é repetida n vezes obtendo-se resultados $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. O resultado final da medição será a média $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ e a incerteza tipo A é o desvio padrão da média:

$$\sigma_A = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{onde} \quad \sigma \text{ é o desvio padrão dos resultados}$$

O desvio padrão associado à média é \sqrt{n} vezes menor que σ . Como pode ser visto, repetir medições é importante não apenas para melhorar a precisão do resultado (a média), mas também porque permite avaliar a incerteza tipo A devida aos erros aleatórios.

Quando for possível estimar um limite de erro L correspondente a erros sistemáticos residuais, a incerteza tipo B (σ_B) pode ser estimada. Por exemplo, se um limite de erro L com $\approx 99\%$ de confiança pode ser estabelecido:

$$\sigma_B = \frac{L}{3} \quad (L = \text{limite de erro com } \approx 99\% \text{ de confiança})$$

A incerteza tipo B mais comum é devida ao instrumento e pequenas dificuldades na medição. Para instrumento em perfeitas condições e medição em condições ideais, pode ser considerado como **limite de erro de calibração** (L) a menor divisão u indicada pelo instrumento. Admitindo L com $\approx 99\%$ de confiança tem-se $L = u$ e $\sigma_B = u/3$.

Muitas vezes nem as condições de medição nem os instrumentos estão em condições ideais. Por isso, é preferível adotar como **regra geral** $L = 2u$ com $\approx 99\%$ de confiança. Assim resulta:

$$\sigma_B = \frac{L}{3} = \frac{2u}{3} \quad u = \text{menor divisão indicada explicitamente pelo instrumento}$$

Entretanto, esta regra geral deve ser usada com muito bom senso. Para uma medição em excelentes condições pode-se considerar $L = u$, assim como em condições muito difíceis pode-se considerar $L = 3u$ ou até maior.

Algumas estimativas razoáveis para o limite de erro L com $\approx 99\%$ de confiança:

- Escala milimetrada: L de 1 mm a 2 mm (dependendo das condições da medição)
(trena ou régua)
- Paquímetro comum: L de $0,10\text{ mm}$ a $0,15\text{ mm}$ (dependendo das condições da medição)
- Micrômetro comum: L de $0,010\text{ mm}$ a $0,030\text{ mm}$ (dependendo das condições da medição)

2.1. Medições

N₀ do rotor =

Massa total do rotor = (± 1,0) g

Tabela 2. Estimativa da incerteza σ_B para as quantidades a serem medidas.

Quantidade	Símbolo	Instrumento	L considerado	σ_B
Comprimento do semieixo 1	ℓ_1			
Comprimento do semieixo 2	ℓ_2			
Diâmetro do semieixo	$2r$			
Diâmetro do disco	D			
Espessura do disco	e			
Espessura radial do anel	d			
Espessura do anel	E			

É conveniente medir algumas vezes cada grandeza em posições diferentes e direções diferentes. Cada aluno do grupo deve medir 2 ou 3 vezes a mesma quantidade, como forma de reduzir pequenos erros de procedimento, além de diminuir a possibilidade de erro grosseiro.

Tabela 3. Resultados das medições.

Aluno	ℓ_1 (cm)	ℓ_2 (cm)	$2r$ (cm)	D (cm)	e (cm)	d (cm)	E (cm)
\bar{x}							
σ_x							
$\sigma_A = \sigma_{\bar{x}}$							
σ_B							
σ_{Px}							

2.2. Cálculos de momentos de inércia

O momento de inércia do rotor é a soma dos momentos dos elementos constituintes:

$$I = I_{\text{disco}} + I_{\text{anel}} + I_{\text{semieixo1}} + I_{\text{semieixo2}} \quad (\text{Eq. 1})$$

Assim, inicialmente devem ser calculados os momentos de inércia de cada um dos elementos constituintes e as respectivas incertezas.

Tabela 4. Resultados dos cálculos de massas e momentos de inércia.

Quantidade calculada	Símbolo	Resultado
Comprimento do semieixo 1	ℓ_1	(\pm) cm
Raio do semieixo	r	(\pm) cm
Massa do semieixo 1	M_{s1}	(\pm) g
Momento de inércia do semieixo	$I_{semieixo1}$	(\pm) $g\ cm^2$
Comprimento do semieixo 2	ℓ_2	(\pm) cm
Massa do semieixo 2	M_{s2}	(\pm) g
Momento de inércia do semieixo 2	$I_{semieixo2}$	(\pm) $g\ cm^2$
Espessura do disco	e	(\pm) cm
Raio do disco	$R_1 = D/2$	(\pm) cm
Massa do disco	M_d	(\pm) g
Momento de inércia do disco	I_{disco}	(\pm) $g\ cm^2$
Espessura do anel	E	(\pm) cm
Raio externo do anel	R_2	(\pm) cm
Massa do anel	M_a	(\pm) g
Momento de inércia do anel	I_{anel}	(\pm) $g\ cm^2$
Momento de inércia total	I	(\pm) $g\ cm^2$
Momento de inércia total	I	(\pm) $\times 10^{-3}kg\ m^2$

Obs. : Os algarismos significativos nas quantidades devem ser consistentes com as incertezas.

Obs. : No que segue devem ser apresentadas as expressões explícitas para os cálculos, com dedução ou justificativa quando for o caso.

Expressões para momentos de inércia (em função das massas e dimensões):

As massas podem ser calculadas a partir das dimensões dos elementos e considerando densidade

$$\rho = (7,67 \pm 0,10)g/cm^3.$$

Expressões para as massas dos elementos do rotor (em função de ρ e dimensões):

Expressões para as incertezas padrões nas massas dos elementos do rotor:¹

¹As fórmulas para propagação de incertezas estão resumidas na pg. 45 da Apostila de Erros.

Expressões para as incertezas padrões nos momentos de inércia dos elementos do rotor :

Expressão para a incerteza padrão no momento de inércia do rotor, em termos das incertezas nos momentos de inércia dos elementos constituintes :

3. Conclusões

Comparação entre a massa total do rotor e a obtida a partir de densidade e dimensões :

Conclusões e comentários :

Observação importante : O número do rotor e os resultados obtidos para massa total e momento de inércia do rotor (com a respectiva incerteza padrão) devem ser cuidadosamente anotados, uma vez que na **3ª Experiência deve ser usado o mesmo rotor** e esses dados servirão de referência para comparação. De preferência deveria ser guardada uma cópia deste relatório.