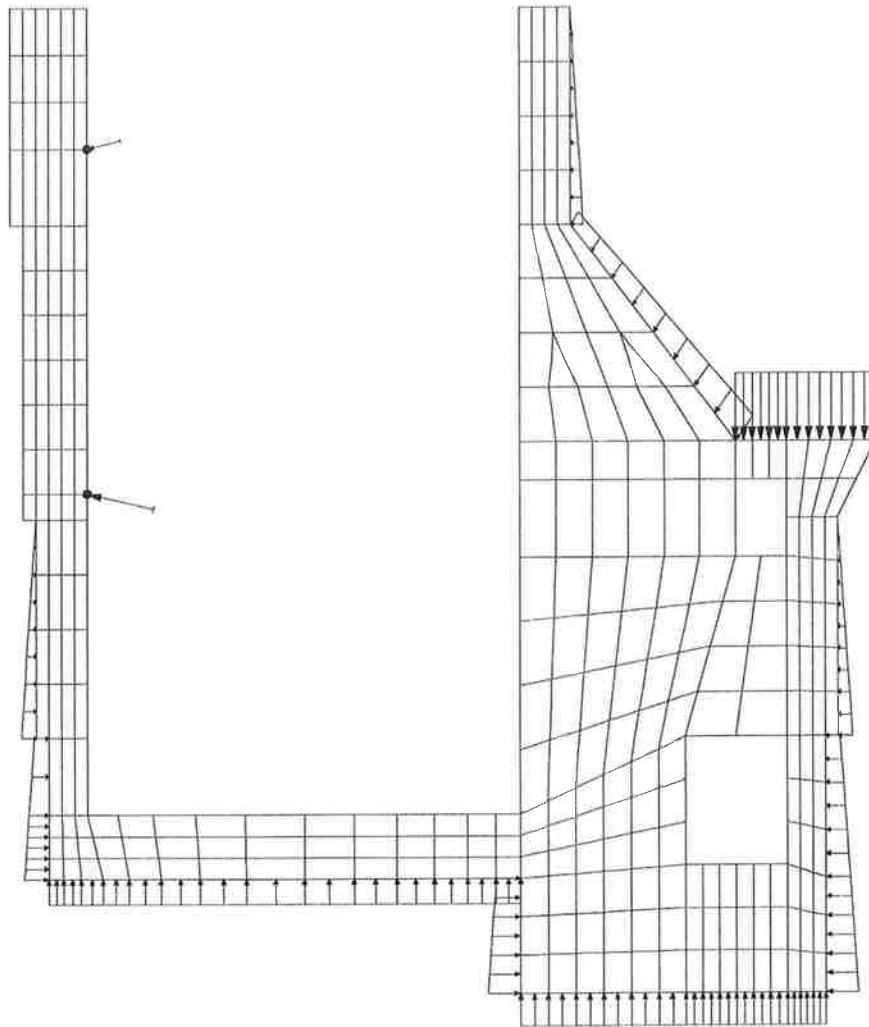




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações

PEF-2302 – Mecânica das Estruturas I



Carlos Eduardo Nigro Mazzilli  
João Cyro André  
Miguel Luiz Bucalem  
Sérgio Cifú

São Paulo  
2010

# Prefácio

Este texto tem a finalidade de prover a disciplina PEF-2302, Mecânica das Estruturas I, de documentação de apoio aos alunos. O conteúdo guarda estreita correlação com o programa da disciplina, tanto nos seus aspectos conceituais, como nos formais. É o resultado de mais de duas décadas de vivência pedagógica, incorporando as evoluções ocorridas ao longo do tempo. Este texto não se teria materializado sem o apoio zeloso e competente dos seguintes alunos de pós-graduação, que atuaram como assistentes de ensino na disciplina: Carlos A. Medeiros, Christian Furukawa, Irani B. Ramos, Odulpho G.P. Baracho Neto, Estela M. R. Bueno, Lorenzo A. Ruschi e Luchi e Renata Butkeraitis. A eles, os agradecimentos dos autores.

# Capítulo 1

## Análise Matricial de Estruturas

A Análise Matricial de Estruturas propõe-se a determinar os deslocamentos, reações e esforços solicitantes de estruturas de barras – tais como vigas contínuas, vigas poligonais, pórticos e treliças planas, grelhas, pórticos espaciais – modelando-as como um arranjo de **elementos simples** (barras), unidos através de suas extremidades ou **nós**, os quais podem ainda ter deslocamentos restritos por vínculos. As variáveis primárias são os deslocamentos nodais, cujo conhecimento permite a determinação das reações e dos esforços nas extremidades das barras, decorrentes de carregamentos ou deslocamentos aplicados aos nós. Ver-se-á, posteriormente, que carregamentos internos aos elementos poderão também ser contemplados. A partir do conhecimento das variáveis nas extremidades do elemento, poder-se-á determinar os correspondentes valores no seu interior, por meio das expressões elementares já conhecidas das teorias de barras.

Na estática das estruturas de comportamento linear, as equações fundamentais da análise matricial de estruturas constituem um sistema de equações algébricas lineares, para a resolução do qual aplicam-se métodos computacionais próprios da álgebra linear.

Na dinâmica das estruturas de comportamento linear, as equações fundamentais da análise matricial de estruturas constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias, para a resolução do qual aplicam-se processos próprios da integração numérica.

As teorias de barras subjacentes à Análise Matricial de Estruturas já se encontravam desenvolvidas há muito tempo e alguns métodos gerais de solução já haviam sido antevistos por homens notáveis como Maxwell, mas não conseguiram estabelecer-se antes do advento do computador, pois requeriam a manipulação de grande massa de dados e a solução de equações com número elevadíssimo de incógnitas. Em vez desses métodos gerais de análise de estruturas de barras, eram empregados aqueles que, engenhosamente, introduziam aproximações e exploravam particularidades de arranjos típicos. Proliferaram os métodos que, apesar das simplificações, continuavam a envolver tediosos cálculos. Para as vigas contínuas, a título de exemplo, havia o método da equação dos três momentos, o de Cross, o dos pontos fixos, o da propagação, etc.

É justo que se reconheça que tais métodos simplificados tiveram e ainda têm um papel importante na formação do engenheiro de estruturas, pois exigem dele capacidade de “dissecação” e compreensão do comportamento dos sistemas estruturais, à moda de um curso de “anatomia” das estruturas. Ao abandonarem-se esses métodos, nas desejáveis e inevitáveis atualizações curriculares, é importante que o ensino e a aprendizagem em engenharia de estruturas não deixe de dar destaque ao desenvolvimento das habilidades que levam à compreensão do comportamento dos sistemas estruturais. A opção pela análise computacional de estruturas não deve ser confundida, pois, com a opção pela instrumentalização pura e simples do uso de programas de computador.

Adotar-se-ão as seguintes hipóteses para introdução à Análise Matricial de Estruturas:

- Estruturas reticuladas (formadas por barras)
- Barras prismáticas
- Linearidade física (material elástico linear)
- Linearidade geométrica (não se consideram efeitos de segunda ordem)
- Carregamentos estáticos

De início, será enfocada a análise matricial de pórticos planos (estruturas planas carregadas no seu plano).

## 1.1 Barra prismática: solução pelo método dos deslocamentos

A título de recapitulação de tópicos da teoria clássica elementar de barras, bem como para obtenção de resultados de utilidade para a Análise Matricial de Estruturas, considere-se o problema da determinação da solução exata do campo de deslocamentos e dos esforços solicitantes em uma barra prismática com deslocamentos impostos nas suas extremidades.

Considere-se, inicialmente, a situação indicada na figura 1.1, que também admite a possibilidade de carregamentos distribuídos aplicados à barra.

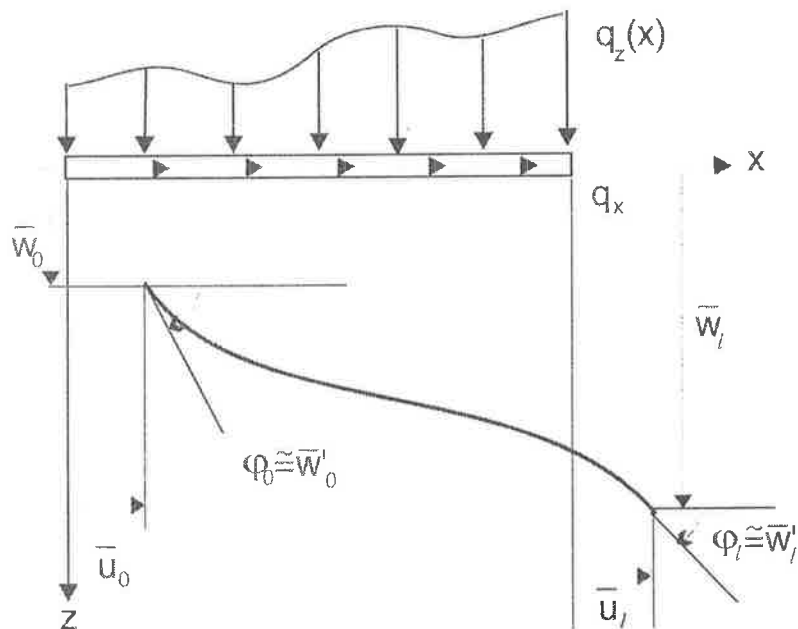


Figura 1.1:

Isolando-se um elemento de comprimento infinitesimal e impondo-se equilíbrio entre esforços solicitantes e carregamentos, tem-se a situação indicada na figura 1.2.

Do equilíbrio de forças na direção longitudinal, vem:

$$\frac{dN}{dx} = -q_x. \quad (1.1)$$

Do equilíbrio de forças na direção transversal, vem:

$$\frac{dV}{dx} = -q_z. \quad (1.2)$$

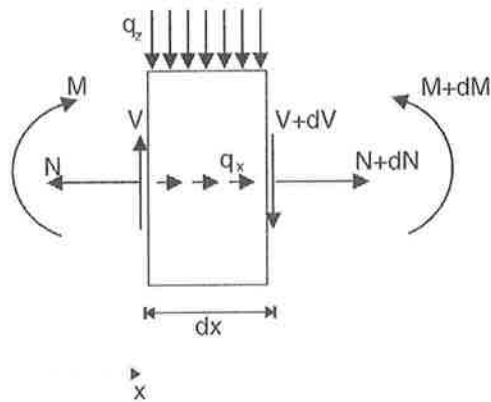


Figura 1.2:

Do equilíbrio de momentos, vem:

$$\frac{dM}{dx} = V. \quad (1.3)$$

Combinando-se (1.2) e (1.3), resulta:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q_z. \quad (1.4)$$

Estuda-se, agora, a relação entre deslocamentos e deformação longitudinal. Tome-se, para isto, a figura 1.3 que indica os deslocamentos ( $u, w$ ) de um ponto P genérico, da seção S, que na barra deformada corresponde ao ponto P', da seção S', supondo válida a hipótese de Navier.

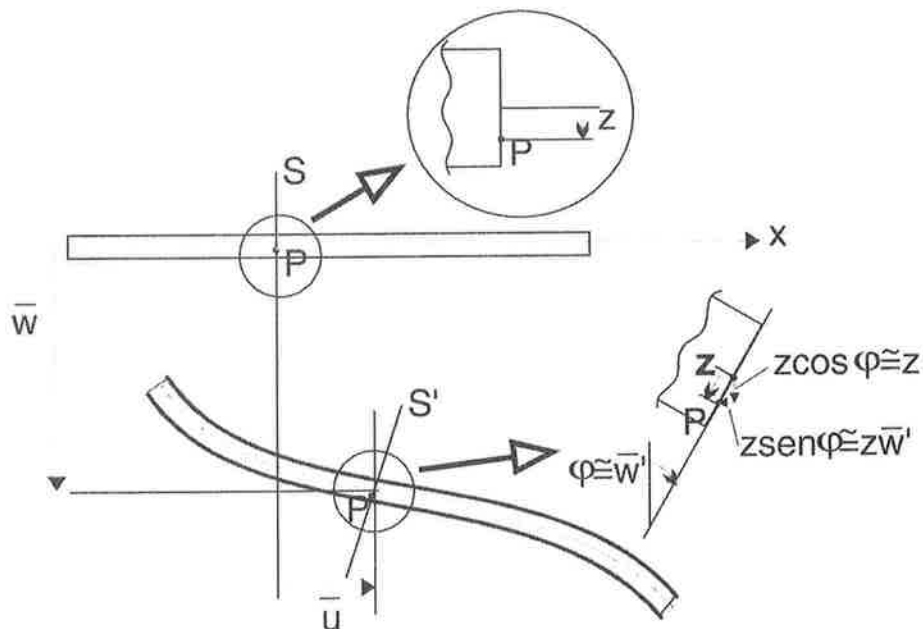


Figura 1.3:

Designando por  $\bar{u}$  e  $\bar{w}$  os deslocamentos do baricentro da seção S, os deslocamentos do ponto P serão:

$$u = \bar{u} - z\bar{w}' \quad (1.5)$$

$$w = \bar{w}. \quad (1.6)$$

Recorda-se a definição de deslocamento longitudinal

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = u' \quad (1.7)$$

para se escrever, a partir de (1.5), para a deformação de uma fibra infinitesimal em P:

$$\varepsilon = \bar{u}' - z\bar{w}'' \quad (1.8)$$

Esta expressão traduz a lei de Navier (distribuição plana para  $\varepsilon$ )

Para elasticidade linear, a Lei de Hooke estabelece a relação entre tensão e deformação:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.9)$$

sendo E o módulo de elasticidade longitudinal e  $\sigma$  a tensão normal. Considerando-se (1.8) em (1.9), chega-se a:

$$\sigma = E\bar{u}' - zE\bar{w}'' \quad (1.10)$$

que traduz a lei de Bernoulli (distribuição plana de tensões).

Recordando-se, agora, algumas relações entre esforços solicitantes e tensões, e respeitando-se a convenção clássica de sinais:

$$N = \int_A \sigma dA \quad (1.11)$$

$$M = \int_A \sigma z dA. \quad (1.12)$$

Considerando-se (1.10), obtêm-se:

$$N = EA\bar{u}' \quad (1.13)$$

$$M = -EI\bar{w}'' \quad (1.14)$$

A força cortante pode ser calculada usando-se (1.3) e (1.14):

$$V = -EI\bar{w}''' \quad (1.15)$$

De (1.1) e (1.13), obtêm-se a equação que permite determinar os deslocamentos longitudinais por integração:

$$\bar{u}'' = \frac{1}{EA} \frac{dN}{dx} = -\frac{q_x}{EA} \quad (1.16)$$

e, de (1.4) e (1.14), a que permite determinar os deslocamentos transversais por integração:

$$\bar{w}^{IV} = -\frac{1}{EI} \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{q_z}{EI} \quad (1.17)$$

Note-se que o problema da determinação do campo de deslocamentos é desacoplado.

- Para o que se segue, tem-se particular interesse na solução do problema com deslocamentos impostos nas extremidades da barra, porém sem carregamentos ( $q_x = 0$  e  $q_z = 0$ ), ou seja:

de (1.16)

$$\bar{u}'' = 0 \quad (1.18)$$

e de (1.17):

$$\bar{w}^{IV} = 0 \quad (1.19)$$

A solução de (1.18), já impondo respeito às condições de contorno da extremidade, pode ser escrita na forma:

$$\bar{u} = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \bar{u}_0 + \frac{x}{l} \bar{u}_l = h_1(x) \bar{u}_0 + h_4(x) \bar{u}_l. \quad (1.20)$$

As funções

$$h_1(x) = 1 - \frac{x}{l} \quad (1.21)$$

$$h_4(x) = \frac{x}{l} \quad (1.22)$$

permitem determinar, por interpolação, mas de forma exata, o deslocamento  $\bar{u}$  em uma seção genérica, uma vez conhecidos os deslocamentos nas extremidades  $\bar{u}_0$  e  $\bar{u}_l$ . Note-se que a força normal também pode ser calculada facilmente a partir de (1.13):

$$N = EA [h_1'(x) \bar{u}_0 + h_4'(x) \bar{u}_l] = (\bar{u}_l - \bar{u}_0) \frac{EA}{l} = \text{constante}. \quad (1.23)$$

A solução de (1.19), já impondo respeito às condições de extremidade, pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \left(\frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1\right) \bar{w}_0 + \left(-\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2}\right) \bar{w}_l + \\ &+ \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x\right) \bar{w}'_0 + \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}\right) \bar{w}'_l \\ &= h_2(x) \bar{w}_0 + h_5(x) \bar{w}_l + h_3(x) \bar{w}'_0 + h_6(x) \bar{w}'_l. \end{aligned} \quad (1.24)$$

As funções:

$$h_2(x) = \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1 \quad (1.25)$$

$$h_3(x) = \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x \quad (1.26)$$

$$h_5(x) = -\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2} \quad (1.27)$$

$$h_6(x) = \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \quad (1.28)$$

permitem determinar, por interpolação, mas de forma exata, o deslocamento  $\bar{w}$  em uma seção genérica, uma vez conhecidos os deslocamentos nas extremidades  $\bar{w}_0$ ,  $\bar{w}_l$ ,  $\bar{w}'_0$  e  $\bar{w}'_l$ .

Note-se que o momento fletor e a força cortante também podem ser calculados facilmente a partir de (1.14) e (1.15):

$$M = -EI [h''_2(x)\bar{w}_0 + h''_5(x)\bar{w}_l + h''_3(x)\bar{w}'_0 + h''_6(x)\bar{w}'_l] \quad (1.29)$$

$$V = -EI [h'''_2(x)\bar{w}_0 + h'''_5(x)\bar{w}_l + h'''_3(x)\bar{w}'_0 + h'''_6(x)\bar{w}'_l] \quad (1.30)$$

Em particular, nas extremidades, obtêm-se os valores:

$$M_0 = -\frac{6EI}{l^2} (\bar{w}_l - \bar{w}_0) + \frac{2EI}{l} (2\bar{w}'_0 + \bar{w}'_l) \quad (1.31)$$

$$M_l = \frac{6EI}{l^2} (\bar{w}_l - \bar{w}_0) - \frac{2EI}{l} (\bar{w}'_0 + 2\bar{w}'_l) \quad (1.32)$$

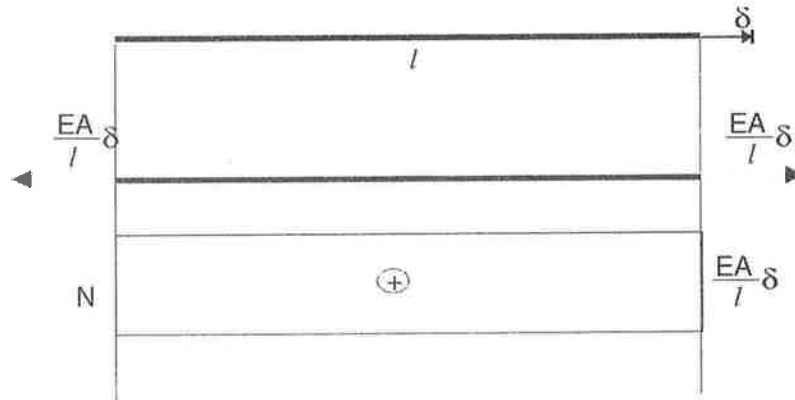
$$V_0 = V_l = -\frac{12EI}{l^3} (\bar{w}_0 - \bar{w}_l) - \frac{6EI}{l^2} (\bar{w}'_0 + \bar{w}'_l) \quad (1.33)$$

A título de ilustração, considerem-se os exemplos:

**Exemplo:** Barra deformada axialmente:

$$\bar{u}_0 = 0; \bar{w}_0 = 0; \bar{w}'_0 = 0$$

$$\bar{u}_l = \delta; \bar{w}_l = 0; \bar{w}'_l = 0$$



$$\bar{u} = h_4(x)\bar{u}_l = \frac{x}{l}\delta$$

$$\bar{w} = 0$$

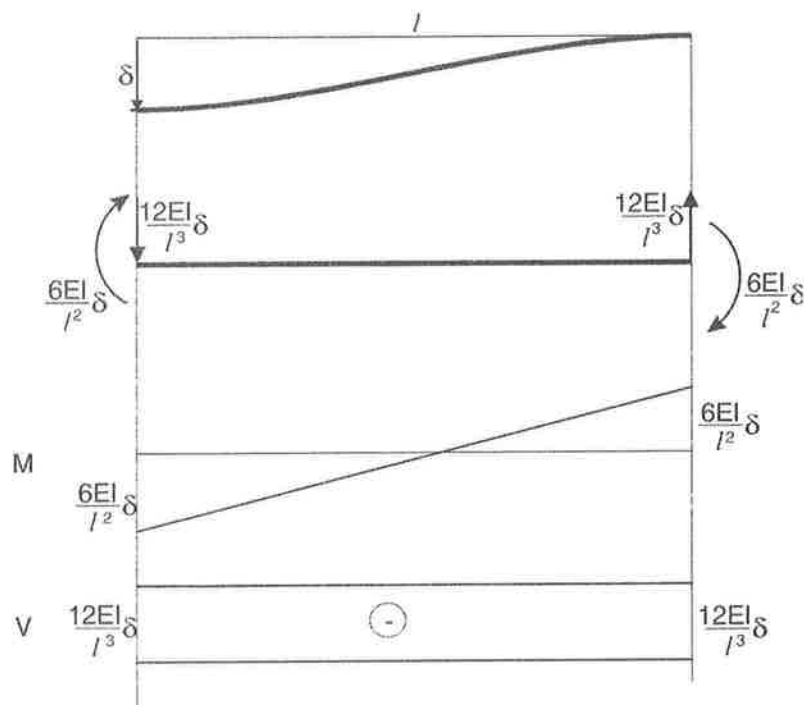
$$N_0 = N_l = EA h'_4(x)\bar{u}_l = \frac{EA}{l}\delta$$



**Exemplo:** Barra bi-engastada com recalque linear

$$\bar{u}_0 = 0; \bar{w}_0 = \delta; \bar{w}'_0 = 0$$

$$\bar{u}_l = 0; \bar{w}_l = 0; \bar{w}'_l = 0$$



$$\bar{u} = 0$$

$$\bar{w} = h_2(x)\bar{w}_0 = \left( \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1 \right) \delta$$

$$N_0 = N_l = 0$$

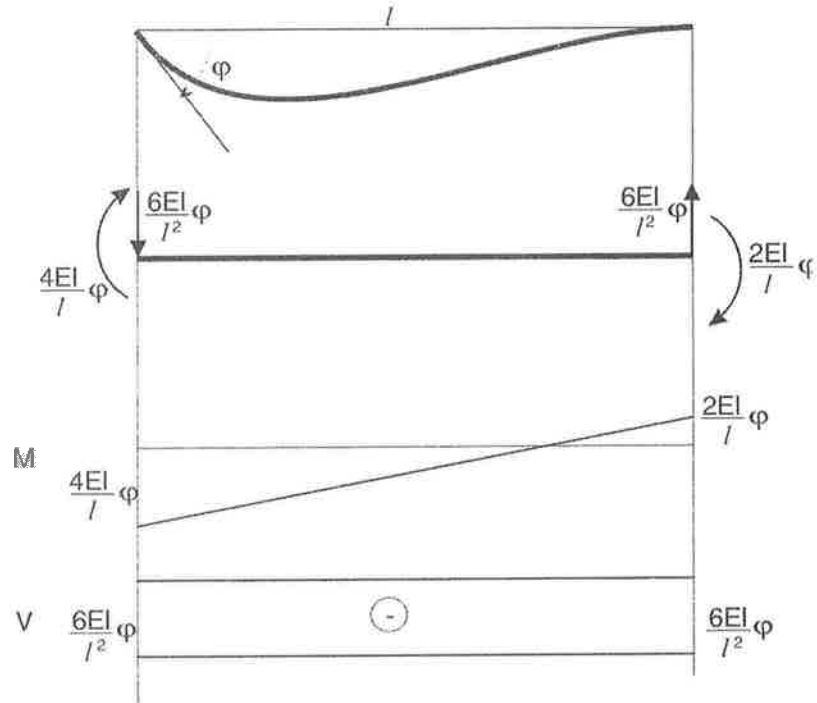
$$M_0 = -M_l = \frac{6EI}{l^2} \delta$$

$$V_0 = V_l = -\frac{12EI}{l^3} \delta$$

**Exemplo:** Barra bi-engastada com recalque angular

$$\bar{u}_0 = 0; \bar{w}_0 = 0; \bar{w}'_0 = \varphi$$

$$\bar{u}_l = 0; \bar{w}_l = 0; \bar{w}'_l = 0$$



$$\bar{u} = 0$$

$$\bar{w} = h_3(x)\bar{w}'_0 = \left( \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x \right) \varphi$$

$$N_0 = N_l = 0$$

$$M_0 = \frac{4EI}{l} \varphi$$

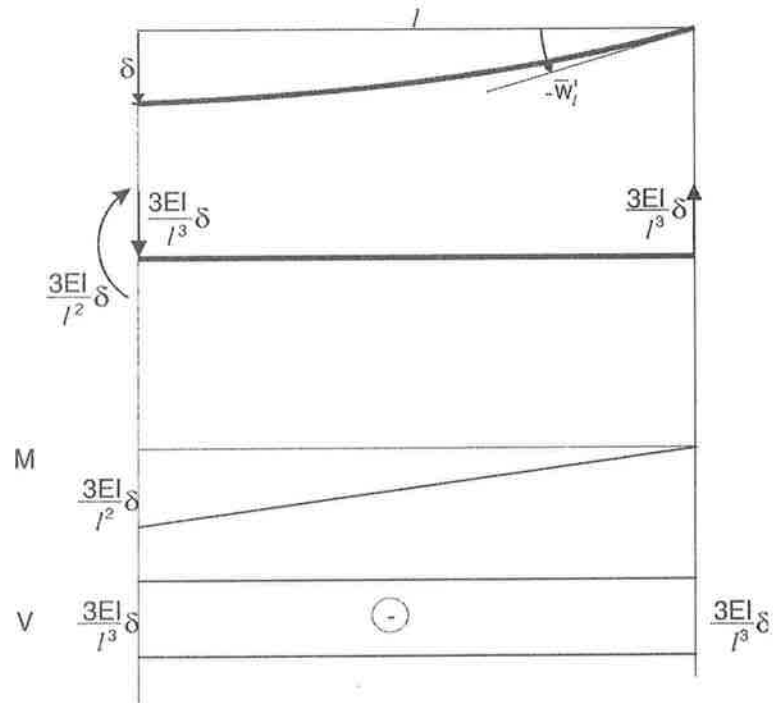
$$M_l = -\frac{2EI}{l} \varphi$$

$$V_0 = V_l = -\frac{6EI}{l^2} \varphi$$

**Exemplo:** Barra engastada-apoiada com recalque linear

$$\bar{u}_0 = 0; \bar{w}_0 = \delta; \bar{w}'_0 = 0$$

$$\bar{u}_l = 0; \bar{w}_l = 0; \bar{w}'_l = ? \text{ (Note-se, porém, que } \bar{w}''_l = 0, \text{ pois } M_l = 0)$$



$$\bar{u} = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{w} &= h_2(l)\bar{w}_0 + h_6(l)\bar{w}'_l \\ \text{mas } \bar{w}''_l &= 0 = h_2''(l)\bar{w}_0 + h_6''(l)\bar{w}'_l \\ \text{de onde } \bar{w}'_l &= -\frac{3\bar{w}_0}{2l} \\ \text{logo } \bar{w} &= \left[ h_2(x) - \frac{3}{2l}h_6(x) \right] \bar{w}_0 \\ \text{ou } \bar{w} &= \left( \frac{x^3}{2l^3} - \frac{3x^2}{2l^2} + 1 \right) \delta \end{aligned}$$

$$M_0 = \frac{3EI}{l^2} \delta$$

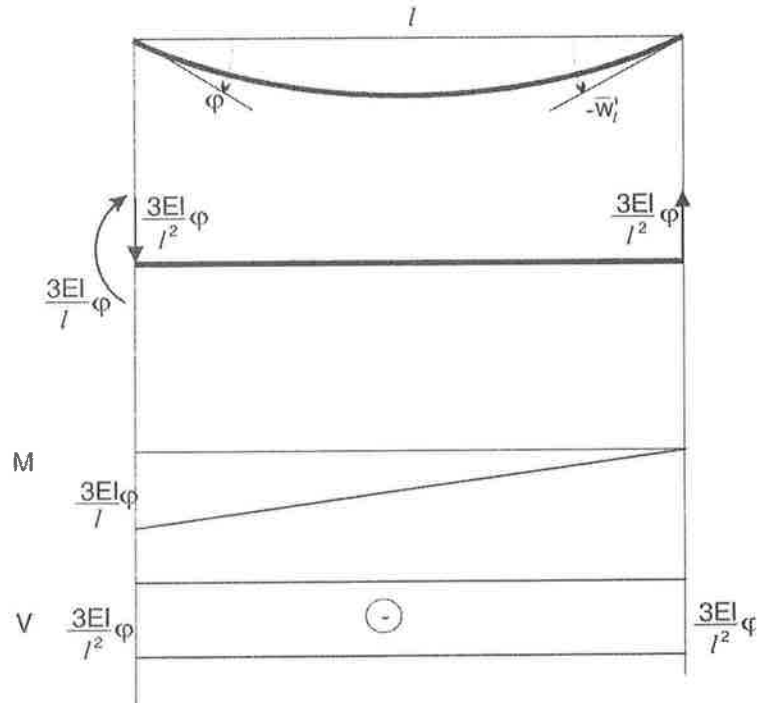
$$M_l = 0$$

$$V_0 = V_l = -\frac{3EI}{l^3} \delta$$

**Exemplo:** Barra engastada-apoiada com recalque angular

$$\bar{u}'_0 = 0; \bar{w}_0 = 0; \bar{w}'_0 = \varphi$$

$$\bar{u}'_l = 0; \bar{w}_l = 0; \bar{w}'_l = ? \quad (\text{Note-se, por\u00e9m, que } \bar{w}''_l = 0, \text{ pois } M_l = 0)$$



$$\bar{u} = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{w} &= h_3(x)\bar{w}'_0 + h_6(x)\bar{w}'_l \\ \text{mas } \bar{w}''_l &= 0 = h''_3(l)\bar{w}'_0 + h''_6(l)\bar{w}'_l \\ \text{de onde } \bar{w}'_l &= -\frac{1}{2}\bar{w}'_0 \\ \text{logo } \bar{w} &= \left[ h_3(x) - \frac{1}{2}h_6(x) \right] \bar{w}'_0 \\ \text{ou } \bar{w} &= \left( \frac{x^3}{2\ell^2} - \frac{3x^2}{2\ell} + x \right) \varphi \end{aligned}$$

$$M_0 = \frac{3EI}{l} \varphi$$

$$M_l = 0$$

$$V_0 = V_l = -\frac{3EI}{l^2} \varphi$$

- Seja agora o problema de determinação dos esforços de engastamento perfeito para  $q_z = \text{constante} = q$  e  $q_x = 0$ . Por integração de (1.17), pode-se mostrar que:

$$\bar{w} = \frac{qx^4}{24EI} + h_2(x)\bar{w}_0 + h_5(x) \left( \bar{w}_l - \frac{ql^4}{24EI} \right) + h_3(x)\bar{w}'_0 + h_6(x) \left( \bar{w}'_l - \frac{ql^3}{6EI} \right)$$

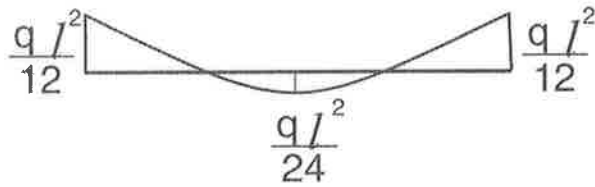
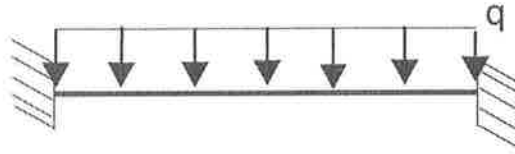
$$\bar{w}'' = \frac{qx^2}{2EI} + h''_2(x)\bar{w}_0 + h''_5(x) \left( \bar{w}_l - \frac{ql^4}{24EI} \right) + h''_3(x)\bar{w}'_0 + h''_6(x) \left( \bar{w}'_l - \frac{ql^3}{6EI} \right)$$

$$\bar{w}''' = \frac{qx}{EI} + h'''_2(x)\bar{w}_0 + h'''_5(x) \left( \bar{w}_l - \frac{ql^4}{24EI} \right) + h'''_3(x)\bar{w}'_0 + h'''_6(x) \left( \bar{w}'_l - \frac{ql^3}{6EI} \right)$$

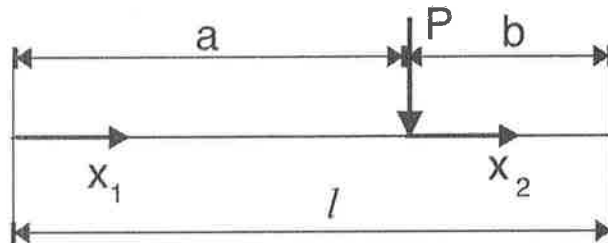
**Exemplo:** Barra bi-engastada com carga uniformemente distribuída ( $\bar{w}_0 = \bar{w}_l = 0$  e  $\bar{w}'_0 = \bar{w}'_l = 0$ )

$$M = -EI\bar{w}'' = -\frac{qx^2}{2} + \frac{ql^4}{24}h''_5(x) + \frac{ql^3}{6}h''_6(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qlx}{2} - \frac{ql^2}{12}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = -EI\bar{w}''' = -qx + \frac{ql}{2}$$



- Seja, agora, a solução para  $q_x = 0$ ,  $q_x = 0$  e carga concentrada:



$$\bar{w}_1 = h_2^a(x_1)\bar{w}_0 + h_5^a(x_1)\bar{w}_a + h_3^a(x_1)\bar{w}'_0 + h_6^a(x_1)\bar{w}'_a \quad 0 \leq x_1 \leq a$$

$$\bar{w}_2 = h_2^b(x_2)\bar{w}_a + h_5^b(x_2)\bar{w}_l + h_3^b(x_2)\bar{w}'_a + h_6^b(x_2)\bar{w}'_l \quad 0 \leq x_2 \leq b$$

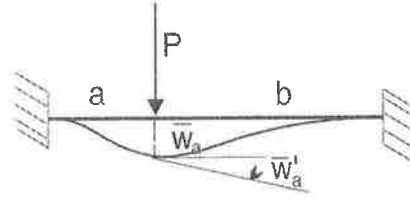
onde  $h_i^a(x_1)$  é a função  $h_i(x_1)$  para  $l = a$  e analogamente para  $h_i^b(x_2)$ .

Observe que as relações  $\bar{w}_1(a) = \bar{w}_2(0)$  e  $\bar{w}'_1(a) = \bar{w}'_2(0)$  são obedecidas automaticamente.

As seguintes condições estáticas de contorno devem ser obedecidas:

$$\begin{aligned} \bar{w}_1''(a) &= \bar{w}_2''(0) \\ -EI\bar{w}_1'''(a) + EI\bar{w}_2'''(0) &= P \end{aligned}$$

**Exemplo:** Barra bi-engastada com carga concentrada ( $\bar{w}_0 = \bar{w}_l = 0; \bar{w}'_0 = \bar{w}'_l = 0$ )



Impondo-se as condições estáticas, vem:

$$\bar{w}_a = \frac{Pa^3b^3}{3EI l^3}$$

e

$$\bar{w}'_a = -\frac{Pa^2b^2(a-b)}{2EI l^3}$$

sendo  $l = a + b$ . Decorre daí que:

$$M_0 = -EI(h_5^a)''(0)\bar{w}_a - EI(h_6^a)''(0)\bar{w}'_a = -\frac{Pab^2}{l^2}$$

$$M_l = -EI(h_2^b)''(b)\bar{w}_a - EI(h_3^b)''(b)\bar{w}'_a = -\frac{Pa^2b}{l^2}$$

$$V_0 = -EI(h_5^a)'''(0)\bar{w}_a - EI(h_6^a)'''(0)\bar{w}'_a = \frac{Pb^2(l+2a)}{l^3}$$

$$V_l = -EI(h_2^b)'''(b)\bar{w}_a - EI(h_3^b)'''(b)\bar{w}'_a = -\frac{Pa^2(l+2b)}{l^3}$$

A Tabela 1.1 apresenta alguns resultados para os esforços nas extremidades de vigas prismáticas simples e hiperestáticas, os quais podem ser obtidos tanto pelo procedimento apresentado (método dos deslocamentos), quanto por procedimentos baseados no método dos esforços.

$M_A = -\frac{ql^2}{12} \quad M_B = -\frac{ql^2}{12}$ $V_A = \frac{ql}{2} \quad V_B = -\frac{ql}{2}$	$M_A = -\frac{ql^2}{8} \quad M_B = 0$ $V_A = \frac{5ql}{8} \quad V_B = -\frac{3ql}{8}$
$M_A = -\frac{Pl}{8} \quad M_B = -\frac{Pl}{8}$ $V_A = \frac{P}{2} \quad V_B = -\frac{P}{2}$	$M_A = -\frac{3Pl}{16} \quad M_B = 0$ $V_A = \frac{11P}{16} \quad V_B = -\frac{5P}{16}$

Tabela 1.1:

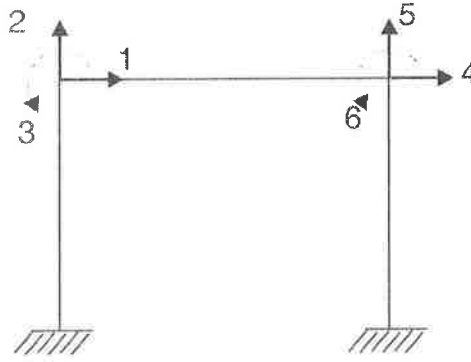


Figura 1.4: Numeração dos graus de liberdade nodais de uma estrutura.

## 1.2 Conceituação

Tomemos como exemplo a estrutura ilustrada na figura 1.4, numerando seus graus de liberdade nodais, ou seja, os deslocamentos nodais não restritos por vínculos.

Vamos representar os **esforços externos**, aplicados aos nós desta estrutura em cada uma das direções numeradas, pelo vetor

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

Da mesma forma, denotaremos os **deslocamentos** que ocorrerem nestas direções pelo vetor

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

Com base nos conceitos de Resistência dos Materiais, podemos procurar estabelecer uma relação entre estes dois vetores, ou seja, calcular quais são os deslocamentos  $\{U\}$  decorrentes de carregamentos nodais  $\{R\}$  fornecidos.

Suponha que os carregamentos resumam-se a um único esforço  $R_1$ , aplicado segundo o grau de liberdade 1. Considerando a proporcionalidade direta entre esforços e deslocamentos, podemos calcular o deslocamento que ocorre segundo este mesmo grau de liberdade como

$$U_1 = L_{11}R_1$$

onde  $L_{11}$  é um coeficiente de proporcionalidade a ser determinado, que expressa a relação entre esforço e deslocamento no grau de liberdade 1. Se, ao invés de  $R_1$ , for aplicado um esforço  $R_2$ , segundo o grau de liberdade 2, a equação seria

$$U_1 = L_{12}R_2$$

onde  $L_{12}$  representa o coeficiente de proporcionalidade entre esforço segundo o grau de liberdade 2 e deslocamento segundo 1. Lembrando que em teoria linear vale a superposição

de efeitos, para o caso de co-existirem todos os esforços  $R_1$  a  $R_6$ , o deslocamento segundo o grau de liberdade 1 resultaria

$$U_1 = L_{11}R_1 + L_{12}R_2 + L_{13}R_3 + \dots + L_{16}R_6$$

onde  $L_{ij}$  são os coeficientes de proporcionalidade entre os deslocamentos e os esforços, ou seja,  $L_{ij}$  é o deslocamento que ocorre segundo o grau de liberdade  $i$  se, segundo  $j$ , for aplicado um esforço unitário e, nos demais, esforço nulo.

Esta equação, se escrita para cada um dos deslocamentos, resulta em um sistema linear que pode ser representado pela equação matricial

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} & L_{16} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} & L_{26} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} & L_{36} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} & L_{46} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} & L_{56} \\ L_{61} & L_{62} & L_{63} & L_{64} & L_{65} & L_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}$$

ou simplesmente

$$\{U\} = [L]\{R\}$$

onde  $[L]$  é a **Matriz de Flexibilidade** da estrutura.

Esta matriz, para sistemas estruturais não hipostáticos, tem determinante não nulo e pode ser invertida resultando na matriz  $[L]^{-1}$ . Se multiplicarmos ambos os lados da equação matricial acima por esta matriz inversa, obteremos

$$[L]^{-1}\{U\} = [L]^{-1}[L]\{R\} = [I]\{R\} = \{R\}$$

Vamos designar  $[L]^{-1}$  por  $[K]$ , e reescrever a equação:

$$\{R\} = [K]\{U\}$$

Esta é a equação básica da Análise Matricial de Estruturas. A matriz  $[K]$  é chamada de **Matriz de Rigidez** da estrutura, e aqui ela se encontra na sua forma reduzida<sup>1</sup>. Seus termos são de fácil interpretação física: o termo  $K_{ij}$  da matriz de rigidez é o esforço necessário segundo  $i$  para que, segundo  $j$ , apareça um deslocamento unitário, sendo os demais deslocamentos nulos. Uma coluna  $j$  desta matriz representa, portanto, o conjunto de esforços para que, segundo  $j$ , haja um deslocamento unitário, permanecendo os demais deslocamentos nulos.

É interessante notar que a matriz  $[K]$  resulta simétrica. Este fato pode ser demonstrado com o auxílio do Teorema de Betti-Maxwell, que será apresentado no curso de **Mecânica das Estruturas II**.

Esta equação é mais interessante que a equação com a matriz  $[L]$  no cálculo da estrutura, pois a obtenção dos elementos da matriz  $[K]$  depende apenas da análise de **vigas simples hiperestáticas**, enquanto que para a obtenção dos elementos da matriz  $[L]$  é necessário resolver toda a estrutura várias vezes (a coluna  $j$  da matriz  $[L]$  é o campo de deslocamentos decorrente da aplicação de um esforço unitário segundo o grau de liberdade  $j$ , sendo nulos os demais esforços nodais).

Com esta equação, porém, obtemos apenas parte dos resultados normalmente esperados de uma análise estrutural. Além dos deslocamentos nodais, é comum se necessitar ainda

<sup>1</sup>Veja item 1.4 para a matriz completa



dos esforços solicitantes nas barras. Para tanto, também podemos utilizar esta formulação matricial.

Sabendo que os deslocamentos calculados nos nós valem também para as extremidades de barra, podemos simplesmente formular o equilíbrio de cada barra independentemente. Precisamos para isto calcular uma **Matriz de Rigidez da Barra**. O vetor dos deslocamentos das extremidades de barra é extraído diretamente do vetor  $\{U\}$  da estrutura, e o vetor dos esforços nas extremidades de barra é nossa incógnita. Destes esforços decorrem os esforços solicitantes, completando com isso a análise estrutural.

Para o equacionamento das barras independentemente, usa-se, para a barra ( $m$ ), a notação  $\{f^{(m)}\}$  para os esforços nas extremidades de barra,  $\{u^{(m)}\}$  para os deslocamentos, e  $[k^{(m)}]$  para sua matriz de rigidez. Como toda barra tem duas extremidades, com três deslocabilidades em cada nó, o sistema resulta de ordem  $6 \times 6$ .

Com esta breve conceituação, já é possível resolver um exemplo, que ajuda a ilustrar o exposto.

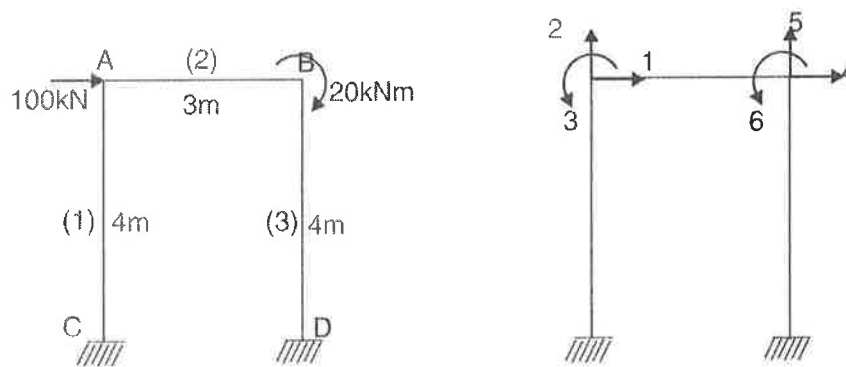


Figura 1.5: Geometria e numeração dos graus de liberdade nodais de uma estrutura.

### 1.3 Exemplo: Pórtico plano com carregamentos nodais

Resolva a estrutura da figura 1.5, utilizando os conceitos apresentados acima.

Dados do problema:  $E_1 A_1 = E_2 A_2 = E_3 A_3 = 300000 \text{ kN}$

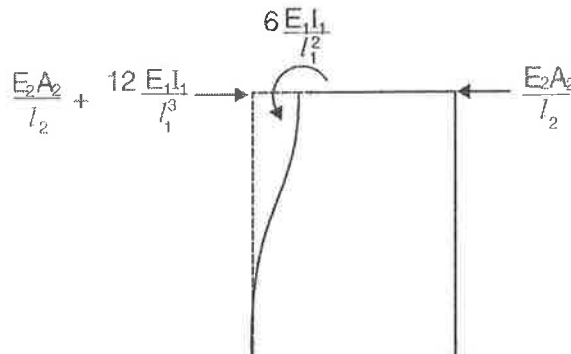
$$E_1 I_1 = E_2 I_2 = E_3 I_3 = 32400 \text{ kNm}^2$$

$$l_1 = l_3 = 4 \text{ m}$$

$$l_2 = 3 \text{ m}$$

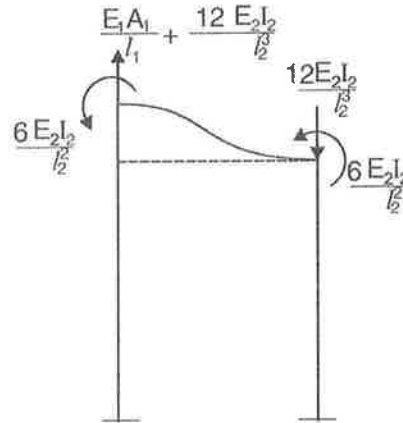
$$R_1 \cancel{P_1} = 100 \text{ kN}$$

$$R_6 \cancel{P_6} = -20 \text{ kNm}$$



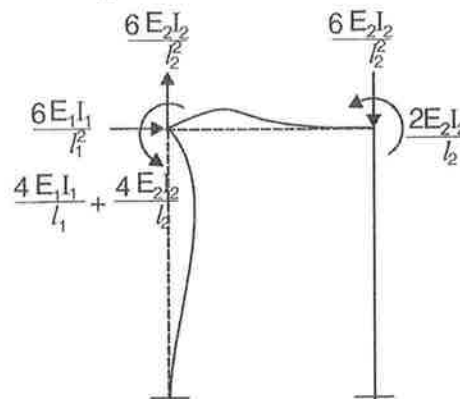
$$\{K_{i1}\} = \begin{Bmatrix} \frac{E_2 A_2}{l_2} + \frac{12 E_1 L_1}{l_1^3} \\ 0 \\ \frac{6 E_1 L_1}{l_1^2} \\ -\frac{E_2 A_2}{l_2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 106075 \\ 0 \\ 12500 \\ -100000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 1.1: 1ª coluna da matriz de rigidez da estrutura. Seus valores são numericamente iguais aos esforços necessários segundo os seis graus de liberdade para manter a configuração ilustrada, com deslocamento unitário segundo o grau de liberdade 1 e nulo nos demais.



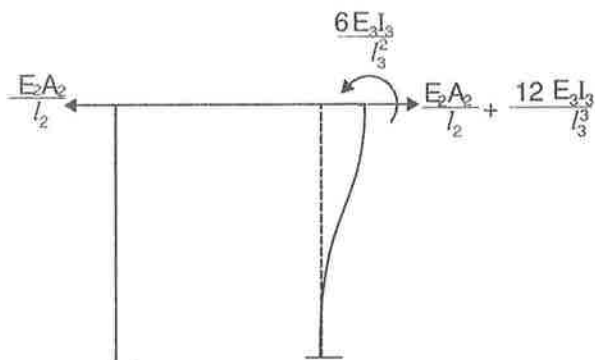
$$\{K_{i2}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{E_1 A_1}{l_1} + \frac{12 E_2 I_2}{l_2^3} \\ \frac{6 E_2 I_2}{l_2^2} \\ 0 \\ -\frac{12 E_2 I_2}{l_2^3} \\ \frac{6 E_2 I_2}{l_2^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 89400 \\ 21600 \\ 0 \\ -14400 \\ 21600 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 1.2: 2ª coluna da matriz de rigidez.



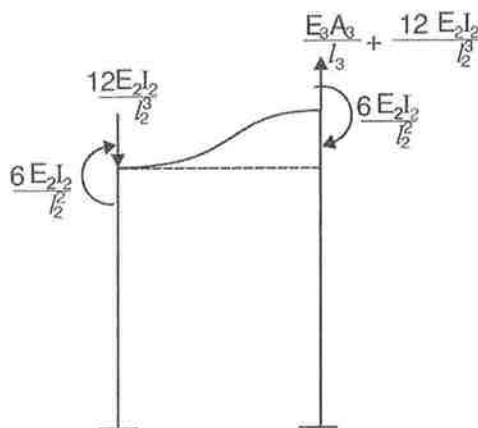
$$\{K_{i3}\} = \begin{Bmatrix} \frac{6 E_1 I_1}{l_1^2} \\ \frac{6 E_2 I_2}{l_2^2} \\ \frac{4 E_1 I_1}{l_1} + \frac{4 E_2 I_2}{l_2} \\ 0 \\ -\frac{6 E_2 I_2}{l_2^2} \\ \frac{2 E_2 I_2}{l_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12150 \\ 21600 \\ 75600 \\ 0 \\ -21600 \\ 21600 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 1.3: 3ª coluna da matriz de rigidez.



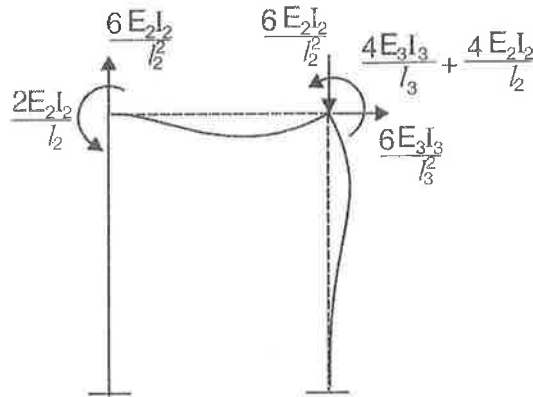
$$\{K_{i4}\} = \begin{Bmatrix} -\frac{E_2 A_2}{l_2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{12 E_3 I_3}{l_3^3} + \frac{E_2 A_2}{l_2} \\ 0 \\ \frac{6 E_3 I_3}{l_3^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100000 \\ 0 \\ 0 \\ 106075 \\ 0 \\ 12150 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 1.4: 4ª coluna da matriz de rigidez.



$$\{K_{i5}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{12 E_2 I_2}{l_2^3} \\ -\frac{6 E_2 I_2}{l_2^2} \\ 0 \\ \frac{E_3 A_3}{l_3} + \frac{12 E_2 I_2}{l_2^3} \\ -\frac{6 E_2 I_2}{l_2^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -14400 \\ -21600 \\ 0 \\ 89400 \\ -21600 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 1.5: 5ª coluna da matriz de rigidez.



$$\{K_{i6}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6E_2I_2}{l_2^2} \\ \frac{2E_2I_2}{l_2} \\ \frac{6E_3I_3}{l_3^2} \\ -\frac{6E_2I_2}{l_2^2} \\ \frac{4E_2I_2}{l_2} + \frac{4E_3I_3}{l_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 21600 \\ 21600 \\ 12150 \\ -21600 \\ 75600 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 1.6: 6ª coluna da matriz de rigidez.

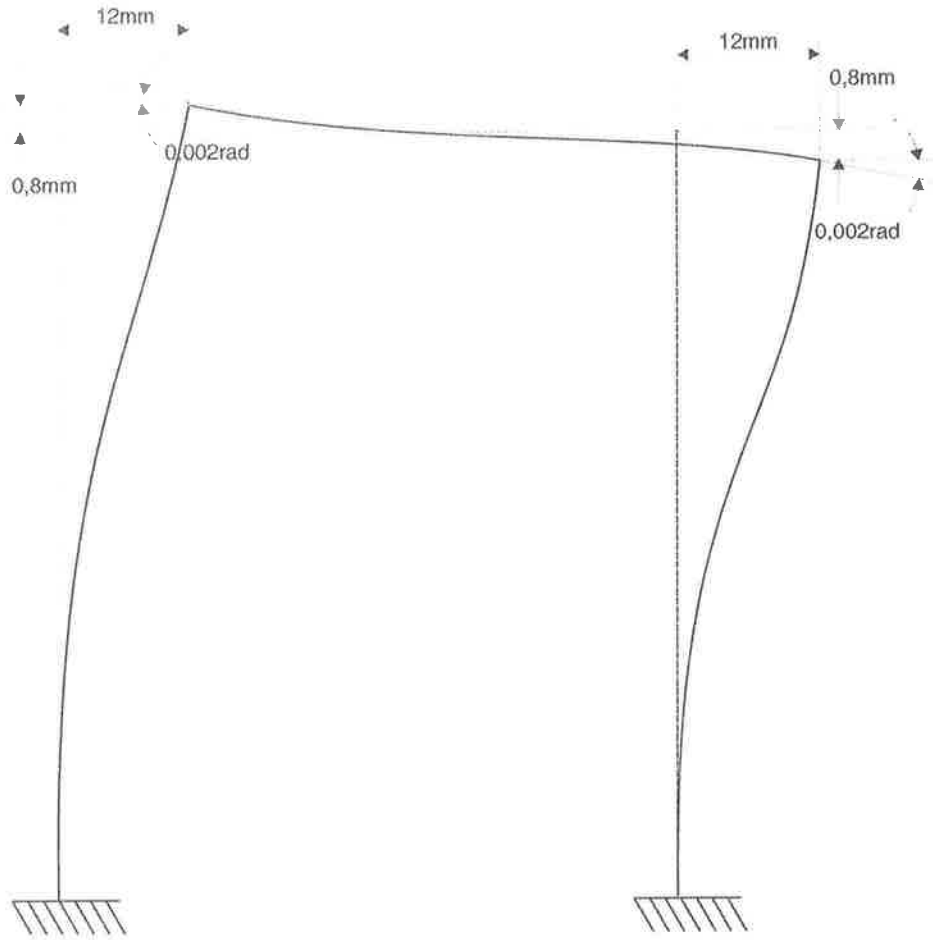
$$\begin{Bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 106075 & 0 & 12150 & -100000 & 0 & 0 \\ 0 & 89400 & 21600 & 0 & -14400 & 21600 \\ 12150 & 21600 & 75600 & 0 & -21600 & 21600 \\ -100000 & 0 & 0 & 106075 & 0 & 12150 \\ 0 & -14400 & -21600 & 0 & 89400 & -21600 \\ 0 & 21600 & 21600 & 12150 & -21600 & 75600 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 2: Sistema linear para cálculo dos deslocamentos.

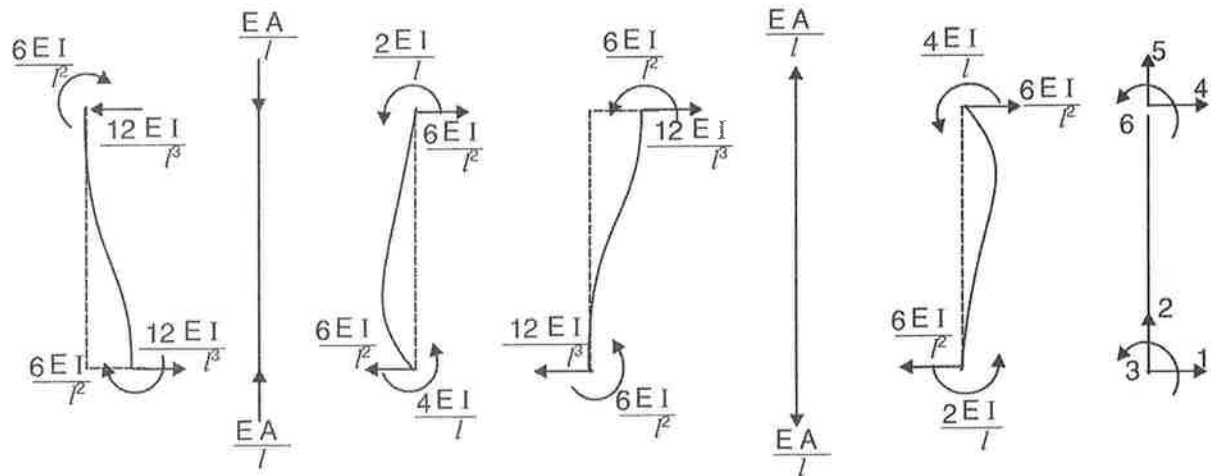
Nota: observe a simetria da matriz  $[K]$ , apesar de coeficientes em posições simétricas não serem obtidos de forma semelhante, por não terem o mesmo significado físico.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01247104723 \\ 0.000833570143 \\ -0.001870534688 \\ 0.01200139338 \\ -0.000833570143 \\ -0.002135232943 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 3: Solução do sistema. Como resultado, obtemos os deslocamentos nas seis direções, nas unidades coerentes com aquelas fornecidas na montagem de  $\{R\}$  e de  $[K]$ , ou seja, metros e radianos.



Ilustração, sem escala, do resultado obtido.



$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} \frac{12E_1 I_1}{l_1^3} & 0 & -\frac{6E_1 I_1}{l_1^2} & -\frac{12E_1 I_1}{l_1^3} & 0 & -\frac{6E_1 I_1}{l_1^2} \\ 0 & \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & 0 & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{6E_1 I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{4E_1 I_1}{l_1} & \frac{6E_1 I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{2E_1 I_1}{l_1} \\ -\frac{12E_1 I_1}{l_1^3} & 0 & \frac{6E_1 I_1}{l_1^2} & \frac{12E_1 I_1}{l_1^3} & 0 & \frac{6E_1 I_1}{l_1^2} \\ 0 & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & 0 & \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{6E_1 I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{2E_1 I_1}{l_1} & \frac{6E_1 I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{4E_1 I_1}{l_1} \end{bmatrix}$$

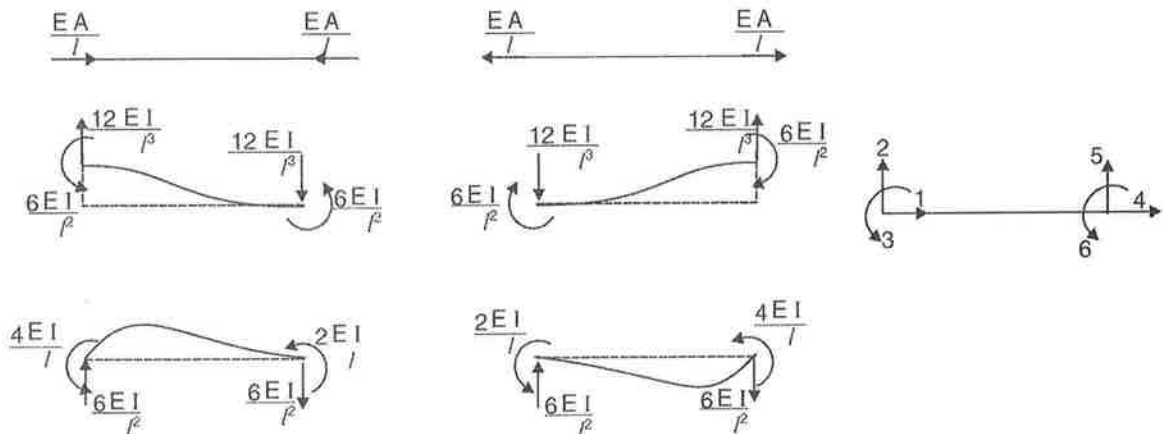
$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} 6075 & 0 & -12150 & -6075 & 0 & -12150 \\ 0 & 75000 & 0 & 0 & -75000 & 0 \\ -12150 & 0 & 32400 & 12150 & 0 & 16200 \\ -6075 & 0 & 12150 & 6075 & 0 & 12150 \\ 0 & -75000 & 0 & 0 & 75000 & 0 \\ -12150 & 0 & 16200 & 12150 & 0 & 32400 \end{bmatrix}$$

ETAPA 4.1: Montagem da matriz de rigidez da barra 1.



$$\{f^{(1)}\} = [k^{(1)}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.012471 \\ 0.000834 \\ -0.00187 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -53.03 \\ -62.52 \\ 121.20 \\ 53.03 \\ 62.52 \\ 90.92 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 5.1: Cálculo dos esforços nas extremidades da barra 1, em kN e kNm, segundo as seis direções definidas para a montagem de  $\{u^{(1)}\}$  e  $[k^{(1)}]$ .



$$[k^{(2)}] = \begin{bmatrix} \frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 & 0 & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_2 I_2}{l_2^3} & \frac{6E_2 I_2}{l_2^2} & 0 & -\frac{12E_2 I_2}{l_2^3} & \frac{6E_2 I_2}{l_2^2} \\ 0 & \frac{6E_2 I_2}{l_2^2} & \frac{4E_2 I_2}{l_2} & 0 & -\frac{6E_2 I_2}{l_2^2} & \frac{2E_2 I_2}{l_2} \\ -\frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 & 0 & \frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_2 I_2}{l_2^3} & -\frac{6E_2 I_2}{l_2^2} & 0 & \frac{12E_2 I_2}{l_2^3} & -\frac{6E_2 I_2}{l_2^2} \\ 0 & \frac{6E_2 I_2}{l_2^2} & \frac{2E_2 I_2}{l_2} & 0 & -\frac{6E_2 I_2}{l_2^2} & \frac{4E_2 I_2}{l_2} \end{bmatrix}$$

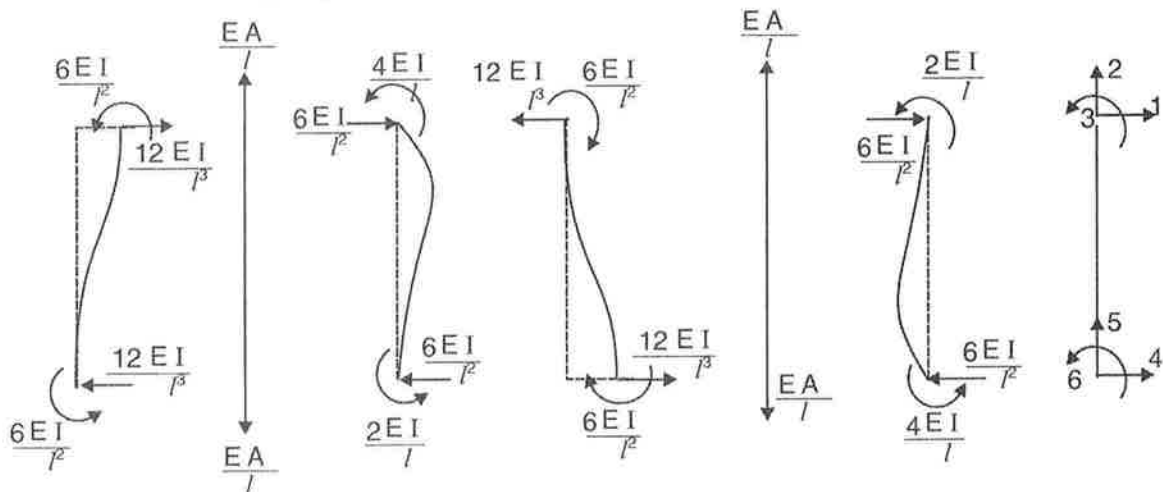
$$[k^{(2)}] = \begin{bmatrix} 100000 & 0 & 0 & -100000 & 0 & 0 \\ 0 & 14400 & 21600 & 0 & -14400 & 21600 \\ 0 & 21600 & 43200 & 0 & -21600 & 21600 \\ -100000 & 0 & 0 & 100000 & 0 & 0 \\ 0 & -14400 & -21600 & 0 & 14400 & -21600 \\ 0 & 21600 & 21600 & 0 & -21600 & 43200 \end{bmatrix}$$

ETAPA 4.2: Montagem da matriz de rigidez da barra 2.



$$\{f^{(2)}\} = [k^{(2)}] \begin{Bmatrix} .01247 \\ .000834 \\ -.00187 \\ .01200 \\ -.000834 \\ .002135 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 46.97 \\ -62.52 \\ -90.92 \\ -46.97 \\ 62.52 \\ -96.64 \end{Bmatrix}$$

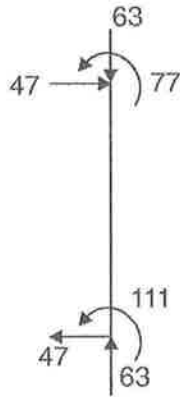
ETAPA 5.2: Cálculo de  $\{f^{(2)}\}$



$$[k^{(3)}] = \begin{bmatrix} \frac{12E_3I_3}{l_3^3} & 0 & \frac{6E_3I_3}{l_3^2} & -\frac{12E_3I_3}{l_3^3} & 0 & \frac{6E_3I_3}{l_3^2} \\ 0 & \frac{E_3A_3}{l_3} & 0 & 0 & -\frac{E_3A_3}{l_3} & 0 \\ \frac{6E_3I_3}{l_3^2} & 0 & \frac{4E_3I_3}{l_3} & -\frac{6E_3I_3}{l_3^2} & 0 & \frac{2E_3I_3}{l_3} \\ -\frac{12E_3I_3}{l_3^3} & 0 & -\frac{6E_3I_3}{l_3^2} & \frac{12E_3I_3}{l_3^3} & 0 & -\frac{6E_3I_3}{l_3^2} \\ 0 & -\frac{E_3A_3}{l_3} & 0 & 0 & \frac{E_3A_3}{l_3} & 0 \\ \frac{6E_3I_3}{l_3^2} & 0 & \frac{2E_3I_3}{l_3} & -\frac{6E_3I_3}{l_3^2} & 0 & \frac{4E_3I_3}{l_3} \end{bmatrix}$$

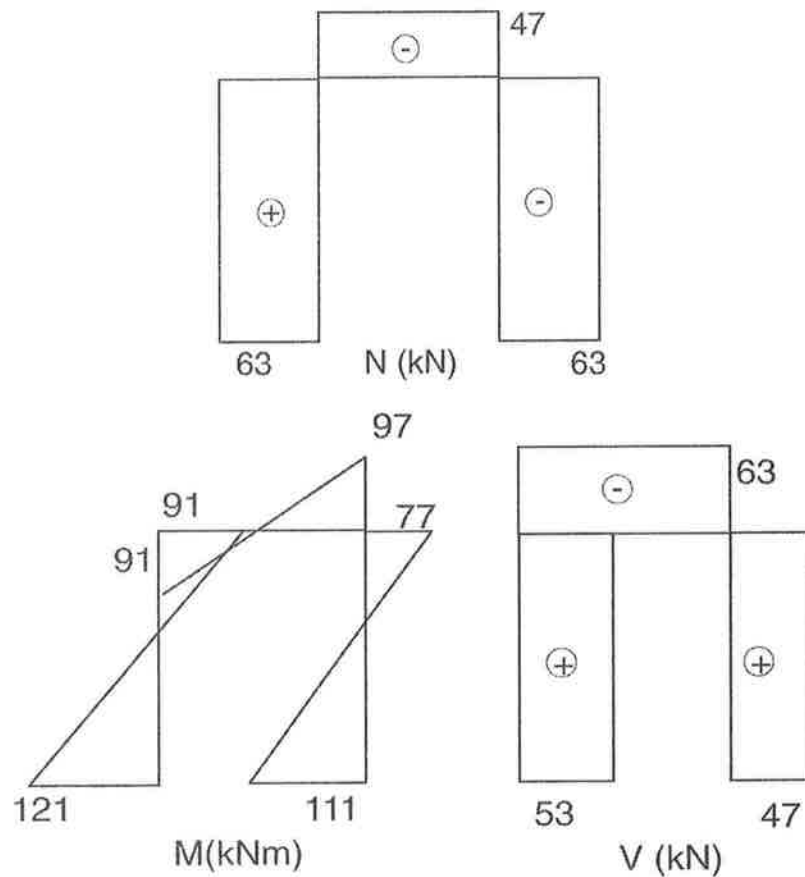
$$[k^{(3)}] = \begin{bmatrix} 6075 & 0 & 12150 & -6075 & 0 & 12150 \\ 0 & 75000 & 0 & 0 & -75000 & 0 \\ 12150 & 0 & 32400 & -12150 & 0 & 16200 \\ -6075 & 0 & -12150 & 6075 & 0 & -12150 \\ 0 & -75000 & 0 & 0 & 75000 & 0 \\ 12150 & 0 & 16200 & -12150 & 0 & 32400 \end{bmatrix}$$

ETAPA 4.3: Montagem da matriz de rigidez da barra 3.



$$\{f^{(3)}\} = [k^{(3)}] \begin{Bmatrix} 0.012001 \\ -0.000834 \\ -0.002135 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 46.97 \\ -62.52 \\ 76.64 \\ -46.97 \\ 62.52 \\ 111.23 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 5.3: Equacionamento para a barra 3



ETAPA 6: Diagramas de esforços solicitantes, como ilustração dos resultados obtidos.

## 1.4 Matriz de Rigidez da Barra Biengastada

Na organização da solução do problema acima, várias vezes raciocinou-se de forma física. Por exemplo, a matriz de rigidez da estrutura foi montada observando quais as barras que



concorrem em cada nó e qual a direção de cada uma delas, sem traduzir isto para algum algoritmo; e não utilizamos nenhuma regra automatizável para montar as matrizes de rigidez das barras ou os seus vetores de deslocamentos. É portanto necessário complementar a teoria básica exposta e ilustrada no exemplo, para que ela possa ser aplicada ao cálculo por computador.

Vamos inicialmente organizar a montagem das matrizes de rigidez das barras.

Observe a figura 1.6. Além da barra, encontram-se ali ilustrados dois sistemas de coordenadas para seus graus de liberdade. O primeiro, que foi definido para toda a estrutura da qual esta barra faz parte, será chamado de **sistema global**. O outro, que utiliza o eixo da própria barra como referência, é definido apenas para esta barra, e recebe por isso o nome de **sistema local**.

Conforme a teoria exposta até aqui, montaríamos a matriz de rigidez  $[k]$  desta barra desenhando as seis deformadas indicadas na figura 1.7, e calcularíamos seus coeficientes como sendo os esforços necessários para manter estas configurações em equilíbrio. Cada um destes esforços resultaria da decomposição de forças de extremidades de barra decorrentes de projeções de deslocamentos. Este processo de montagem da  $[k]$  é visivelmente trabalhoso.

Outra maneira de montar esta matriz, muito mais apropriada para ser automatizada, é apresentada a seguir.

Considere o sistema local para numerar seus graus de liberdade. Calcule a matriz de rigidez no sistema local, que receberá o nome de  $[\bar{k}]$ , conforme figura 1.8.

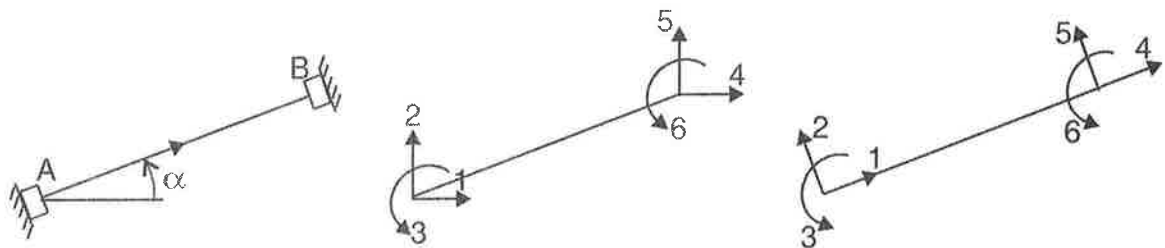


Figura 1.6: Barra inclinada, com seus graus de liberdade nodais numerados nos sistemas.

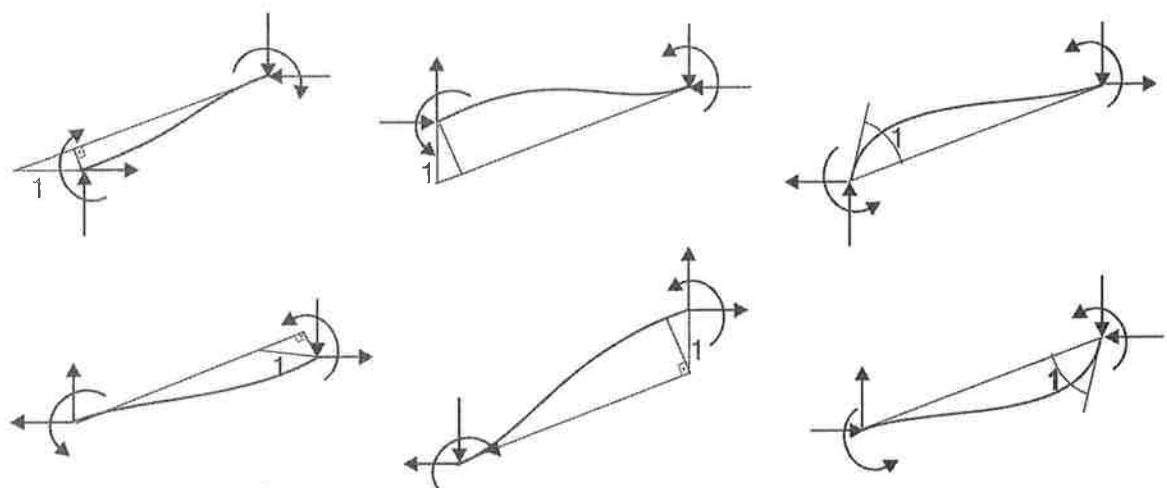


Figura 1.7: As seis deformadas que seria necessário considerar para montar a matriz de rigidez da barra inclinada da figura 1.6 diretamente no sistema global.

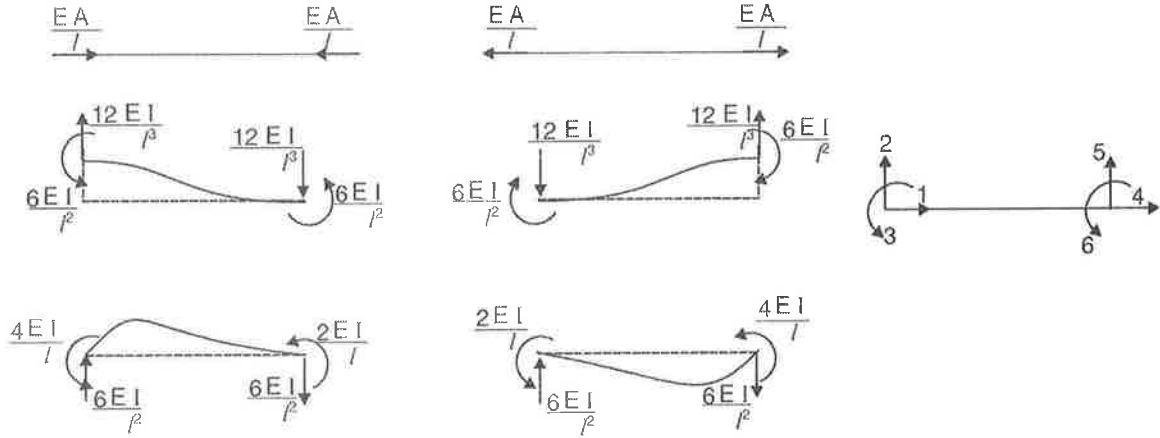


Figura 1.8: Montagem da matriz de rigidez  $[\bar{k}]$  da barra biengastada no sistema local.

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Um vetor  $\{u_1, u_2, u_3\}^t$  no sistema de referência  $(x, y, z)$  representado na figura 1.9, para ser transformado para o sistema de referência  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , precisa ser multiplicado por uma matriz de mudança de coordenadas  $[t]$ , definida como

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix} = [t] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre a referência dos sistemas global e local, conforme ilustra a figura 1.9.

É possível criar uma matriz de transformação de coordenadas  $[T]$  para vetores cuja base são os seis graus de liberdade de uma barra<sup>2</sup>. Por ser a transformação do sistema global para o local constituído pela rotação independente de dois sistemas de referência do tipo  $(x, y, z)$ , a matriz  $[T]$  resulta

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<sup>2</sup>Nota: Uma propriedade desta matriz  $[T]$  é que sua inversa é igual a sua transposta, pois  $[T][T]^t = [I]$ .

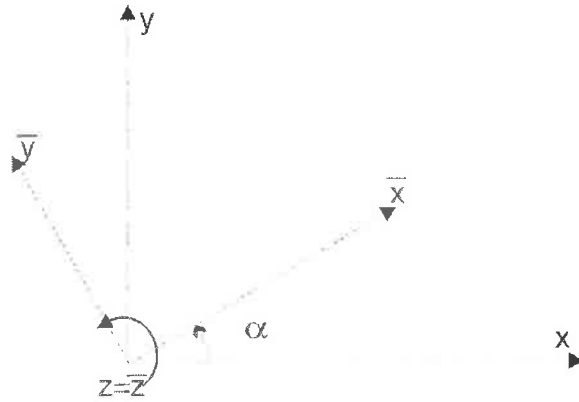


Figura 1.9: O ângulo  $\alpha$  é definido do sistema global para o local.

A transformação de um vetor na base do sistema global para aquela do local se escreve, portanto, exemplificando com o vetor  $\{u\}$ ,

$$\{\bar{u}\} = [T] \{u\}$$

Transformar matrizes é um pouco mais complexo que transformar vetores. Para obter a equação que transforma a matriz de rigidez do sistema local para o global, basta comparar os equacionamentos da barra nestes dois sistemas. São corretas as seguintes expressões:

$$\{f\} = [k] \{u\} \quad (1.34)$$

$$\{\bar{f}\} = [\bar{k}] \{\bar{u}\} \quad (1.35)$$

$$\{\bar{f}\} = [T] \{f\} \quad (1.36)$$

$$\{\bar{u}\} = [T] \{u\} \quad (1.37)$$

Substituindo <sup>1.36</sup> (3) e <sup>1.37</sup> (4) em (2), obtém-se

$$\stackrel{1.35}{[T] \{f\}} = [\bar{k}] [T] \{u\} \quad (1.38)$$

Multiplicando ambos os membros de <sup>1.38</sup> (5) por  $[T]^t$ , resulta

$$\underbrace{[T]^t [T]}_{[I]} \{f\} = [T]^t [\bar{k}] [T] \{u\} \quad (1.39)$$

Comparando as equações <sup>1.39</sup> (6) e <sup>1.34</sup> (1), conclui-se que

$$\stackrel{1.39}{[k]} = [T]^t [\bar{k}] [T] \quad (1.40)$$

Uma vantagem óbvia desta maneira de obter a matriz de rigidez da barra no sistema global é o fato de ela ser montada a partir de uma matriz padrão  $[\bar{k}]$ , alterada apenas pelo ângulo  $\alpha$ , de fácil obtenção quando se conhecem as coordenadas dos nós e a **incidência** das barras, ou seja, seu nó inicial e seu nó final, definindo o eixo  $\bar{x}$ . Resulta, portanto, em uma tarefa muito facilmente programável, que não requer raciocínio físico.

## 1.5 Matriz de Rigidez da Estrutura

Apesar de termos apresentado a solução completa do exemplo de forma matricial, incluindo a montagem da matriz de rigidez da estrutura, essa não é a abordagem mais adequada visando à sistematização do método.

Como será visto a seguir, a montagem da matriz de rigidez da estrutura pode ser tornada bastante sistemática, sendo obtida a partir das matrizes de rigidez das barras.

Considere-se uma parte de uma estrutura de barras qualquer, como esquematizada na Figura 1.10 para a qual os graus de liberdade, as barras e os nós estão numerados e as barras orientadas.

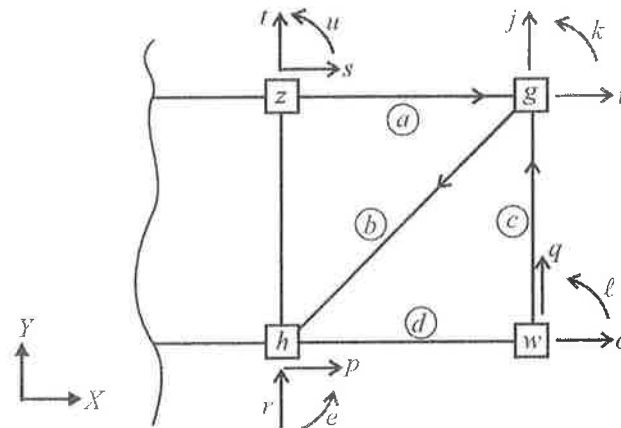


Figura 1.10: Parte de uma estrutura genérica de barras

Seja  $g$  um nó arbitrariamente escolhido que será utilizado como representativo de um nó genérico da estrutura. Na Figura 1.11 apresentam-se as ações internas e externas que devem ser consideradas para estabelecer-se o equilíbrio do nó  $g$ .

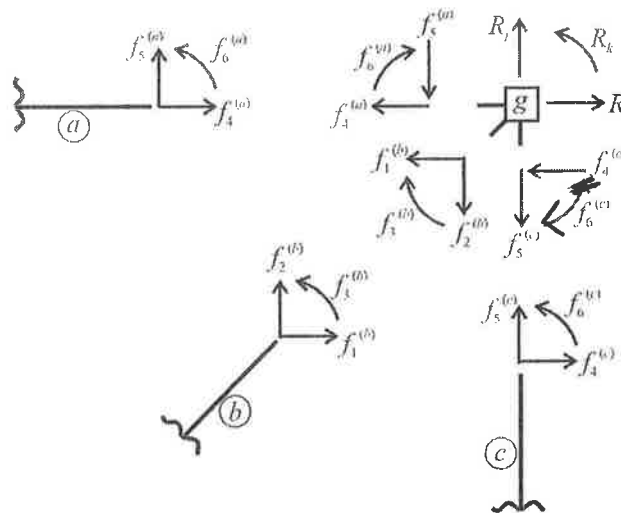


Figura 1.11: Equilíbrio do nó  $g$

Impondo-se o equilíbrio do nó  $g$ , obtém-se

$$R_i = f_4^{(a)} + f_1^{(b)} + f_4^{(c)} \quad (1.41)$$

$$R_j = f_5^{(a)} + f_2^{(b)} + f_5^{(c)} \quad (1.42)$$

$$R_k = f_6^{(a)} + f_3^{(b)} + f_6^{(c)} \quad (1.43)$$

As equações (1.41) - (1.43) evidenciam que as forças externas atuando em um nó devem ser equilibradas pelas forças de extremidade das barras que convergem para o nó.

Com o objetivo de facilitar a contabilidade entre a numeração dos graus de liberdade, que é local para as barras e global para a estrutura, define-se para uma barra genérica ( $m$ ) a matriz coluna  $\{F^{(m)}\}$ ,  $N \times 1$ , onde  $N$  é o número total de graus de liberdade da estrutura. As forças nodais são “colocadas” em  $\{F^{(m)}\}$  nas posições que correspondem à numeração global dos graus de liberdade da barra ( $m$ ). As demais posições de  $\{F^{(m)}\}$  são definidas como sendo nulas. Por exemplo, para a barra ( $b$ ) da estrutura, tem-se

$$\{F^{(b)}\}^T = \{0 \dots 0 \overset{e}{f_6^{(b)}} 0 \dots 0 \overset{i}{f_1^{(b)}} \overset{j}{f_2^{(b)}} \overset{k}{f_3^{(b)}} 0 \dots 0 \overset{p}{f_4^{(b)}} 0 \dots 0 \overset{r}{f_5^{(b)}} 0 \dots 0\}.$$

Tendo-se definido  $\{F^{(m)}\}$  para todas as barras da estrutura, pode-se escrever simultaneamente o equilíbrio de todos os graus de liberdade da estrutura considerando a equação

$$\{R\} = \sum_{m=1}^{n_b} \{F^{(m)}\} \quad (1.44)$$

onde  $n_b$  é o número total de barras da estrutura. De fato, considerando, por exemplo, o grau de liberdade  $i$ , a equação (1.44) estabelece

$$R_i = F_i^{(a)} + F_i^{(b)} + F_i^{(c)} \quad (1.45)$$

já que somente as barras ( $a$ ), ( $b$ ) e ( $c$ ) têm entradas não nulas para a posição  $i$ . Nota-se que essas barras são as únicas que possuem graus de liberdade de extremidade que, na numeração global, correspondem ao grau de liberdade  $i$ .

Utilizando a relação entre numeração global e local, conforme indica a Figura 1.11, pode-se escrever

$$F_i^{(a)} = f_4^{(a)}; F_i^{(b)} = f_1^{(b)}; F_i^{(c)} = f_4^{(c)}.$$

Essas relações acima mostram que a equação (1.45) é idêntica à equação (1.41), mostrando que, de fato, a equação (1.44) traduz o equilíbrio simultaneamente para todos os graus de liberdade.

Analogamente à definição de  $\{F^{(m)}\}$ , seja  $\{U^{(m)}\}$  a matriz coluna  $N \times 1$  que coleciona os deslocamentos da barra ( $m$ ) posicionados segundo a numeração global dos graus de liberdade, sendo as demais posições definidas como nulas. Define-se ainda a matriz  $[K^{(m)}]$ ,  $N \times N$  tal que

$$[K^{(m)}] \{U^{(m)}\} = \{F^{(m)}\}, \quad (1.46)$$

sendo que as únicas entradas não nulas de  $[K^{(m)}]$  são aquelas associadas aos graus de liberdade da barra ( $m$ ). Essas entradas não nulas são definidas de forma a reproduzir - a menos das correspondências entre a numeração global e local dos graus de liberdade - a equação

$$[k^{(m)}] \{u^{(m)}\} = \{f^{(m)}\}.$$

Portanto, todas as entradas não nulas de  $[K^{(m)}]$  podem ser obtidas a partir das entradas de  $[k^{(m)}]$  seguindo-se a correspondência entre a numeração local e global dos graus de liberdade. Por exemplo, para a barra ( $b$ )

$$\begin{array}{lll} K_{ii}^{(b)} = k_{11}^{(b)} & ; & K_{ij}^{(b)} = k_{12}^{(b)} & ; & K_{ik}^{(b)} = k_{13}^{(b)} \\ K_{jj}^{(b)} = k_{22}^{(b)} & ; & K_{jk}^{(b)} = k_{23}^{(b)} & ; & K_{ip}^{(b)} = k_{14}^{(b)} \\ K_{ir}^{(b)} = k_{15}^{(b)} & ; & K_{ie}^{(b)} = k_{16}^{(b)} & ; & K_{jp}^{(b)} = k_{24}^{(b)} \end{array}$$

e assim sucessivamente.

Pode-se agora apresentar a importante dedução que se segue. Substituindo (1.46) em (1.44) obtém-se

$$\{R\} = \sum_{m=1}^{n_b} [K^{(m)}] \{U^{(m)}\}. \quad (1.47)$$

Por compatibilidade, considerando que os deslocamentos nodais da barra ( $m$ ) são os correspondentes deslocamentos nodais da estrutura, pode-se escrever

$$\{F^{(m)}\} = [K^{(m)}] \{U^{(m)}\} = [K^{(m)}] \{U\},$$

que substituído em (1.47) leva à

$$\{R\} = \sum_{m=1}^{n_b} [K^{(m)}] \{U\} = \left( \sum_{m=1}^{n_b} [K^{(m)}] \right) \{U\}$$

e portanto

$$[K] \{U\} = \{R\} \quad (1.48)$$

com

$$[K] = \sum_{m=1}^{n_b} [K^{(m)}] \quad (1.49)$$

onde  $[K]$  é obviamente a matriz de rigidez da estrutura. Observa-se que a equação (1.48) representa simultaneamente, para todos os graus de liberdade, as condições de equilíbrio e compatibilidade.

A equação (1.49) estabelece formalmente como obter os coeficientes da matriz de rigidez da estrutura  $[K]$  a partir da matriz das barras  $[K^{(m)}]$ .

Observa-se que as matrizes  $[K^{(m)}]$ ,  $\{F^{(m)}\}$  e  $\{U^{(m)}\}$  foram definidas de forma a possibilitar as derivações teóricas acima de maneira rigorosa e compacta. No entanto, como a maioria dos elementos dessas matrizes são nulos, elas não são efetivamente usadas nos cálculos.

Descreve-se, a seguir, uma maneira eficiente de se obter a matriz de rigidez  $[K]$ . Recordar-se que todas as entradas não nulas de  $[K^{(m)}]$  estão em  $[k^{(m)}]$  e, portanto,  $[K]$  pode ser obtida sem construir-se  $[K^{(m)}]$ .

Dessa forma, define-se para cada barra da estrutura uma matriz linha  $\{LM^{(m)}\}$  na qual se listam os números dos graus de liberdade da barra segundo a numeração global. Por exemplo, para a barra ( $b$ ) tem-se

$$\{LM^{(b)}\} = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \{ & i & j & k & p & r & e \} . \end{matrix}$$

A contribuição da barra ( $b$ ) para a matriz de rigidez da estrutura pode ser considerada somando-se os coeficientes de matriz de rigidez da barra ( $b$ ):

$$\begin{aligned} & k_{11} \text{ na posição } ii \text{ de } [K] \\ & k_{12} \text{ na posição } ij \text{ de } [K] \\ & \vdots \\ & k_{16} \text{ na posição } ie \text{ de } [K] \\ & k_{22} \text{ na posição } jj \text{ de } [K] \\ & k_{23} \text{ na posição } jk \text{ de } [K] \\ & \vdots \\ & k_{26} \text{ na posição } je \text{ de } [K] \end{aligned}$$

e assim por diante. Nota-se que se está tirando partido da simetria das matrizes  $[k^{(m)}]$  e  $[K]$  e não se estão computando duas vezes termos que são simétricos.

Quando o procedimento acima é realizado para todas as barras da estrutura, obtém-se a matriz  $[K]$  da estrutura.

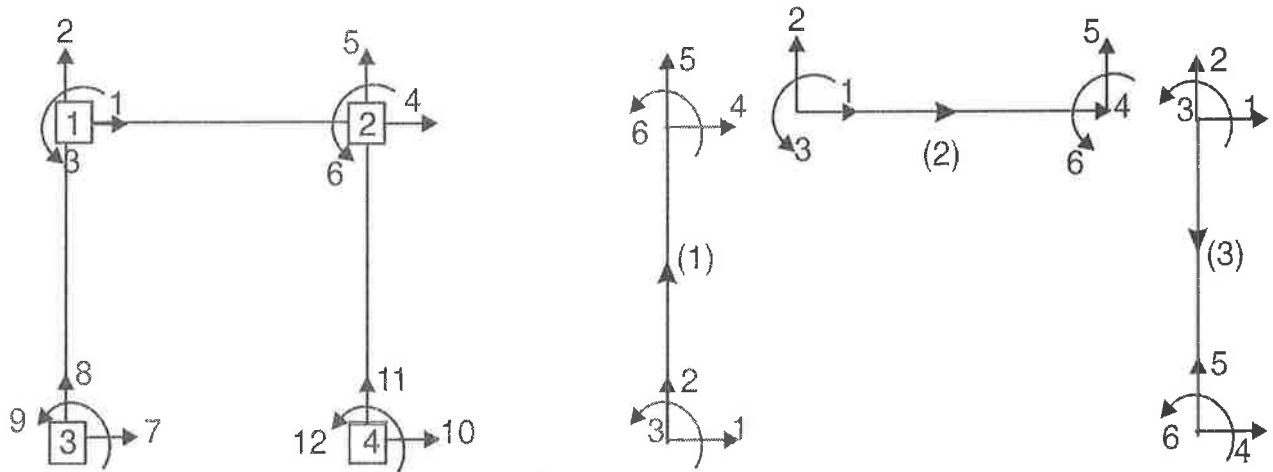


Figura 1.12: Sistemas de coordenadas da estrutura e barras do exemplo anterior para auxiliar na montagem da matriz de rigidez  $[K]$  pelo método da colocação.

Com o objetivo de exemplificar a metodologia descrita acima considere-se as definições de numeração fornecidas na Figura 1.12 para a estrutura da Figura 1.5. As matrizes de rigidez das barras já foram calculadas e estão reproduzidas abaixo.

$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} \frac{12E_1 I_1}{l_1^3} & 0 & -\frac{6E_1 I_1}{l_1^2} & -\frac{12E_1 I_1}{l_1^3} & 0 & -\frac{6E_1 I_1}{l_1^2} \\ 0 & \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & 0 & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{6E_1 I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{4E_1 I_1}{l_1} & \frac{6E_1 I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{2E_1 I_1}{l_1} \\ -\frac{12E_1 I_1}{l_1^3} & 0 & \frac{6E_1 I_1}{l_1^2} & \frac{12E_1 I_1}{l_1^3} & 0 & \frac{6E_1 I_1}{l_1^2} \\ 0 & -\frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & 0 & \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{6E_1 I_1}{l_1} & 0 & \frac{2E_1 I_1}{l_1} & \frac{6E_1 I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{4E_1 I_1}{l_1} \end{bmatrix}$$

$$[k^{(2)}] = \begin{bmatrix} \frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 & 0 & -\frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_2 I_2}{l_2^3} & \frac{6E_2 I_2}{l_2^2} & 0 & -\frac{12E_2 I_2}{l_2^3} & \frac{6E_2 I_2}{l_2^2} \\ 0 & \frac{6E_2 I_2}{l_2^2} & \frac{4E_2 I_2}{l_2} & 0 & -\frac{6E_2 I_2}{l_2^2} & \frac{2E_2 I_2}{l_2} \\ -\frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 & 0 & \frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_2 I_2}{l_2^3} & -\frac{6E_2 I_2}{l_2^2} & 0 & \frac{12E_2 I_2}{l_2^3} & -\frac{6E_2 I_2}{l_2^2} \\ 0 & \frac{6E_2 I_2}{l_2^2} & \frac{2E_2 I_2}{l_2} & 0 & -\frac{6E_2 I_2}{l_2^2} & \frac{4E_2 I_2}{l_2} \end{bmatrix}$$

$$[k^{(3)}] = \begin{bmatrix} \frac{12E_3I_3}{l_3^3} & 0 & \frac{6E_3I_3}{l_3^2} & -\frac{12E_3I_3}{l_3^3} & 0 & \frac{6E_3I_3}{l_3^2} \\ 0 & \frac{E_3A_3}{l_3} & 0 & 0 & -\frac{E_3A_3}{l_3} & 0 \\ \frac{6E_3I_3}{l_3^2} & 0 & \frac{4E_3I_3}{l_3} & -\frac{6E_3I_3}{l_3^2} & 0 & \frac{2E_3I_3}{l_3} \\ -\frac{12E_3I_3}{l_3^3} & 0 & -\frac{6E_3I_3}{l_3^2} & \frac{12E_3I_3}{l_3^3} & 0 & -\frac{6E_3I_3}{l_3^2} \\ 0 & -\frac{E_3A_3}{l_3} & 0 & 0 & \frac{E_3A_3}{l_3} & 0 \\ \frac{6E_3I_3}{l_3} & 0 & \frac{2E_3I_3}{l_3} & -\frac{6E_3I_3}{l_3^2} & 0 & \frac{4E_3I_3}{l_3} \end{bmatrix}$$

Pode-se obter

$$\begin{aligned} \{LM^{(1)}\} &= \{7 \ 8 \ 9 \ 1 \ 2 \ 3\} \\ \{LM^{(2)}\} &= \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6\} \\ \{LM^{(3)}\} &= \{4 \ 5 \ 6 \ 10 \ 11 \ 12\}. \end{aligned}$$

Mostra-se abaixo a matriz  $[K^{(1)}]$  que representa o resultado intermediário na montagem da matriz de rigidez após o cálculo da contribuição da barra 1 seguindo o procedimento acima. O resultado final está mostrado na página seguinte.

$$[K^{(1)}] = \begin{bmatrix} \frac{12E_1I_1}{l_1^3} & 0 & \frac{6E_1I_1}{l_1^2} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{12E_1I_1}{l_1^3} & 0 & \frac{6E_1I_1}{l_1^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{E_1A_1}{l_1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\frac{E_1A_1}{l_1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{6E_1I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{4E_1I_1}{l_1} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{6E_1I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{2E_1I_1}{l_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{12E_1I_1}{l_1^3} & 0 & -\frac{6E_1I_1}{l_1^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{12E_1I_1}{l_1^3} & 0 & -\frac{6E_1I_1}{l_1^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\frac{E_1A_1}{l_1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{E_1A_1}{l_1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{6E_1I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{2E_1I_1}{l_1} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{6E_1I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{4E_1I_1}{l_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

A matriz  $[K]$  pode ser subdividida de acordo com a vinculação dos seus graus de liberdade, nas submatrizes  $[K_{ll}]$ ,  $[K_{lb}]$ ,  $[K_{bl}]$  e  $[K_{bb}]$ , cujos índices significam “livre” e “bloqueado”. No exemplo, lembrando que os três graus de liberdade do nó 3 e aqueles do nó 4 são bloqueados, obtém-se

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ll}] & [K_{lb}] \\ [K_{bl}] & [K_{bb}] \end{bmatrix}$$



$$[K] = \begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) & (10) & (11) & (12) \\ (1) & \frac{12E_1I_1}{l_1^3} + \frac{E_2A_2}{l_2} & 0 + 0 & \frac{6E_1I_1}{l_1^2} + 0 & -\frac{E_2A_2}{l_2} & 0 & \frac{12E_1I_1}{l_1^3} & 0 & \frac{6E_1I_1}{l_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ (2) & 0 + 0 & \frac{E_1A_1}{l_1} + \frac{12E_2I_2}{l_2^3} & 0 + \frac{6E_2I_2}{l_2^2} & -\frac{12E_2I_2}{l_2^3} & \frac{6E_2I_2}{l_2^2} & 0 & \frac{E_1A_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (3) & \frac{6E_1I_1}{l_1^2} + 0 & 0 + \frac{6E_2I_2}{l_2^2} & \frac{4E_1I_1}{l_1} + \frac{4E_2I_2}{l_2} & -\frac{6E_2I_2}{l_2^2} & \frac{2E_2I_2}{l_2} & -\frac{6E_1I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{2E_1I_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ (4) & -\frac{E_2A_2}{l_2} & 0 & 0 & \frac{E_2A_2}{l_2} + \frac{12E_3I_3}{l_3^3} & 0 + 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12E_3I_3}{l_3^3} & 0 & \frac{6E_3I_3}{l_3^2} \\ (5) & 0 & \frac{12E_2I_2}{l_2^3} & -\frac{6E_2I_2}{l_2^2} & \frac{12E_2I_2}{l_2^3} + \frac{E_3A_3}{l_3} & \frac{12E_2I_2}{l_2^3} + 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_3A_3}{l_3} & 0 \\ (6) & 0 & \frac{6E_2I_2}{l_2^2} & \frac{2E_2I_2}{l_2} & -\frac{6E_2I_2}{l_2^2} + 0 & \frac{4E_2I_2}{l_2} + \frac{4E_3I_3}{l_3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E_3I_3}{l_3^2} & 0 & \frac{2E_3I_3}{l_3} \\ (7) & -\frac{12E_1I_1}{l_1^3} & 0 & -\frac{6E_1I_1}{l_1^2} & 0 & 0 & \frac{12E_1I_1}{l_1^3} & 0 & -\frac{6E_1I_1}{l_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ (8) & 0 & -\frac{E_1A_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_1A_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (9) & \frac{6E_1I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{2E_1I_1}{l_1} & 0 & 0 & -\frac{6E_1I_1}{l_1^2} & 0 & \frac{4E_1I_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ (10) & 0 & 0 & 0 & -\frac{12E_3I_3}{l_3^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12E_3I_3}{l_3^3} & 0 & -\frac{6E_3I_3}{l_3^2} \\ (11) & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_3A_3}{l_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_3A_3}{l_3} & 0 \\ (12) & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_3I_3}{l_3^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E_3I_3}{l_3^2} & 0 & \frac{4E_3I_3}{l_3} \end{bmatrix} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \quad (7) \quad (8) \quad (9) \quad (10) \quad (11) \quad (12)$$

$[K] =$

Figura 1.13: Matriz de rigidez completa da estrutura do primeiro exemplo, montada pelo método da colocação.

$$\begin{aligned}
[K_{ll}] &= \begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{6,1} & \cdots & K_{6,6} \end{bmatrix} \\
[K_{lb}] &= \begin{bmatrix} K_{1,7} & \cdots & K_{1,12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{6,7} & \cdots & K_{6,12} \end{bmatrix} \\
[K_{bl}] &= \begin{bmatrix} K_{7,1} & \cdots & K_{7,6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{12,1} & \cdots & K_{12,6} \end{bmatrix} \\
[K_{bb}] &= \begin{bmatrix} K_{7,7} & \cdots & K_{7,12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{12,7} & \cdots & K_{12,12} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Observa-se que a submatriz  $[K_{ll}]$  é igual à matriz de rigidez reduzida que utilizamos no exemplo, uma vez que se refere somente aos graus livres.

## 1.6 Equacionamento da Estrutura com o Sistema Completo

O equacionamento completo da estrutura por Análise Matricial se divide em duas partes, coerentemente com a subdivisão da matriz de rigidez. No caso dos graus de liberdade livres terem sido numerados antes, a primeira parte do equacionamento se refere aos deslocamentos desconhecidos  $\{U_l\}$ , com cargas aplicadas nos nós como carregamento  $\{R_l\}$ ; a segunda parte se refere aos graus de liberdade onde se conhecem os deslocamentos  $\{U_b\}$  (zero, ou um recalque de apoio), e não se sabe qual é o carregamento  $\{R_b\}$  (reações de apoio). A primeira parte é um sistema linear; a segunda, uma expressão mais simples, em que basta efetuar uma multiplicação de uma matriz por um vetor.

$$\begin{Bmatrix} \{R_l\} \\ \{R_b\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ll}] & [K_{lb}] \\ [K_{bl}] & [K_{bb}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_l\} \\ \{U_b\} \end{Bmatrix}$$

A primeira parte do equacionamento, referente aos graus livres, resulta

$$\underbrace{[K_{ll}] \{U_l\}}_{\text{incógnita}} = \{R_l\} - [K_{lb}] \{U_b\}$$

A segunda parte, relacionada com os graus bloqueados, fica

$$\underbrace{\{R_b\}}_{\text{incógnita}} = [K_{bl}] \{U_l\} + [K_{bb}] \{U_b\}$$

## 1.7 Carregamentos Fora dos Nós

Os efeitos de carregamentos fora dos nós em uma estrutura, quanto aos deslocamentos nodais e às reações de apoio, podem ser simulados com a aplicação das reações de engastamento perfeito nas extremidades das barras, com sinal invertido, em vez dos carregamentos não-nodais. Estes esforços de engastamento perfeito serão representados pelo vetor  $\{R\}_0$ . A superposição ilustrada na figura 1.14 facilita o entendimento desta afirmação.

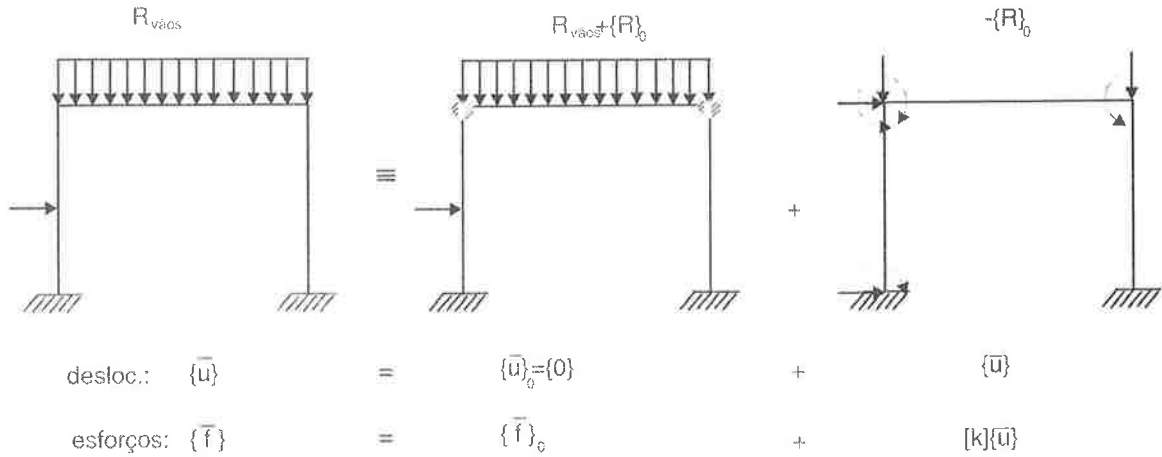


Figura 1.14: Esforços nodais equivalentes a carregamento fora dos nós. O vetor  $\{R\}_0$  representa os esforços de engastamento perfeito devidos ao carregamento nos vãos.

O vetor  $\{R\}_0$  representa os esforços de engastamento perfeito devidos ao carregamento nos vãos. Observando a figura, que representa um caso em que a estrutura está solicitada **apenas** por carregamentos fora dos nós, fica também fácil entender que os esforços solicitantes nas barras decorrem da superposição dos dois casos, devendo para seu cálculo serem aplicados às barras, além dos esforços  $[k]\{\bar{u}\}$ , calculados por Análise Matricial (decorrentes da aplicação à estrutura de  $-\{R\}_0$ ), os esforços de engastamento perfeito  $\{\bar{f}\}_0$  (para a barra).

O vetor  $\{R\}_0$  é obtido através da “colocação” dos elementos dos vetores  $\{f\}_0$  das barras, ou seja, para cada grau de liberdade da estrutura são somados todos os esforços de engastamento perfeito que ali incidem, provenientes das barras. O vetor  $\{f\}_0$  de uma barra decorre da transformação do seu vetor  $\{\bar{f}\}_0$  pela relação

$$\{f\}_0 = [T]^t \{\bar{f}\}_0$$

$\{\bar{f}\}_0$ , por sua vez, é de muito fácil obtenção através da análise de cada barra como viga simples hiperestática.

No caso de serem aplicados à estrutura, além dos esforços não-nodais, também carregamentos nodais  $\{R\}$ , basta lembrar-se da superposição de efeitos e adicionar sua influência na estrutura. São carregamentos neste caso os vetores  $\{R\}$  e  $-\{R\}_0$ . O equacionamento da estrutura, portanto, resulta

$$[K]\{U\} = \{R\} - \{R\}_0$$

de onde se obtêm os deslocamentos dos nós  $\{U\}$  e, conseqüentemente,  $\{u\}$  e  $\{\bar{u}\}$ . Quanto aos esforços nas extremidades de barra, escrevem-se

$$\{\bar{f}\} = [k]\{\bar{u}\} + \{\bar{f}\}_0$$

Além destes esforços nas extremidades, será aplicado sobre cada barra o carregamento no vão, permitindo agora obter os esforços solicitantes e deslocamentos em qualquer ponto, através da sua análise como viga simples.

## 1.8 Roteiro de Resolução

O problema clássico da análise estrutural é aquele em que se conhecem todos os dados geométricos e físicos da estrutura, sua vinculação e recalques, e seu carregamento; incógnitos

são os deslocamentos dos nós livres, as reações nos nós vinculados e os esforços solicitantes nas barras.

Em termos de Análise Matricial de Estruturas, isto equivale a dizer que nossas incógnitas são os vetores  $\{U_l\}$  e  $\{R_b\}$  para a estrutura, e  $\{f\}$  para cada barra.

Abaixo encontram-se listados de maneira seqüencial os passos da resolução de um problema deste tipo por Análise Matricial.

1. Numeração dos nós e das barras.
2. Numeração dos graus de liberdade da estrutura, iniciando com os graus livres.
3. Incidência das barras.
4. Cálculo de  $[\bar{k}]$  e  $[T]$  para cada barra.
5. Cálculo de  $[k]$  para cada barra, pela relação

$$[k] = [T]^t [\bar{k}] [T]$$

6. Montagem de  $[K]$  da estrutura pelo Método da Colocação, evidenciando sua subdivisão nas partes livre e bloqueada.
7. Cálculo dos vetores  $\{\bar{f}\}_0$  das barras, analisando-as como vigas simples hiperestáticas.
8. Cálculo dos vetores  $\{f\}_0$ , pela relação

$$\{f\}_0 = [T]^t \{\bar{f}\}_0$$

9. Montagem de  $\{R\}_0$  com os elementos dos  $\{f\}_0$ , dividindo-o em  $\{R_l\}_0$  e  $\{R_b\}_0$ .
10. Montagem de  $\{R_l\}$  (parcela do carregamento original aplicada nos nós) e  $\{U_b\}$  (recalques de apoio) a partir dos dados do problema.

11. Equacionamento para os graus livres, para obtenção de  $\{U_l\}$ :

$$[K_{ll}]\{U_l\} = \{R_l\} - \{R_l\}_0 - [K_{lb}]\{U_b\}$$

12. Equacionamento para os graus bloqueados, obtendo  $\{R_b\}$ :

$$\{R_b\} - \{R_b\}_0 = [K_{bl}]\{U_l\} + [K_{bb}]\{U_b\}$$

13. Montagem de  $\{u\}$  para cada barra, com os valores de  $\{U\}$ .

14. Cálculo dos  $\{\bar{u}\}$  das barras, pela relação

$$\{\bar{u}\} = [T]\{u\}$$

15. Equacionamento para cada barra, para obtenção dos esforços em suas extremidades  $\{\bar{f}\}$ , decorrentes da aplicação simultânea dos carregamentos  $\{R\}$  e  $-\{R\}_0$  na estrutura, somados com os esforços de engastamento perfeito  $\{\bar{f}\}_0$

$$\{\bar{f}\} = [\bar{k}]\{\bar{u}\} + \{\bar{f}\}_0$$

16. Análise de cada barra como viga simples, aplicando os carregamentos no vão e, nas extremidades,  $\{\bar{f}\}$ , resultando novamente na superposição ilustrada na figura 1.13, e portanto no problema proposto. Desta análise é possível extrair todas as informações de interesse, como esforços solicitantes e deslocamentos em qualquer posição.

Mais adiante, após a apresentação dos conceitos para a resolução de algumas estruturas para as quais é necessário partir de outra matriz de rigidez  $[\bar{k}]$  para simular as suas condições de extremidade, encontra-se resolvido um exemplo, em que se segue este roteiro.

## 1.9 Barras com Outras Condições de Extremidade

Estruturas que têm articulações entre suas barras não podem ser resolvidas como foi exposto até aqui. Uma vez que na montagem das matrizes de rigidez de suas barras  $[k]$  partimos sempre de um mesmo esquema estrutural (engastado nas duas extremidades), não somos ainda capazes de representar estas articulações.

Para tanto, basta desenvolver mais alguns modelos de matrizes de rigidez no sistema local, considerando um ou os dois nós articulados em suas extremidades. Isto é feito com base na teoria de vigas simples hiperestáticas ou isostáticas.

### 1.9.1 Barra Engastada-Articulada

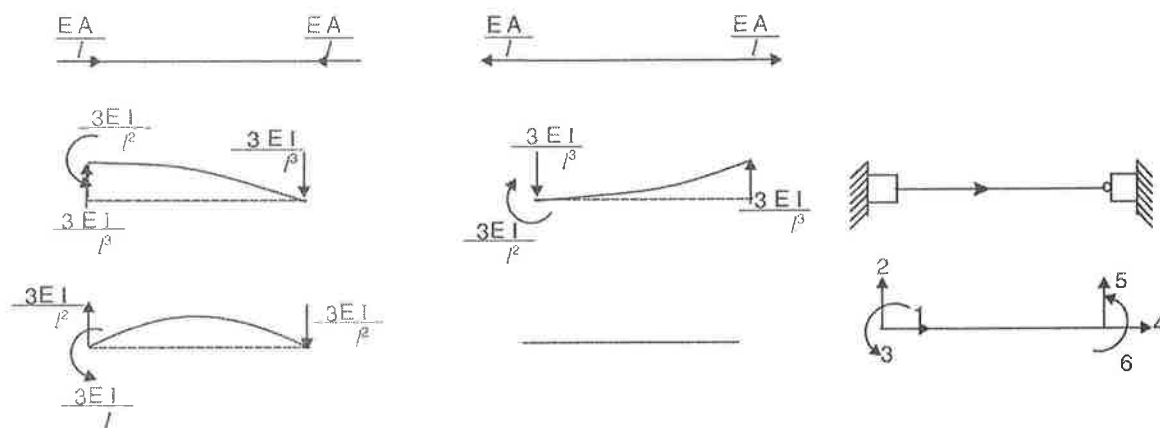


Figura 1.15: As seis deformadas a serem consideradas para a montagem da matriz  $[k]$  da barra engastada-articulada, com seus esforços externos.

A sexta coluna e a sexta linha desta matriz são nulas, já que não faz sentido aplicar a um nó articulado na barra um momento, pois a articulação não permite que ocorra a transmissão do esforço do nó para a barra. Para auxiliar na interpretação física dos coeficientes de rigidez, encontram-se ilustrados na figura 1.15 as seis deformadas consideradas para a montagem da matriz.

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 1.9.2 Barra Articulada-Engastada

Os coeficientes da matriz  $[k]$  da barra articulada-engastada são, obviamente, os mesmos da anterior, apenas com algumas alterações de posição e sinal. As deformadas consideradas estão na figura 1.16.

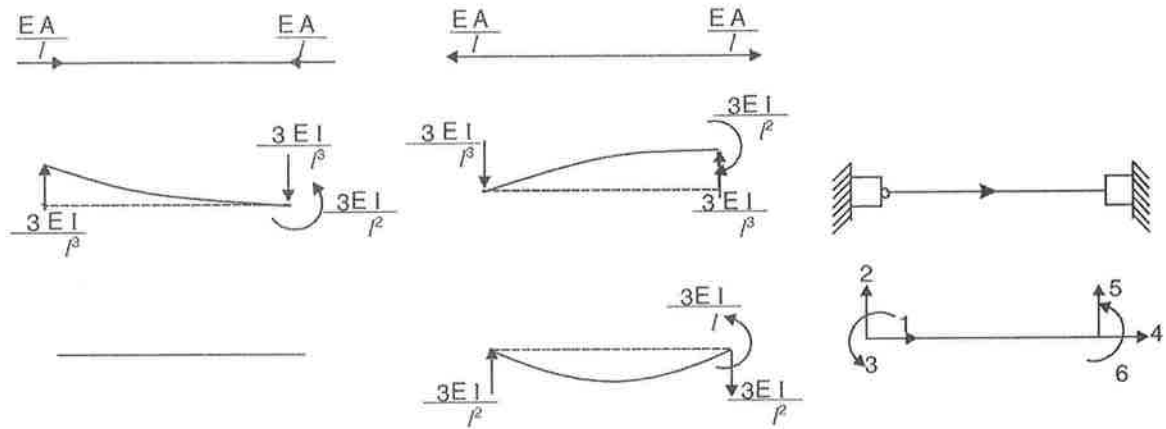


Figura 1.16: As deformadas e esforços para a montagem da matriz  $[\bar{k}]$  da barra articulada-engastada.

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$

### 1.9.3 Barra Biarticulada

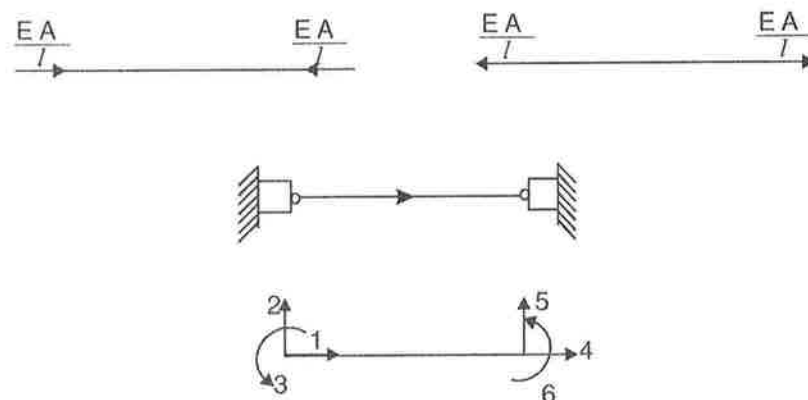


Figura 1.17: As deformadas e esforços para a montagem da matriz  $[\bar{k}]$  da barra biarticulada.

Não é possível deformar uma barra biarticulada aplicando esforços nos nós, a não ser ao longo de seu eixo. Esta situação encontra-se ilustrada na figura 1.17. Sua matriz de rigidez resulta simplesmente

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observações:

- Ao considerar o esquema estrutural de uma barra com uma extremidade articulada, é importante notar que o nó da extremidade articulada não está vinculado à barra quanto à rotação. Um erro comum na resolução de estruturas é deixar algum nó articulado em relação a todas as barras nele concorrentes, resultando obviamente um sistema linear indeterminado, como consequência de uma hipostaticidade local do nó, se nele for aplicado um momento externo. Quando ocorre uma articulação entre três barras, por exemplo, uma delas deve ser considerada engastada no nó. Observe a figura 1.13.
- Note a simetria das matrizes de rigidez apresentadas.

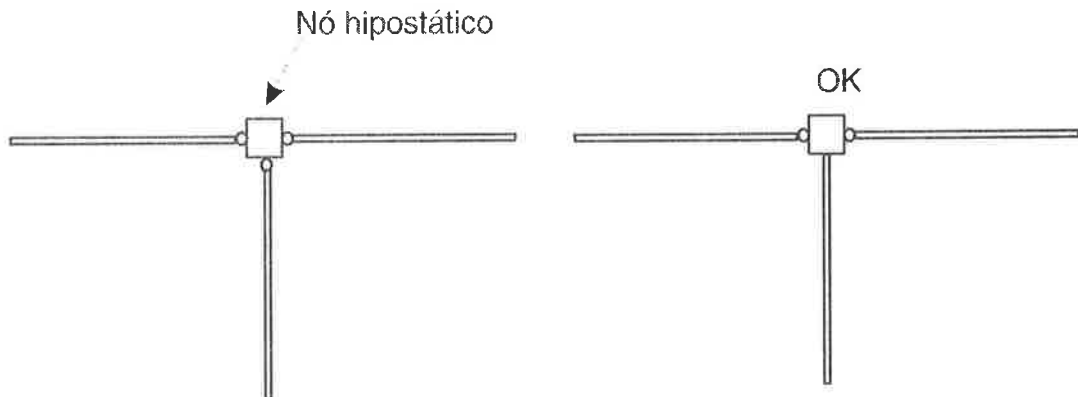


Figura 1.18: Um nó não pode ser considerado articulado a **todas** as barras nele concorrentes.

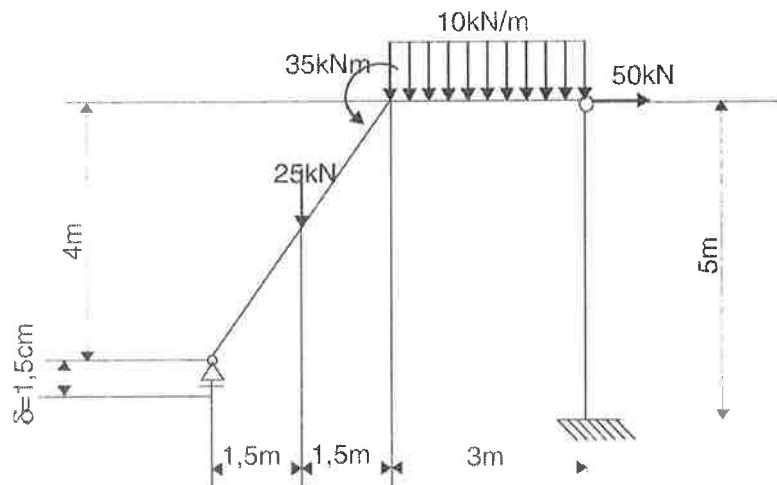
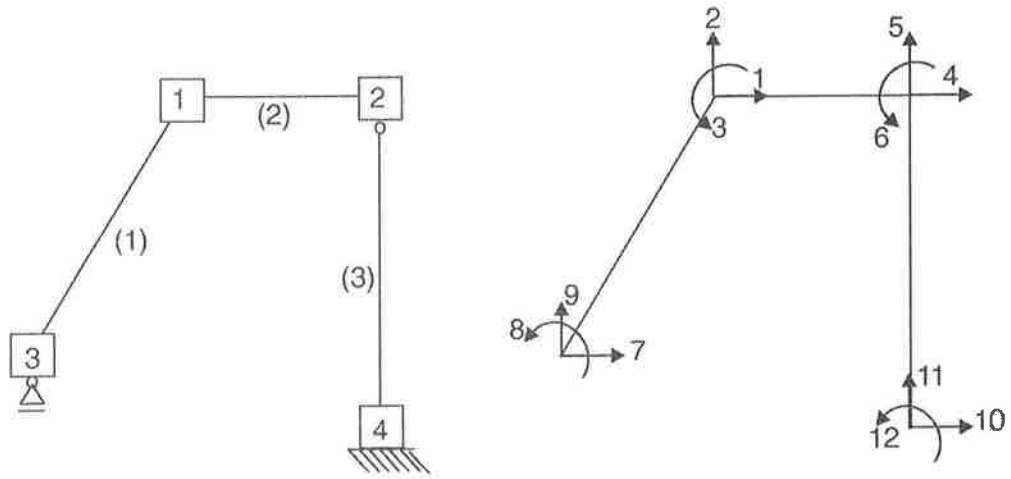


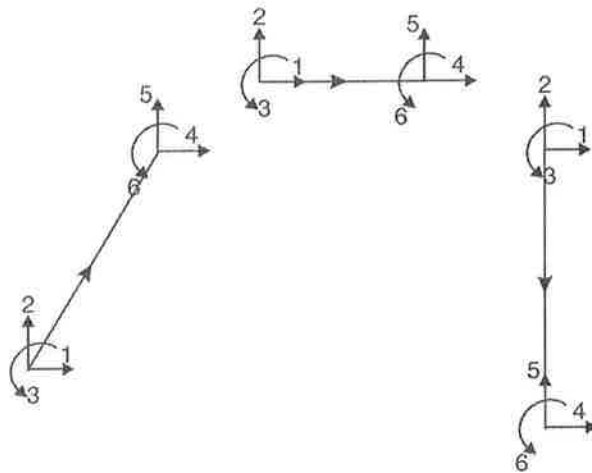
Figura 1.19: Estrutura reticulada plana com carregamento.

## 1.10 Exemplo: Pórtico

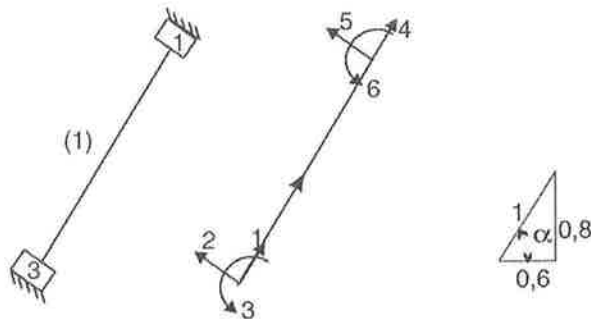
Desenhe os diagramas de esforços solicitantes do pórtico da figura 1.19. Para sua resolução, utilize a Análise Matricial de Estruturas. Considere  $EI = 18000\text{kNm}^2$  e  $EA = 600000\text{kN}$ . No nó 3, existe um recalque de 1.5cm.



ETAPA 1: Numeração dos graus de liberdade da estrutura, iniciando com os graus livres.



ETAPA 2: Incidência das barras, e a numeração dos seus graus de liberdade no sistema global.



$$[\bar{k}^{(1)}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$



$$[\bar{k}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 120000 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 \\ 0 & 1728 & 4320 & 0 & -1728 & 4320 \\ 0 & 4320 & 14400 & 0 & -4320 & 7200 \\ -120000 & 0 & 0 & 120000 & 0 & 0 \\ 0 & -1728 & -4320 & 0 & 1728 & -4320 \\ 0 & 4320 & 7200 & 0 & -4320 & 14400 \end{bmatrix}$$

$$[T^{(1)}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$[T^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

ETAPA 3.1: Cálculo de  $[\bar{k}^{(1)}]$  e  $[T^{(1)}]$ .

Nota: A barra 1 será considerada engastada no nó 3, e sua liberação será feita em relação aos vínculos. Os graus de liberdade 7 e 8 da estrutura serão considerados livres, para tanto.



$$[\bar{k}^{(2)}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

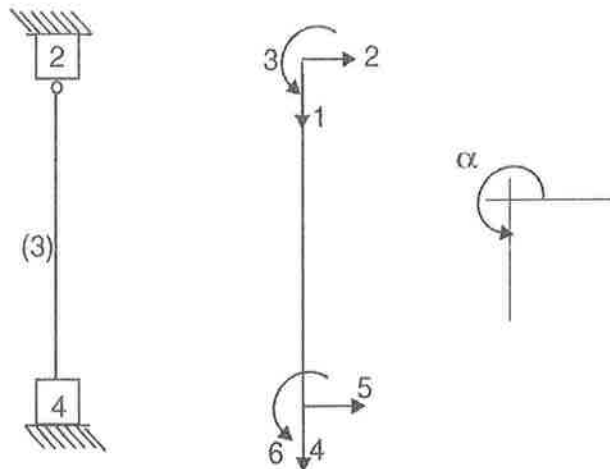
$$[\bar{k}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 200000 & 0 & 0 & -200000 & 0 & 0 \\ 0 & 8000 & 12000 & 0 & -8000 & 12000 \\ 0 & 12000 & 24000 & 0 & -12000 & 12000 \\ -200000 & 0 & 0 & 200000 & 0 & 0 \\ 0 & -8000 & -12000 & 0 & 8000 & -12000 \\ 0 & 12000 & 12000 & 0 & -12000 & 24000 \end{bmatrix}$$

$$[T^{(2)}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

ETAPA 3.2: Cálculo de  $[\bar{k}^{(2)}]$  e  $[T^{(2)}]$ .

Nota: Por estarmos considerando o nó 2 vinculado à barra 2, o deslocamento  $U_6$  da estrutura representará a rotação da extremidade da barra 2 junto ao nó 2. A barra 3 será considerada articulada na extremidade junto ao nó 2, simulando a articulação existente na estrutura.



$$[\bar{k}^{(3)}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{k}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 120000 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 \\ 0 & 432 & 0 & 0 & -432 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -120000 & 0 & 0 & 120000 & 0 & 0 \\ 0 & -432 & 0 & 0 & 432 & -2160 \\ 0 & 2160 & 0 & 0 & -2160 & 10800 \end{bmatrix}$$

$$[T^{(3)}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ETAPA 3.3: Cálculo de  $[\bar{k}^{(3)}]$  e  $[T^{(3)}]$ .

$$[k^{(1)}] = [T^{(1)}]^T [\bar{k}^{(1)}] [T^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 120000 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 \\ 0 & 1728 & 4320 & 0 & -1728 & 4320 \\ 0 & 4320 & 14400 & 0 & -4320 & 7200 \\ -120000 & 0 & 0 & 120000 & 0 & 0 \\ 0 & -1728 & -4320 & 0 & 1728 & -4320 \\ 0 & 4320 & 7200 & 0 & -4320 & 14400 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 44305.92 & 56770.56 & -3456 & -44305.92 & -56770.56 & -3456 \\ 56770.56 & 77422.08 & 2592 & -56770.56 & -77422.08 & 2592 \\ -3456 & 2592 & 14400 & 3456 & -2592 & 7200 \\ -44305.92 & -56770.56 & 3456 & 44305.92 & 56770.56 & 3456 \\ -56770.56 & -77422.08 & -2592 & 56770.56 & 77422.08 & -2592 \\ -3456 & 2592 & 7200 & 3456 & -2592 & 14400 \end{bmatrix}$$

ETAPA 4.1: Cálculo de  $[k^{(1)}]$

$$[k^{(2)}] = [\bar{k}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 200000 & 0 & 0 & -200000 & 0 & 0 \\ 0 & 8000 & 12000 & 0 & -8000 & 12000 \\ 0 & 12000 & 24000 & 0 & -12000 & 12000 \\ -200000 & 0 & 0 & 200000 & 0 & 0 \\ 0 & -8000 & -12000 & 0 & 8000 & -12000 \\ 0 & 12000 & 12000 & 0 & -12000 & 24000 \end{bmatrix}$$

ETAPA 4.2: Cálculo de  $[k^{(2)}]$

$$[k^{(3)}] = [T^{(3)}]^T [\bar{k}^{(3)}] [T^{(3)}]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 120000 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 \\ 0 & 432 & 0 & 0 & -432 & 2160 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -120000 & 0 & 0 & 120000 & 0 & 0 \\ 0 & -432 & 0 & 0 & 432 & -2160 \\ 0 & 2160 & 0 & 0 & -2160 & 10800 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 432 & 0 & 0 & -432 & 0 & 2160 \\ 0 & 120000 & 0 & 0 & -120000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -432 & 0 & 0 & 432 & 0 & -2160 \\ 0 & -120000 & 0 & 0 & 120000 & 0 \\ 2160 & 0 & 0 & -2160 & 0 & 10800 \end{bmatrix}$$

ETAPA 4.3: Cálculo de  $[k^{(3)}]$

$$[k^{(1)}] = \begin{matrix} & & (7) & (9) & (8) & (1) & (2) & (3) \\ \begin{matrix} (7) \\ (9) \\ (8) \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} & & \begin{bmatrix} 44305.92 & 56770.56 & -3456 & -44305.92 & -56770.56 & -3456 \\ 56770.56 & 77422.08 & 2592 & -56770.56 & -77422.08 & 2592 \\ -3456 & 2592 & 14400 & 3456 & -2592 & 7200 \\ -44305.92 & -56770.56 & 3456 & 44305.92 & 56770.56 & 3456 \\ -56770.56 & -77422.08 & -2592 & 56770.56 & 77422.08 & -2592 \\ -3456 & 2592 & 7200 & 3456 & -2592 & 14400 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[k^{(2)}] = \begin{matrix} & & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix} & & \begin{bmatrix} 200000 & 0 & 0 & -200000 & 0 & 0 \\ 0 & 8000 & 12000 & 0 & -8000 & 12000 \\ 0 & 12000 & 24000 & 0 & -12000 & 12000 \\ -200000 & 0 & 0 & 200000 & 0 & 0 \\ 0 & -8000 & -12000 & 0 & 8000 & -12000 \\ 0 & 12000 & 12000 & 0 & -12000 & 24000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[k^{(3)}] = \begin{matrix} & & (4) & (5) & (6) & (10) & (11) & (12) \\ \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \\ (10) \\ (11) \\ (12) \end{matrix} & & \begin{bmatrix} 432 & 0 & 0 & -432 & 0 & 2160 \\ 0 & 120000 & 0 & 0 & -120000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -432 & 0 & 0 & 432 & 0 & -2160 \\ 0 & -120000 & 0 & 0 & 120000 & 0 \\ 2160 & 0 & 0 & -2160 & 0 & 10800 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\{LM^{(1)}\} = \{7 \ 9 \ 8 \ 1 \ 2 \ 3\}$$

$$\{LM^{(2)}\} = \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6\}$$

$$\{LM^{(3)}\} = \{4 \ 5 \ 6 \ 10 \ 11 \ 12\}$$

ETAPA 5.1: Reescrevendo as três matrizes  $[k]$ , denotando a numeração de seus graus de liberdade na estrutura. Tabela de correlação de coordenadas.

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ll}] & [K_{lb}] \\ [K_{bl}] & [K_{bb}] \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & \cdots & K_{1,8} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{8,1} & \cdots & \cdots & K_{8,8} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K_{1,9} & \cdots & K_{1,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{8,9} & \cdots & K_{8,12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{9,1} & \cdots & \cdots & K_{9,8} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{12,1} & \cdots & \cdots & K_{12,8} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K_{9,9} & \cdots & K_{9,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{12,9} & \cdots & K_{12,12} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

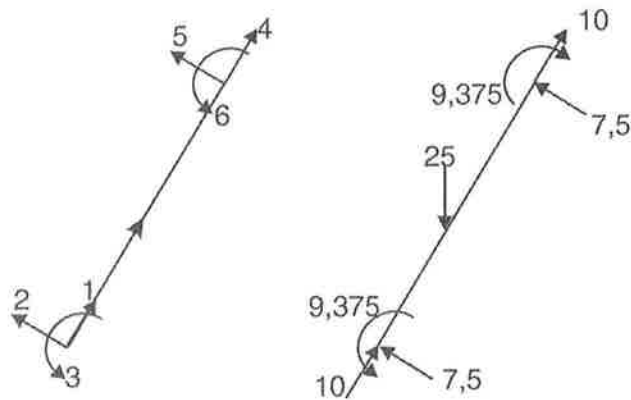
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	
(1)	244303.92	56770.56	3456	-2000000	0	0	-44303.92	3456	-56770.56	0	0	0	(1)
(2)	56770.56	83422.08	9408	0	-8000	12000	-56770.56	-2592	-77422.08	0	0	0	(2)
(3)	3456	9408	38400	0	-12000	12000	-3456	7200	2592	0	0	0	(3)
(4)	-2000000	0	0	200432	0	0	0	0	0	-432	0	2160	(4)
(5)	0	-8000	-12000	0	128000	-12000	0	0	0	0	-120000	0	(5)
(6)	0	12000	12000	0	-12000	24000	0	0	0	0	0	0	(6)
(7)	-44303.92	-56770.56	-3456	0	0	0	44303.92	-3456	56770.56	0	0	0	(7)
(8)	3456	-2592	7200	0	0	0	-3456	14400	2592	0	0	0	(8)
(9)	-56770.56	-77422.08	2592	0	0	0	56770.56	2592	77422.08	0	0	0	(9)
(10)	0	0	0	-432	0	0	0	0	0	432	0	-2160	(10)
(11)	0	0	0	0	-120000	0	0	0	0	0	120000	0	(11)
(12)	0	0	0	2160	0	0	0	0	0	-2160	0	10800	(12)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	

ETAPA 5.2: Montagem de  $[K]$  da estrutura pelo Método da Colocação, evidenciando sua subdivisão nas partes livre e bloqueada.

Nota: A título de exemplo, acompanhe pela tabela de correlação de coordenadas a montagem dos elementos  $K_{11}$  e  $K_{12}$  da estrutura:

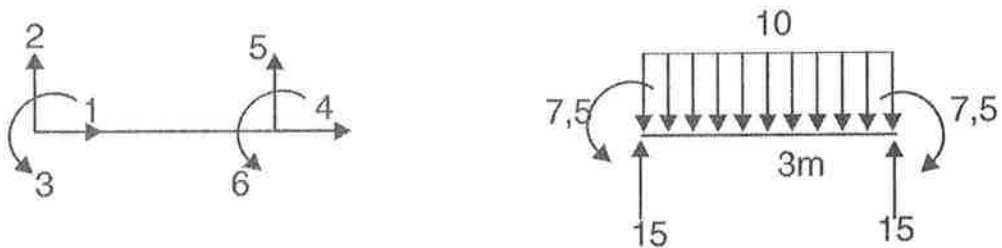
$$K_{1,1}^{estr} = k_{4,4}^{(1)} + k_{1,1}^{(2)} = 44305.92 + 200000 = 244305.92$$

$$K_{1,2}^{estr} = k_{4,5}^{(1)} + k_{1,2}^{(2)} = 56770.56 + 0$$



$$\{\bar{f}^{(1)}\}_0 = \begin{Bmatrix} 10 \\ 7.5 \\ 9.375 \\ 10 \\ 7.5 \\ -9.375 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 6.1: Cálculo dos esforços de engastamento perfeito  $\{\bar{f}^{(1)}\}_0$ , para a barra 1, analisando-a como viga simples hiperestática.



$$\{\bar{f}^{(2)}\}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 15 \\ 7.5 \\ 0 \\ 15 \\ -7.5 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 6.2: Cálculo de  $\{\bar{f}^{(2)}\}_0$ .

$$\{f^{(1)}\}_0 = [T^{(1)}]^T \{\bar{f}^{(1)}\}_0$$

$$\{f^{(1)}\}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ 7.5 \\ 9.375 \\ 10 \\ 7.5 \\ -9.375 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12.5 \\ 9.375 \\ 0 \\ 12.5 \\ -9.375 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 7.1: Cálculo de  $\{f^{(1)}\}_0$ , no sistema global.

$$\{f^{(2)}\}_0 = [T^{(2)}]^T \{\bar{f}^{(2)}\}_0 = [I] \{\bar{f}^{(2)}\}_0 = \{\bar{f}^{(2)}\}_0$$

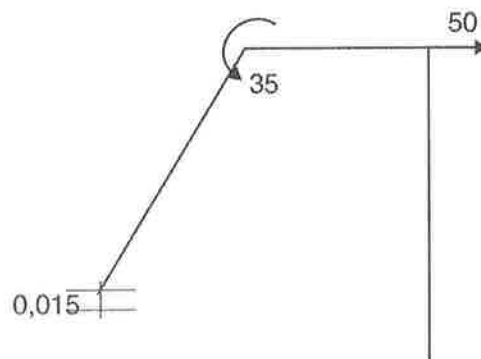
ETAPA 7.2: Cálculo de  $\{f^{(2)}\}_0$ , no sistema global.

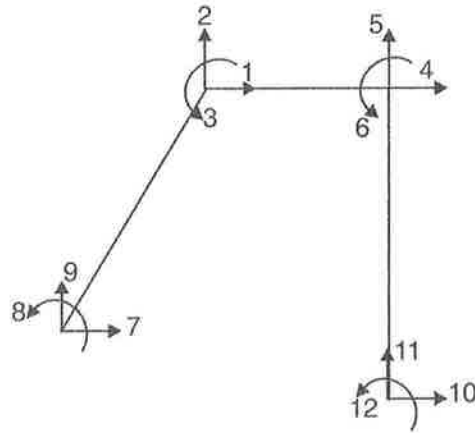
$$\{R\}_0 = \begin{Bmatrix} \{R_i\}_0 \\ \{R_b\}_0 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \\ (10) \\ (11) \\ (12) \end{matrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 27.5 \\ -1.875 \\ 0 \\ 15 \\ -7.5 \\ 0 \\ 9.375 \\ 12.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 8: Montagem de  $\{R\}_0$  com os elementos dos  $\{f\}_0$ .

Nota: Utilize a tabela de correlação de coordenadas. Acompanhe o exemplo:

$$R_{2,0} = f_{5,0}^{(1)} + f_{2,0}^{(2)} = 12.5 + 15 = 27.5kN$$





$$\{R_l\} = \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +35 \\ +50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{U_b\} = \begin{matrix} (9) \\ (10) \\ (11) \\ (12) \end{matrix} \begin{pmatrix} -0.015 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ETAPA 9: Montagem de  $\{R_l\}$  (parcela do carregamento original aplicada nos nós) e  $\{U_b\}$  (recalques de apoio) a partir dos dados do problema.

$$[K_{ll}] \{U_l\} = -[K_{lb}] \{U_b\} + \{R_l\} - \{R_l\}_0$$

$$\begin{bmatrix} 244305.92 & 56770.56 & 3456 & -200000 & 0 & 0 & -44305.92 & 3456 \\ 56770.56 & 85422.08 & 9408 & 0 & -8000 & 12000 & -56770.56 & -2592 \\ 3456 & 9408 & 38400 & 0 & -12000 & 12000 & -3456 & 7200 \\ -200000 & 0 & 0 & 200432 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8000 & -12000 & 0 & 128000 & -12000 & 0 & 0 \\ 0 & 12000 & 12000 & 0 & -12000 & 24000 & 0 & 0 \\ -44305.92 & -56770.56 & -3456 & 0 & 0 & 0 & 44305.92 & -3456 \\ 3456 & -2592 & 7200 & 0 & 0 & 0 & -3456 & 14400 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} -56770.56 & 0 & 0 & 0 \\ -77422.08 & 0 & 0 & 0 \\ 2592 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -432 & 0 & 2160 \\ 0 & 0 & -120000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 56770.56 & 0 & 0 & 0 \\ 2592 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -0.015 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ +35 \\ +50 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 27.5 \\ -1.875 \\ 0 \\ 15 \\ -7.5 \\ 0 \\ 9.375 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -851.5584 \\ -1188.8312 \\ 75.755 \\ 50 \\ -15 \\ 7.5 \\ 851.5584 \\ 29.505 \end{Bmatrix}$$

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} 0.115741 \\ -0.0206773 \\ 0.00488434 \\ 0.115741 \\ -0.000190972 \\ 0.00811351 \\ 0.108389 \\ -0.00587955 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 10: Equacionamento para os graus livres, para obtenção de  $\{U_i\}$ .

$$\{R_b\} - \{R_b\}_0 = [K_{bl}] \{U_i\} + [K_{bb}] \{U_b\}$$

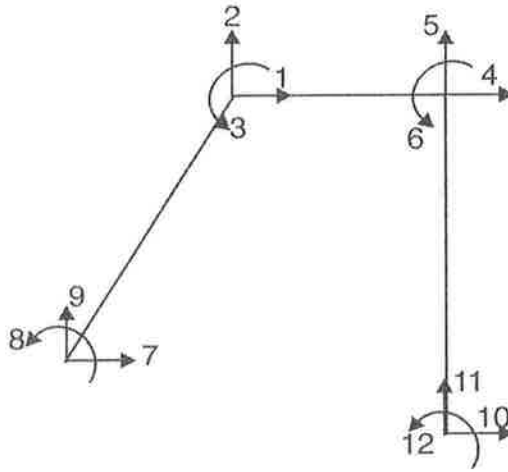
$$\begin{Bmatrix} R_9 \\ R_{10} \\ R_{11} \\ R_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -56770.56 & -77422.08 & 2592 & 0 & 0 & 0 & 56770.56 & 2592 \\ 0 & 0 & 0 & -432 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2160 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

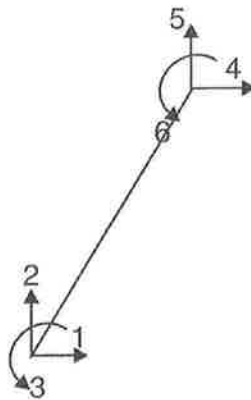
$$\times \begin{Bmatrix} 0.115741 \\ -0.0206773 \\ 0.00488434 \\ 0.115741 \\ -0.000190972 \\ 0.00811351 \\ 0.108389 \\ -0.00587955 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 77422.08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 432 & 0 & -2160 \\ 0 & 0 & 120000 & 0 \\ 0 & -2160 & 0 & 10800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.015 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{R_b\} = \begin{Bmatrix} 32.083 \\ -50.0 \\ 22.917 \\ 250.0 \end{Bmatrix}$$

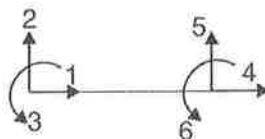
ETAPA 11: Equacionamento para os graus bloqueados, obtendo  $\{R_b\}$ .



$$\{U\} = \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \\ (10) \\ (11) \\ (12) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.115741 \\ -0.0206773 \\ 0.00488434 \\ 0.115741 \\ -0.000190972 \\ 0.00811351 \\ 0.108389 \\ -0.00587955 \\ -0.015 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\{u^{(1)}\} = \begin{matrix} (7) \\ (9) \\ (8) \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.108389 \\ -0.015 \\ -0.00587955 \\ 0.115741 \\ -0.0206773 \\ 0.00488434 \end{pmatrix}$$



$$\{u^{(2)}\} = \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.115741 \\ -0.0206773 \\ 0.00488434 \\ 0.115741 \\ -0.000190972 \\ 0.00811351 \end{pmatrix}$$



$$\{u^{(3)}\} = \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \\ (10) \\ (11) \\ (12) \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.115741 \\ -0.000190972 \\ 0.00811351 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ETAPA 12: Montagem de  $\{u\}$  para cada barra, com os valores de  $\{U\}$ . Acompanhe utilizando a tabela de correlação de coordenadas.

$$\begin{aligned} \{\bar{u}^{(1)}\} &= [T^{(1)}] \{u^{(1)}\} \\ &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.108389 \\ -0.015 \\ -0.00587955 \\ 0.115741 \\ -0.0206773 \\ 0.00488434 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\{\bar{u}^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0.0530334 \\ -0.0957112 \\ -0.00587955 \\ 0.05290276 \\ -0.10499918 \\ 0.00488434 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 13.1: Cálculo de  $\{\bar{u}^{(1)}\}$

$$\{\bar{u}^{(2)}\} = [T^{(2)}] \{u^{(2)}\} = [I] \{u^{(2)}\} = \{u^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 0.115741 \\ -0.0206773 \\ 0.00488434 \\ 0.115741 \\ -0.000190972 \\ 0.00811351 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 13.2: Cálculo de  $\{\bar{u}^{(2)}\}$

$$\begin{aligned} \{\bar{u}^{(3)}\} &= [T^{(3)}] \{u^{(3)}\} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.115741 \\ -0.000190972 \\ 0.00811351 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{\bar{u}^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 0.000190972 \\ 0.115741 \\ 0.00811351 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 13.3: Cálculo de  $\{\bar{u}^{(3)}\}$

$$\begin{aligned} \{\bar{f}^{(1)}\} &= [\bar{k}^{(1)}] \{\bar{u}^{(1)}\} + \{\bar{f}^{(1)}\}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 120000 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 \\ 0 & 1728 & 4320 & 0 & -1728 & 4320 \\ 0 & 4320 & 14400 & 0 & -4320 & 7200 \\ -120000 & 0 & 0 & 120000 & 0 & 0 \\ 0 & -1728 & -4320 & 0 & 1728 & -4320 \\ 0 & 4320 & 7200 & 0 & -4320 & 14400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0530334 \\ -0.0957112 \\ -0.00587955 \\ 0.05290276 \\ -0.10499918 \\ 0.00488434 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \begin{Bmatrix} 10.0 \\ 7.5 \\ 9.375 \\ 10.0 \\ 7.5 \\ -9.375 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25.6667 \\ 19.25 \\ 0 \\ -5.6667 \\ -4.25 \\ 58.75 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 14.1: Equacionamento para a barra 1, obtendo  $\{\bar{f}^{(1)}\}$

$$\{\bar{f}^{(2)}\} = [\bar{k}^{(2)}] \{\bar{u}^{(2)}\} + \{\bar{f}^{(2)}\}_0$$

$$= \begin{bmatrix} 200000 & 0 & 0 & -200000 & 0 & 0 \\ 0 & 8000 & 12000 & 0 & -8000 & 12000 \\ 0 & 12000 & 24000 & 0 & -12000 & 12000 \\ -200000 & 0 & 0 & 200000 & 0 & 0 \\ 0 & -8000 & -12000 & 0 & 8000 & -12000 \\ 0 & 12000 & 12000 & 0 & -12000 & 24000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.115741 \\ -0.0206773 \\ 0.00488434 \\ 0.115741 \\ -0.000190972 \\ 0.00811351 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ 15 \\ 7.5 \\ 0 \\ 15 \\ -7.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7.08333 \\ -23.75 \\ 0 \\ 22.9167 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

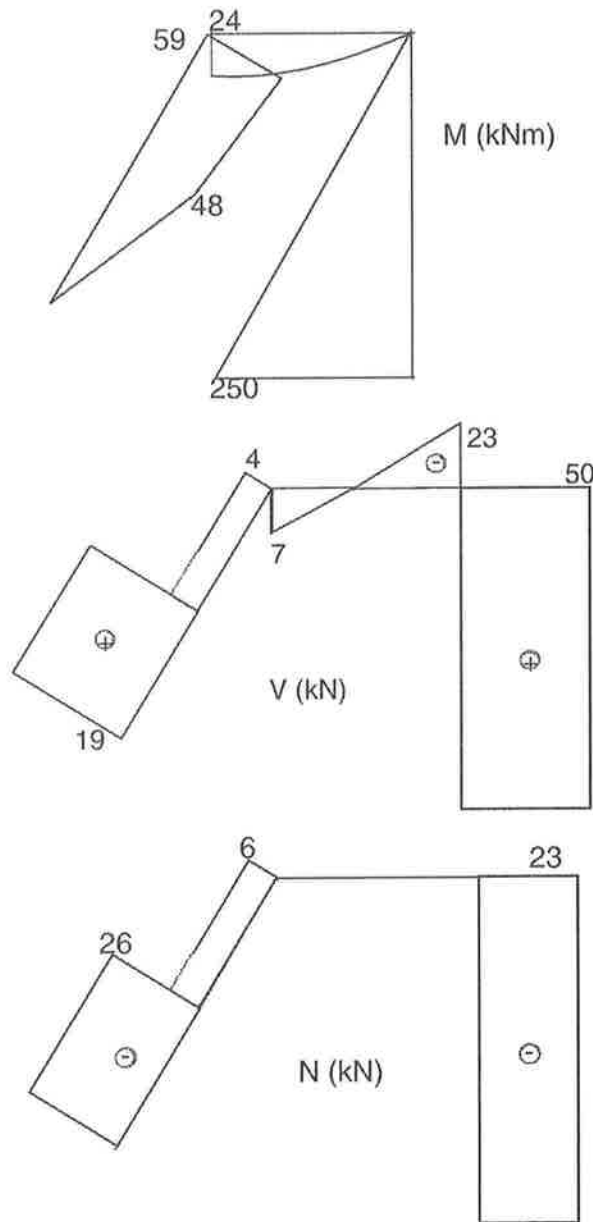
ETAPA 14.2: Equacionamento para a barra 2, obtendo  $\{\bar{f}^{(2)}\}$

$$\{\bar{f}^{(3)}\} = [\bar{k}^{(3)}] \{\bar{u}^{(3)}\} + \{\bar{f}^{(3)}\}_0$$

$$= \begin{bmatrix} 120000 & 0 & 0 & -120000 & 0 & 0 \\ 0 & 432 & 0 & 0 & -432 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -120000 & 0 & 0 & 120000 & 0 & 0 \\ 0 & -432 & 0 & 0 & 432 & -2160 \\ 0 & 2160 & 0 & 0 & -2160 & 10800 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.000190972 \\ 0.115741 \\ 0.00811351 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22.9167 \\ 50.0 \\ 0 \\ -22.9167 \\ -50.0 \\ 250.0 \end{Bmatrix}$$

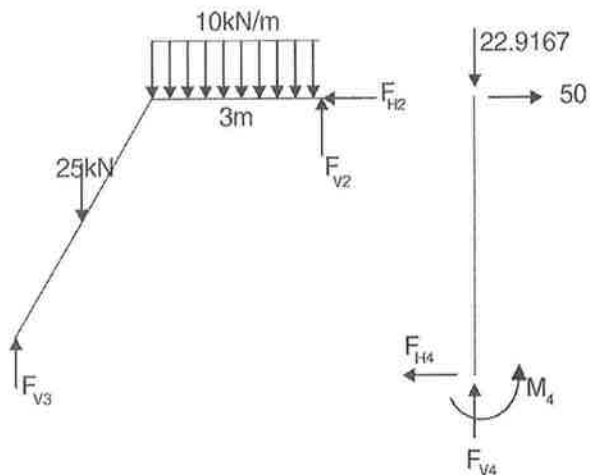
ETAPA 14.3: Equacionamento para a barra 3, obtendo  $\{\bar{f}^{(3)}\}$



ETAPA 15: Diagramas de esforços solicitantes.

### Observações sobre o Exemplo

- Pelo fato de a estrutura ser isostática, é fácil verificar os resultados dos esforços através das equações de equilíbrio, para o conjunto barra 1-barra 2:



$$\begin{aligned}\sum F_H &= 0 \implies F_{H2} = 0 \\ \sum F_V &= 0 \implies F_{V2} + F_{V3} = 55 \\ \sum M_2 &= 0 \implies 6F_{V3} = \frac{10 \times 3^2}{2} + 25 \times 4.5 + 35 \\ &\implies F_{V3} = 32.08333kN \quad ; \quad F_{V2} = 22.9167kN\end{aligned}$$

Para a barra 3, obtemos

$$\begin{aligned}\sum F_H &= 0 \implies F_{H4} = 50kN \\ \sum F_V &= 0 \implies F_{V4} = 22.9167kN \\ \sum M_4 &= 0 \implies M_4 = 5 \times 50 = 250kNm\end{aligned}$$

- Os resultados dos deslocamentos, por sua vez, não são de obtenção tão imediata, pois decorrem da deformação da estrutura e do seu deslocamento como corpo rígido.
- O sistema linear resolvido resultou  $8 \times 8$ , porque 8 dos 12 graus de liberdade da estrutura são livres. Se, por exemplo, os graus de liberdade 4,6,7 e 8 fossem restritos por vínculos, ela passaria a ser quatro vezes hiperestática, dificultando sua resolução manual. Para a Análise Matricial, no entanto, ela ficaria mais simples, pois o sistema resultaria de ordem  $4 \times 4$ .

## 1.11 Treliças

As treliças, por terem todas as suas barras articuladas aos nós de extremidade e, portanto, terem graus de liberdade apenas nas translações dos seus nós, podem ser resolvidas com matrizes e vetores de dimensão menor que os pórticos.

A matriz de rigidez no sistema local das barras, se considerarmos apenas os quatro graus de liberdade ilustrados na figura 1.20, adequados para o estudo de treliças planas, se escreve

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de transformação passa a ser

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Pode-se, pela simplicidade das matrizes para treliças, partir da forma genérica da matriz de rigidez no sistema global:

$$[k] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}.$$

A partir daí, a análise de uma treliça é conceitualmente idêntica à análise de um pórtico, diferindo apenas pelo fato de cada nó apresentar apenas dois graus de liberdade, reduzindo com isso as dimensões dos vetores e matrizes envolvidos, na ordem  $\frac{2}{3}$ .

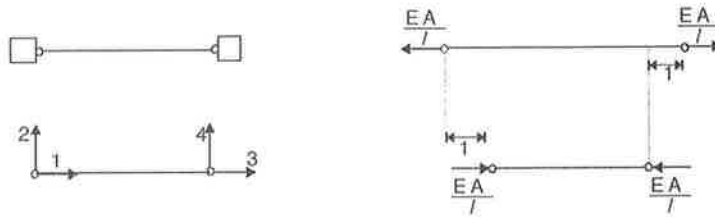


Figura 1.20: Graus de liberdade nodais e deformada para a montagem da matriz de rigidez de uma barra de treliça.

## 1.12 Exemplo: Treliça

Obtenha as forças normais da treliça da figura 1.21. Para sua resolução, utilize a Análise Matricial de Estruturas. Considere  $EA = 200000 \text{ kN}$ .

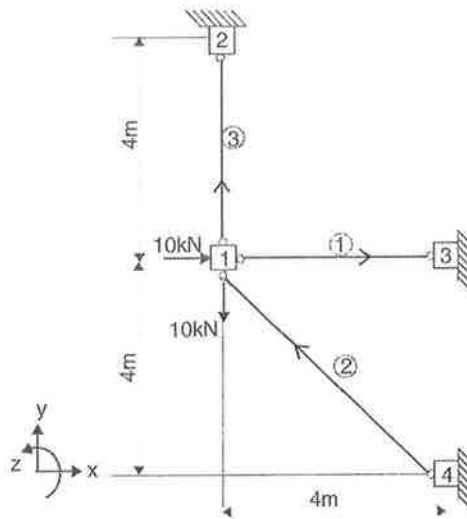
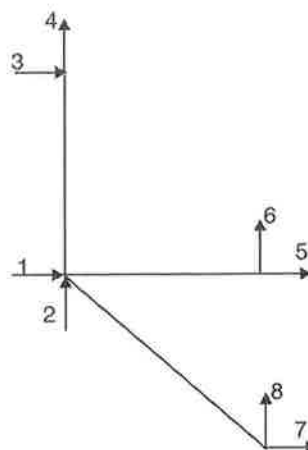


Figura 1.21: Treliça plana com carregamento.



ETAPA 1: Numeração dos graus de liberdade da estrutura, iniciando com os graus livres.



$$[k^{(1)}] = 50000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ETAPA 2.1: Cálculo de  $[k^{(1)}]$  com  $\alpha = 0^\circ$

$$[k^{(2)}] = 12500\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ETAPA 2.2: Cálculo de  $[k^{(2)}]$  com  $\alpha = 135^\circ$ .

$$[k^{(3)}] = 50000 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ETAPA 2.3: Cálculo de  $[k^{(3)}]$  com  $\alpha = 90^\circ$ .

$$\begin{aligned} \{LM^{(1)}\} &= \{ 1 \ 2 \ 5 \ 6 \} \\ \{LM^{(2)}\} &= \{ 7 \ 8 \ 1 \ 2 \} \\ \{LM^{(3)}\} &= \{ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \} \end{aligned}$$

ETAPA 3.: Correlação entre os graus de liberdade das barras e os da estrutura.

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ll}] & [K_{lb}] \\ [K_{bl}] & [K_{bb}] \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ K_{2,1} & K_{2,2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K_{1,3} & \dots & K_{1,8} \\ K_{2,3} & \dots & K_{2,8} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{3,1} & K_{3,2} \\ \vdots & \vdots \\ K_{8,1} & K_{8,2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K_{3,3} & \dots & K_{3,8} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{8,3} & \dots & K_{8,8} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

ETAPA 4: Montagem de  $[K]$  da estrutura pelo Método da Colocação, evidenciando sua subdivisão nas partes livre e bloqueada.

$$\{R_l\} = \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

$$\{U_b\} = \begin{matrix} (3) \\ \vdots \\ (8) \end{matrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 5: Montagem de  $\{R_l\}$  e  $\{U_b\}$  a partir dos dados do problema.

$$[K_{ul}] \{U_l\} = -[K_{lb}] \{U_b\} + \{R_l\}$$

$$12500 \begin{bmatrix} 4 + \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

$$\{U_l\} = 2(2 - \sqrt{2}) \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 6: Obtenção de  $\{U_l\}$ .

$$\{f^{(1)}\} = [k^{(1)}] \{u^{(1)}\}$$

$$= 50000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 2(2 - \sqrt{2}) \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= 10 \times (2 - \sqrt{2}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 7.1: Equacionamento para a barra 1, obtendo  $\{f^{(1)}\}$

$$\{f^{(2)}\} = [k^{(2)}] \{u^{(2)}\}$$

$$= 12500\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times 2(2 - \sqrt{2}) \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$= 10 \times (\sqrt{2} - 1) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 7.2: Equacionamento para a barra 2, obtendo  $\{f^{(2)}\}$

$$\{f^{(3)}\} = [k^{(3)}] \{u^{(3)}\}$$

$$= 50000 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 2(2 - \sqrt{2}) \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= 10 \times (2 - \sqrt{2}) \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 7.3: Equacionamento para a barra 3, obtendo  $\{f^{(3)}\}$

## 1.13 Grelhas

Para as grelhas, os graus de liberdade nodais, no sistema local do elemento, estão representados na figura 1.22, ressaltando-se que correspondem, respectivamente, à rotação de torção, à rotação de flexão e ao deslocamento perpendicular ao plano da grelha.

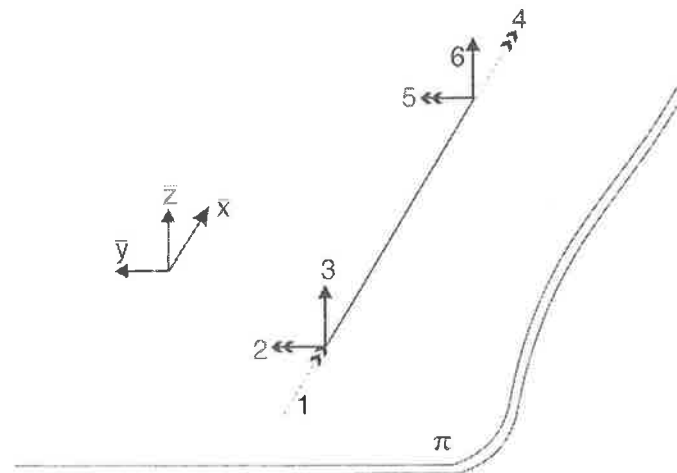


Figura 1.22: Graus de liberdade da grelha no sistema local.

A matriz de rigidez do elemento de grelha, no sistema local pode ser expressa em função das características mecânicas e geométricas da seção transversal da barra, a saber:  $E$  (módulo de elasticidade longitudinal),  $G$  (módulo de elasticidade transversal),  $A$  (área da seção transversal),  $I$  (momento de inércia flexional) e  $I_t$  (momento de inércia torcional).

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{GI_t}{l} & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} \\ -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 & \frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \end{bmatrix}$$

A matriz de transformação de coordenadas  $[T]$  é a mesma do elemento de pórtico plano.

Todas as demais expressões gerais da análise matricial de estruturas valem aqui, razão pela qual não serão rerepresentadas.

## 1.14 Exemplo: Grelha

Desenhe os diagramas de esforços solicitantes da grelha da figura 1.23. Para sua resolução, utilize a Análise Matricial.

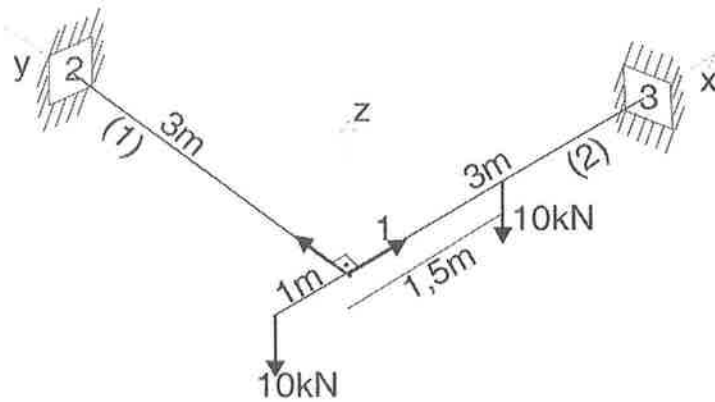
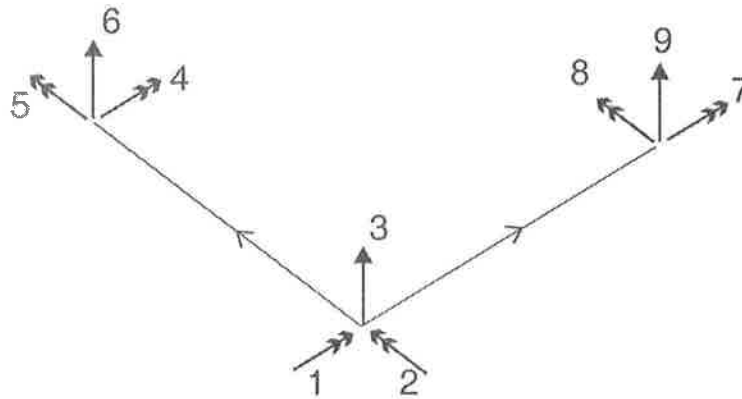


Figura 1.23: Grelha com carregamento.



ETAPA 1: Numeração dos graus de liberdade da estrutura, iniciando com os graus livres.

$$[\bar{k}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 100000 & -50000 & 0 & 50000 & 50000 \\ 0 & -50000 & 33333 & 0 & -50000 & -33333 \\ -20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\ 0 & 50000 & -50000 & 0 & 100000 & 50000 \\ 0 & 50000 & -33333 & 0 & 50000 & 33333 \end{bmatrix}$$

$$[k^{(1)}] = 10^4 \times \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 3.33 & 5 & 0 & -3.33 \\ 5 & 0 & 5 & 10 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -3.33 & -5 & 0 & 3.33 \end{bmatrix}$$

ETAPA 2.1: Cálculo de  $[\bar{k}^{(1)}]$  e  $[k^{(1)}]$ .

$$[\bar{k}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 100000 & -50000 & 0 & 50000 & 50000 \\ 0 & -50000 & 33333 & 0 & -50000 & -33333 \\ -20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\ 0 & 50000 & -50000 & 0 & 100000 & 50000 \\ 0 & 50000 & -33333 & 0 & 50000 & 33333 \end{bmatrix}$$

$$[k^{(2)}] = 10^4 \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & 3.33 & 0 & -5 & -3.33 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & -3.33 & 0 & 5 & 3.33 \end{bmatrix}$$

ETAPA 2.2: Cálculo de  $[\bar{k}^{(2)}]$  e  $[k^{(2)}]$ .

$$[k^{(1)}] = \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix} \begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ 10 & 0 & 5 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 3,33 & 5 & 0 & -3,33 \\ 5 & 0 & 5 & 10 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -3,33 & -5 & 0 & 3,33 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$[k^{(2)}] = \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \end{matrix} \begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) & (7) & (8) & (9) \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & 3.33 & 0 & -5 & -3.33 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & -3.33 & 0 & 5 & 3.33 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$\{LM^{(1)}\} = \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6\}$$

$$\{LM^{(2)}\} = \{1 \ 2 \ 3 \ 7 \ 8 \ 9\}$$

ETAPA 3.1: Reescrevendo as duas matrizes  $[k]$ , denotando a numeração de seus graus de liberdade na estrutura. Tabela de correlação de coordenadas.

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ll}] & [K_{lb}] \\ [K_{bl}] & [K_{bb}] \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & \cdots & K_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{3,1} & \cdots & \cdots & K_{3,3} \\ K_{4,1} & \cdots & \cdots & K_{4,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{9,1} & \cdots & \cdots & K_{9,3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K_{1,4} & \cdots & K_{1,9} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{3,4} & \cdots & K_{3,9} \\ K_{4,4} & \cdots & K_{4,9} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{9,4} & \cdots & K_{9,9} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[K] = 10^4 \times \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 5 \\ 0 & 12 & -5 \\ 5 & -5 & 6.66 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & -3.33 & 0 & -5 & -3.33 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & -3.33 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -3.33 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 3.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3.33 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

ETAPA 3.2: Montagem de  $[K]$  da estrutura pelo Método da Colocação, evidenciando sua subdivisão nas partes livre e bloqueada.

**Nota:** A título de exemplo, acompanhe pela tabela de correlação de coordenadas a montagem dos elementos  $K_{11}$  e  $K_{12}$  da estrutura:

$$K_{1,1}^{estr} = k_{1,1}^{(1)} + k_{1,1}^{(2)} = (10 + 2) \times 10^4 = 12 \times 10^4$$

$$K_{1,2}^{estr} = k_{1,2}^{(1)} + k_{1,2}^{(2)} = 0 + 0 = 0$$

$$\{\bar{f}^{(1)}\}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 4.1: Esforços de engastamento perfeito  $\{\bar{f}^{(1)}\}_0$ .

$$\{\bar{f}^{(2)}\}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3.75 \\ 5 \\ 0 \\ 3.75 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 4.2: Esforços de engastamento perfeito  $\{\bar{f}^{(2)}\}_0$ .

$$\{f^{(1)}\}_0 = [T^{(1)}]^T \{\bar{f}^{(1)}\}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 5.1: Cálculo de  $\{f^{(1)}\}_0$ , no sistema global.

$$\{f^{(2)}\}_0 = [T^{(2)}]^T \{\bar{f}^{(2)}\}_0 = [I] \{\bar{f}^{(2)}\}_0 = \{\bar{f}^{(2)}\}_0$$

ETAPA 5.2: Cálculo de  $\{f^{(2)}\}_0$ , no sistema global.

$$\{R\}_0 = \begin{Bmatrix} \{R_l\}_0 \\ \{R_b\}_0 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \end{matrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -3.75 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.75 \\ 5 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

ETAPA 6: Montagem de  $\{R\}_0$  com os elementos dos  $\{f\}_0$ .

Nota: Utilize a tabela de correlação de coordenadas. Acompanhe o exemplo:

$$R_{2,0}^{estr} = f_{2,0}^{(1)} + f_{2,0}^{(2)} = 0 - 3.75 = -3.75kN$$

$$\{R_l\} = \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 7: Montagem de  $\{R_l\}$  (parcela do carregamento original aplicada nos nós) a partir dos dados do problema.

$$[K_{ll}] \{U_l\} = \{R_l\} - \{R_l\}_0$$

$$10^4 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 5 \\ 0 & 12 & -5 \\ 5 & -5 & 6.66 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ -10 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ -3.75 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

$$10^4 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 5 \\ 0 & 12 & -5 \\ 5 & -5 & 6.66 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6.25 \\ -15 \end{Bmatrix}$$

$$\{U_l\} = \begin{Bmatrix} 0.000294 \\ -0.000346 \\ -0.000706 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 8: Equacionamento para os graus livres, para obtenção de  $\{U_l\}$ .

$$\{R_b\} - \{R_b\}_0 = [K_{bl}] \{U_l\} + [K_{bb}] \{U_b\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.75 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 10^4 \times \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & -3.33 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -3.33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.000294 \\ -0.000346 \\ -0.000706 \end{Bmatrix} \\
+ 10^4 \times &\begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 3.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3.33 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
\{R_b\} &= \begin{Bmatrix} -20.6 \\ 6.92 \\ 8.81 \\ -5.88 \\ 21.75 \\ 11.23 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

ETAPA 9: Equacionamento para os graus bloqueados, obtendo  $\{R_b\}$ .

$$\{U\} = \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \end{matrix} \begin{Bmatrix} 0.000294 \\ -0.000346 \\ -0.000706 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{u^{(1)}\} = \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix} \begin{Bmatrix} 0.000294 \\ -0.000346 \\ -0.000706 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{u^{(2)}\} = \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \end{matrix} \begin{Bmatrix} 0.000294 \\ -0.000346 \\ -0.000706 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 10: Montagem de  $\{u\}$  para cada barra, com os valores de  $\{U\}$ . Acompanhe utilizando a tabela de correlação de coordenadas.



$$\{\bar{u}^{(1)}\} = [T^{(1)}] \{u^{(1)}\}$$

$$\{\bar{u}^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} -0.000346 \\ -0.000294 \\ -0.000706 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 11.1: Cálculo de  $\{\bar{u}^{(1)}\}$

$$\{\bar{u}^{(2)}\} = [T^{(2)}] \{u^{(2)}\} = [I] \{u^{(2)}\} = \{u^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 0.000294 \\ -0.000346 \\ -0.000706 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 11.2: Cálculo de  $\{\bar{u}^{(2)}\}$

$$\{\bar{f}^{(1)}\} = [\bar{k}^{(1)}] \{\bar{u}^{(1)}\} + \{\bar{f}^{(1)}\}_0$$

$$= \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 100000 & -50000 & 0 & 50000 & 50000 \\ 0 & -50000 & 33333 & 0 & -50000 & -33333 \\ -20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\ 0 & 50000 & -50000 & 0 & 100000 & 50000 \\ 0 & 50000 & -33333 & 0 & 50000 & 33333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.000346 \\ -0.000294 \\ -0.000706 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.92 \\ 5.90 \\ -8.81 \\ 6.92 \\ 20.60 \\ 8.81 \end{Bmatrix}$$

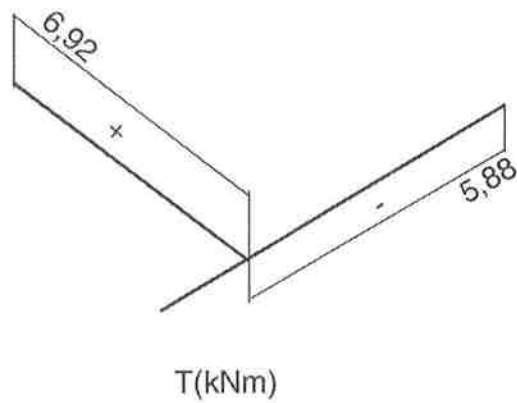
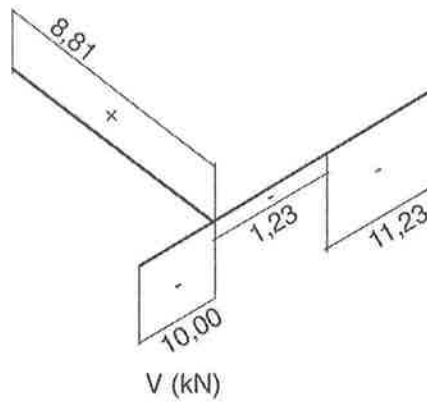
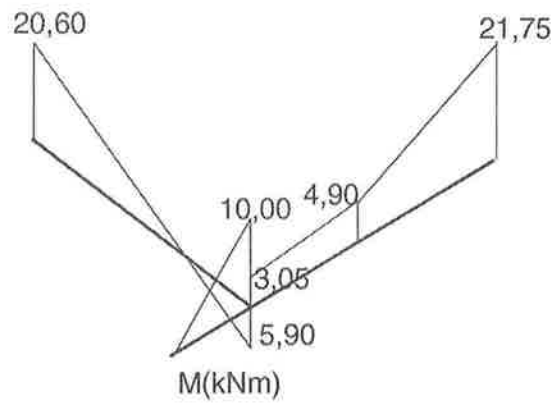
ETAPA 12.1: Equacionamento para a barra 1, obtendo  $\{\bar{f}^{(1)}\}$

$$\{\bar{f}^{(2)}\} = [\bar{k}^{(2)}] \{\bar{u}^{(2)}\} + \{\bar{f}^{(2)}\}_0$$

$$= \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 100000 & -50000 & 0 & 50000 & 50000 \\ 0 & -50000 & 33333 & 0 & -50000 & -33333 \\ -20000 & 0 & 0 & 20000 & 0 & 0 \\ 0 & 50000 & -50000 & 0 & 100000 & 50000 \\ 0 & 50000 & -33333 & 0 & 50000 & 33333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.000294 \\ -0.000346 \\ -0.000706 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ -3.75 \\ 5 \\ 0 \\ 3.75 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.88 \\ -3.05 \\ -1.23 \\ -5.88 \\ 21.75 \\ 11.23 \end{Bmatrix}$$

ETAPA 12.2: Equacionamento para a barra 2, obtendo  $\{\bar{f}^{(2)}\}$



ETAPA 13: Diagramas de esforços solicitantes.

# Capítulo 2

## Introdução à Teoria da Elasticidade Linear

### 2.1 Motivação

Considere-se uma chapa delgada submetida a um carregamento uniforme de superfície  $f^s$  em uma das extremidades e vinculada na outra conforme esquematizado na Figura 2.1.

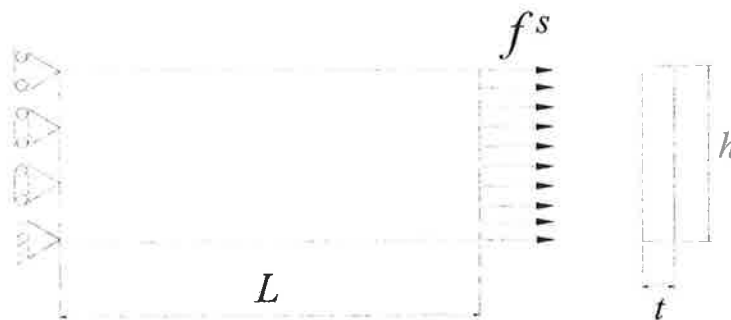


Figura 2.1: Chapa submetida a carregamento uniforme

Intuitivamente e considerando-se também conhecimentos básicos de resistência dos materiais a deformação esperada está representada, de forma magnificada, na Figura 2.2.

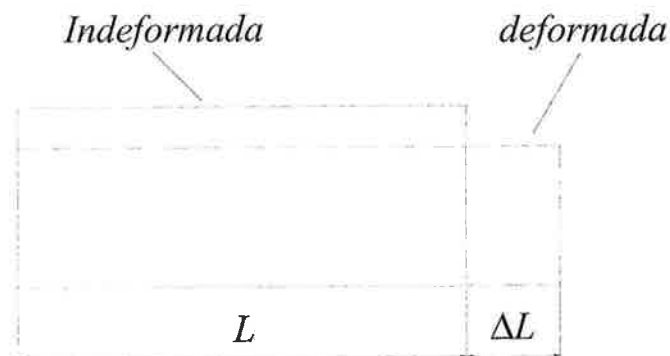


Figura 2.2: Deformação esquemática da chapa

Pode-se explorar alguns conceitos básicos ligados a esse problema. O campo de tensões pode ser determinado cortando-se a chapa como indicado na Figura 2.3 e considerando-se o



Figura 2.3: Corte por uma seção genérica da chapa.

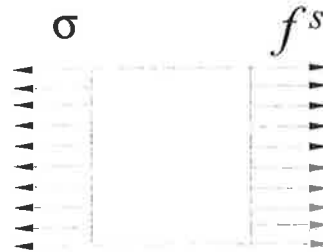


Figura 2.4: Equilíbrio da parte “cortada” da chapa

equilíbrio como indicado na Figura 2.4 chega-se a

$$\sigma = f^s$$

onde a tensão  $\sigma$  é constante e independe da posição da seção de corte. Querendo-se determinar o deslocamento da extremidade livre  $u(L)$  pode-se considerar o alongamento linear dado por

$$\varepsilon = \frac{(L + \Delta L) - L}{L} = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.1)$$

e a lei de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.2)$$

ou seja

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (2.3)$$

$$\Delta L = \sigma \frac{L}{E} = f^s \frac{L}{E} \quad (2.4)$$

que leva a

$$u(L) = f^s \frac{L}{E} \quad \text{deslocamento axial em } x = L \quad (2.5)$$

Reconhece-se que o modelo que leva à determinação do deslocamento da extremidade é o de uma mola como esquematizado na Figura 2.5 onde

$$k = \frac{EA}{L}. \quad (2.6)$$

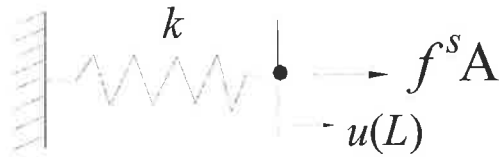


Figura 2.5: Modelo de mola para o cálculo do deslocamento na extremidade da chapa

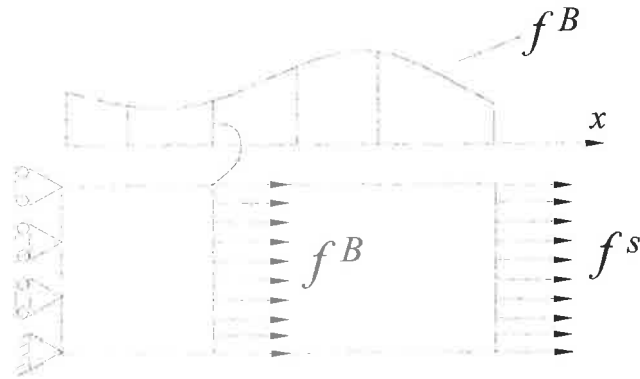


Figura 2.6: Chapa considerando carregamento de volume

Pode-se ainda considerar o problema anterior acrescentando-se um carregamento correspondente a um campo de forças de volume  $f^B$  que tem uma distribuição constante em cada seção, mas tem uma variação na direção longitudinal conforme esquematizado na Figura 2.6.

Caso se coloque a mesma questão abordada no modelo precedente, ou seja, determinar o deslocamento na extremidade, não se pode fornecer uma resposta tão imediata como anteriormente. Reconhece-se que para o problema original o alongamento linear é constante e é por essa razão que se pôde calculá-lo globalmente por  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ .

Considere-se o deslocamento de dois pontos  $P$  e  $Q$  que definem uma fibra horizontal na configuração indeformada. Os pontos  $P$  e  $Q$  são identificados na configuração deformada por  $P'$  e  $Q'$  como representado na Figura 2.7.



Figura 2.7: Deformação da chapa destacando fibra horizontal

Uma medida de alongamento relativo, análoga à medida global  $(\frac{\Delta L}{L})$  usada anteriormente, pode ser definida, considerando-se essa fibra, por

$$\frac{\|P'Q'\| - \|PQ\|}{\|PQ\|} \quad (2.7)$$

Nota-se que mesmo fixando-se o ponto  $P$  a medida acima dependeria do particular ponto  $Q$  que define a fibra horizontal com origem em  $P$ . Tal dependência é intuitiva na medida

que se considera um carregamento que varia longitudinalmente como ilustrado na Figura 2.6. Como a medida de alongamento relativo depende do comprimento da fibra considerada, seria interessante ter uma medida local de alongamento relativo considerando-se a fibra tão pequena quanto se queira a partir de  $P$ , isto é,

$$\varepsilon = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\|P'Q'\| - \|PQ\|}{\|PQ\|} \quad (2.8)$$

Nota-se que, admitindo-se o limite acima bem definido, chega-se a uma medida de alongamento relativo local para fibras horizontais que se originam em  $P$ . Está implícito na definição acima que a medida de deformação dada pela equação (2.8) depende do ponto  $P$ , o que é na verdade antecipado intuitivamente. De posse da definição de deformação acima é possível equacionar o problema do deslocamento longitudinal dos pontos da chapa.

Considerando que o carregamento externo varia somente longitudinalmente e que é constante transversalmente, os deslocamentos horizontais de pontos sobre uma mesma seção transversal serão idênticos. Portanto, basta o conhecimento da função  $u(x)$  que fornece o deslocamento longitudinal para uma seção de coordenada  $x$  para caracterizar o campo de deslocamentos longitudinais.

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \|PQ\| &= x_Q - x_P \\ \|P'Q'\| &= (u(x_Q) - u(x_P)) + \|PQ\| \end{aligned} \quad (2.9)$$

Portanto

$$\varepsilon = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\|P'Q'\| - \|PQ\|}{\|PQ\|} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{u(x_Q) - u(x_P)}{x_Q - x_P} = \left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x_P} \quad (2.10)$$

pela definição da derivada da função  $u(x)$ .

O campo de tensões por sua vez pode ser obtido por equilíbrio, ou equivalentemente, aplicando-se teorema do corte (ver Figura 2.8)



Figura 2.8: Tensão atuante em uma seção genérica.

$$\sigma(x) = \frac{1}{A} \left[ \int_x^L f^B(z) A dz + f^s A \right]. \quad (2.11)$$

Considerando-se a lei de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx} \quad (2.12)$$

tem-se

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{E} \left[ \int_x^L f^B(z) dz + f^s \right] \quad (2.13)$$

ou

$$u(w) = \frac{1}{E} \int_0^w \left[ \int_x^L f^B(z) dz + f^s \right] dx \quad (2.14)$$

onde na equação acima já se considerou a condição de contorno  $u(0) = 0$ .

O mesmo tipo de raciocínio que foi utilizado para se definir o alongamento linear na direção horizontal pode ser usado para estudar o alongamento linear em outras direções. Considere-se para o problema definido na Figura 2.1 uma fibra vertical  $PR$  na configuração indeformada e essa mesma fibra na configuração deformada representada por  $P'R'$  conforme a Figura 2.9.



Figura 2.9: Deformação da chapa destacando fibra vertical

Por um raciocínio análogo pode-se chegar à definição do alongamento linear em  $P$  na direção vertical dado por

$$\varepsilon = \lim_{R \rightarrow P} \frac{\|R'P'\| - \|RP\|}{\|RP\|} \quad (2.15)$$

Para a deformação em estudo, representada por exemplo na Figura 2.9, pode-se concluir que o valor do alongamento linear em  $P$  como definido pela equação (2.15) terá um valor negativo devido ao efeito de Poisson que leva à contração das fibras transversais. Portanto, pode-se constatar que o alongamento linear depende não somente da posição do ponto que se toma como origem das fibras, mas também da direção em que se tomam as fibras para o seu cálculo. De fato, na expressão (2.8) os pontos  $Q$  são tomados sobre semi-reta horizontal com origem em  $P$  e em (2.15) na semi-reta vertical também de origem em  $P$ . Caso se estudasse o alongamento linear em uma direção inclinada, como por exemplo mostrado na Figura 2.10, e usando-se

$$\varepsilon = \lim_{T \rightarrow P} \frac{\|P'T'\| - \|PT\|}{\|PT\|} \quad (2.16)$$

chegaríamos ainda a um valor diferente dos obtidos para as direções horizontal e vertical.

Considerando, portanto, a dependência do alongamento linear tanto do ponto como da direção, fala-se em estado de deformação em um ponto, como será detalhado adiante.

Considerando ainda o problema definido na Figura 2.1 pôde-se determinar o campo de deslocamentos dadas condições particulares do problema que o tornam bastante simples. Pequenas modificações no problema impediriam que ele fosse solucionado somente com os conceitos da resistência dos materiais. Por exemplo, basta modificar a condição de contorno na extremidade vinculada, impedindo os deslocamentos verticais nessa face como mostrado



Figura 2.10: Deformação da chapa destacando fibra inclinada



Figura 2.11: Problema da chapa com condições de contorno modificadas

na Figura 2.11 que não poderíamos determinar, com o mesmo procedimento simplista, o campo de deslocamentos de forma exata.

Para esse novo problema as forças normais nas seções transversais ainda seriam determinadas por equilíbrio. Essas forças normais nas seções transversais, sendo de tração, tendem, pelo efeito de Poisson, a contrair as fibras transversais. No exemplo anterior as fibras transversais estavam livres para se contraírem. No entanto, para o problema descrito na Figura 2.11 as fibras verticais na extremidade vinculada estão impedidas de se contraírem na direção vertical, levando ao aparecimento de tensões na direção vertical. Não se pretende explorar esse problema em detalhes. O objetivo de mencioná-lo é mostrar que problemas bastante simples podem demandar uma formulação mais completa para solução. É verdade que a solução desse novo problema será ainda “próxima” da solução do problema original.

Fica ainda mais evidente a necessidade de uma formulação mais geral quando se modifica o problema original pela introdução de um orifício como mostrado na Figura 2.12.

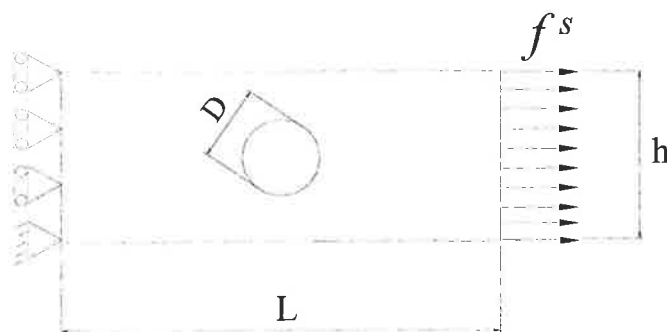


Figura 2.12: Chapa com orifício

Basta nesse caso que se considere o carregamento na extremidade. É de fácil constatação que nas seções transversais que interceptam o orifício a força normal, que é constante, deve ser transmitida por uma área menor. É também uma condição de contorno para esse problema



que a tensão normal à superfície que define o orifício deva ser nula. Na Figura 2.13 apresenta-se o modelo de elementos finitos que foi utilizado para solução do problema da chapa com orifício (Não se explorou intencionalmente, por razões didáticas, a simetria do problema).

Na Figura 2.14 mostra-se, de forma magnificada, a configuração deformada correspondente a solução desse problema utilizando-se o modelo de elementos finitos da Figura 2.13. Na Figura 2.15 as tensões principais estão representadas e na Figura 2.16 é mostrado um detalhe da região onde ocorrem as maiores intensificações de tensão. Observa-se o caminhar das tensões.

Na Figura 2.17 e 2.18 mostra-se um diagrama de bandas para a tensão  $\sigma_{zz}$ . Na região mais afastada do orifício observa-se que a tensão  $\sigma_{zz}$  mantém-se constante (na precisão do intervalo da banda) e de valor próximo à força de superfície  $f^s$  aplicada. Destacam-se ainda as regiões de intensificação das tensões de tração (laterais ao orifício) e as regiões onde a tensão  $\sigma_{zz}$  tende a zero (superior e inferior do orifício).

É relevante reconhecer que na solução apresentada para os problemas definidos nas Figuras 2.2 e 2.6 se seguiram implicitamente as condições fundamentais que sempre devem ser satisfeitas na solução de um problema da Mecânica das Estruturas, isto é,

- Equilíbrio
- Compatibilidade
- Equação constitutiva

Nos problemas estudados, o equilíbrio foi satisfeito de forma imediata. Atendeu-se à compatibilidade à medida que se respeitou a relação entre os deslocamentos e a medida de deformação utilizada.

A equação constitutiva, no caso a lei de Hooke, foi usada para relacionar as tensões à medida de deformação.

Essas três condições: equilíbrio, compatibilidade e equações constitutivas continuarão a ser as condições fundamentais no equacionamento dos problemas da elasticidade linear que serão abordadas adiante. No entanto, para formular essas condições para problemas da elasticidade linear, como por exemplo o descrito na Figura 2.12, é necessário:

- 1 Estudar as condições de equilíbrio local quando se consideram estados tridimensionais de tensão;
- 2 Um estudo mais geral das deformações que permita caracterizar o estado de deformação em um ponto a partir do conhecimento do campo de deslocamentos;
- 3 Uma generalização da lei de Hooke que permita relacionar, para um dado material elástico, as tensões e as medidas de deformação.

O item 1 será abordado na seção “O Estudo das Tensões”, o item 2 na seção “O Estudo das Deformações” e o item 3 na seção “Equações Constitutivas”.

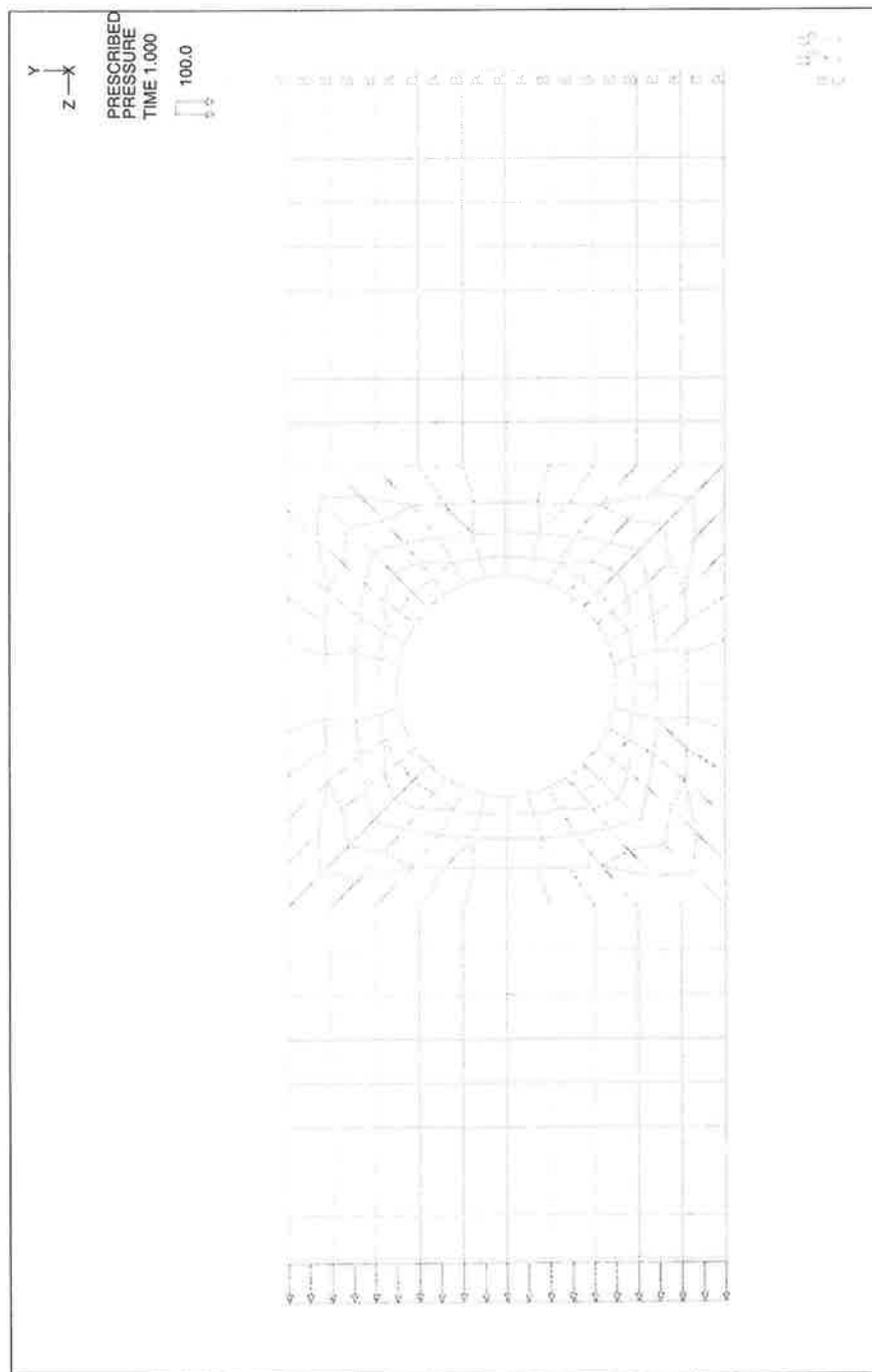


Figura 2.13: Modelo de elemento finitos utilizado para a solução da chapa com orifício. Os dados utilizados são:  $D = 10\text{mm}$  ,  $L = 56\text{mm}$  ,  $h = 20\text{mm}$  ,  $f^s = 100\text{N/mm}^2$  ,  $E = 7.0 \times 10^4\text{N/mm}^2$  ,  $\nu = 0.25$  .

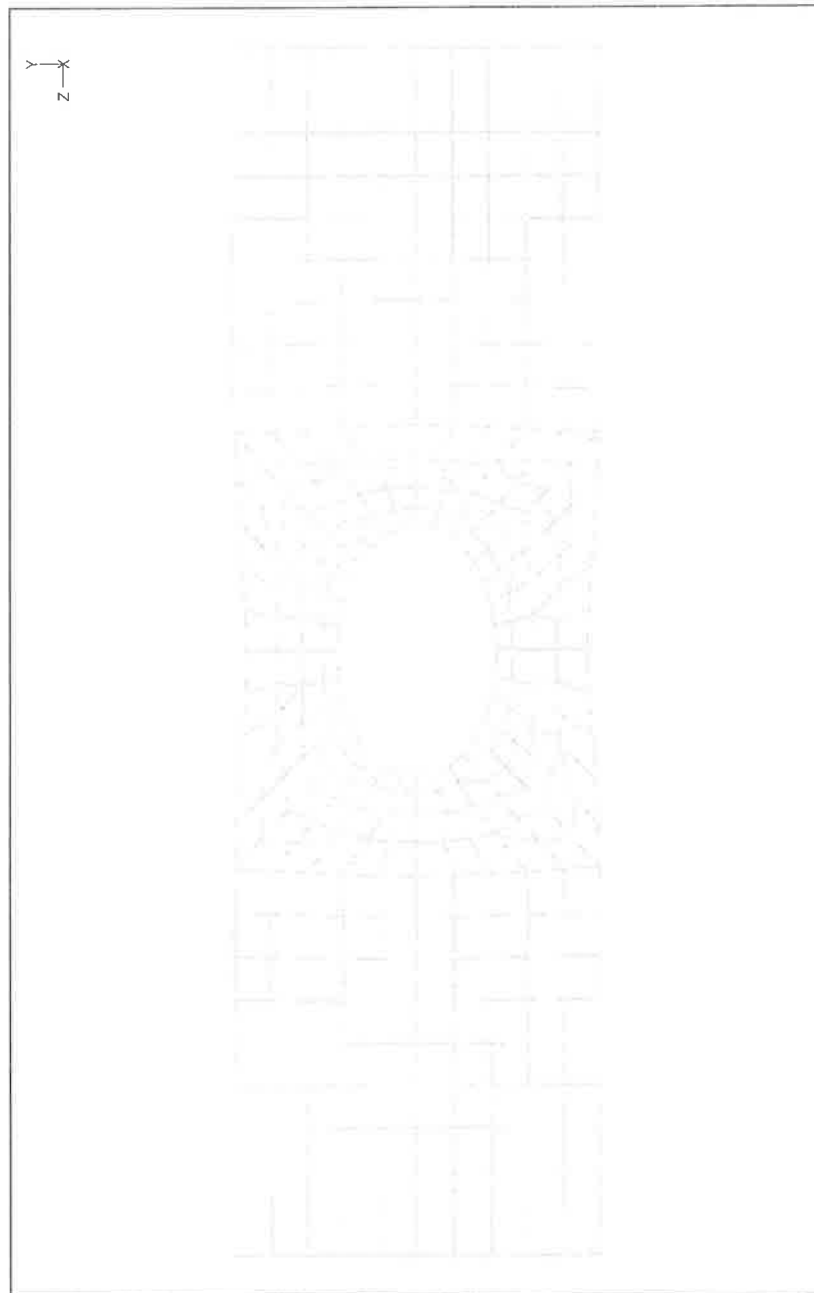


Figura 2.14: Modelo deformado com magnificação das deformações

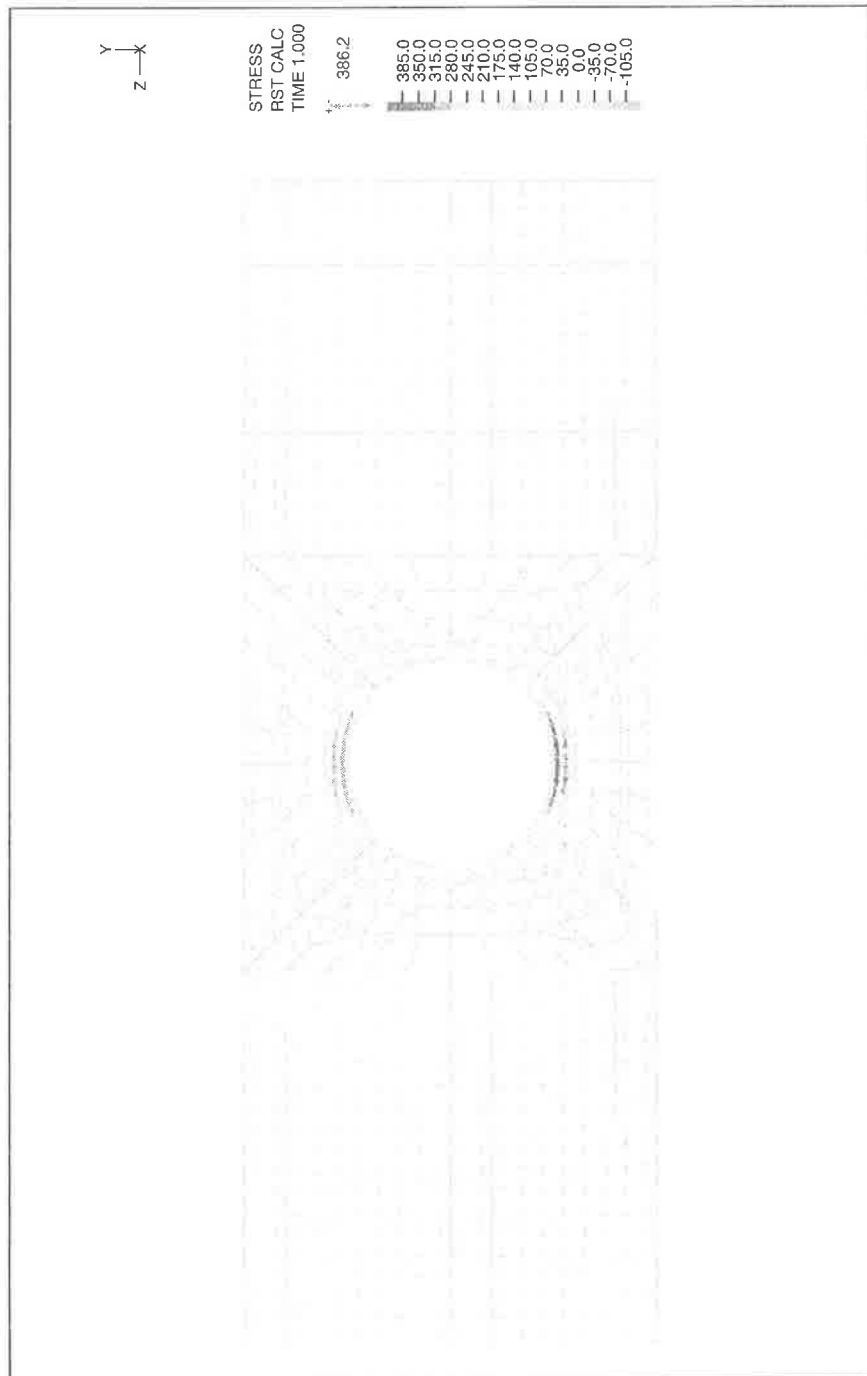


Figura 2.15: Diagrama de tensões principais

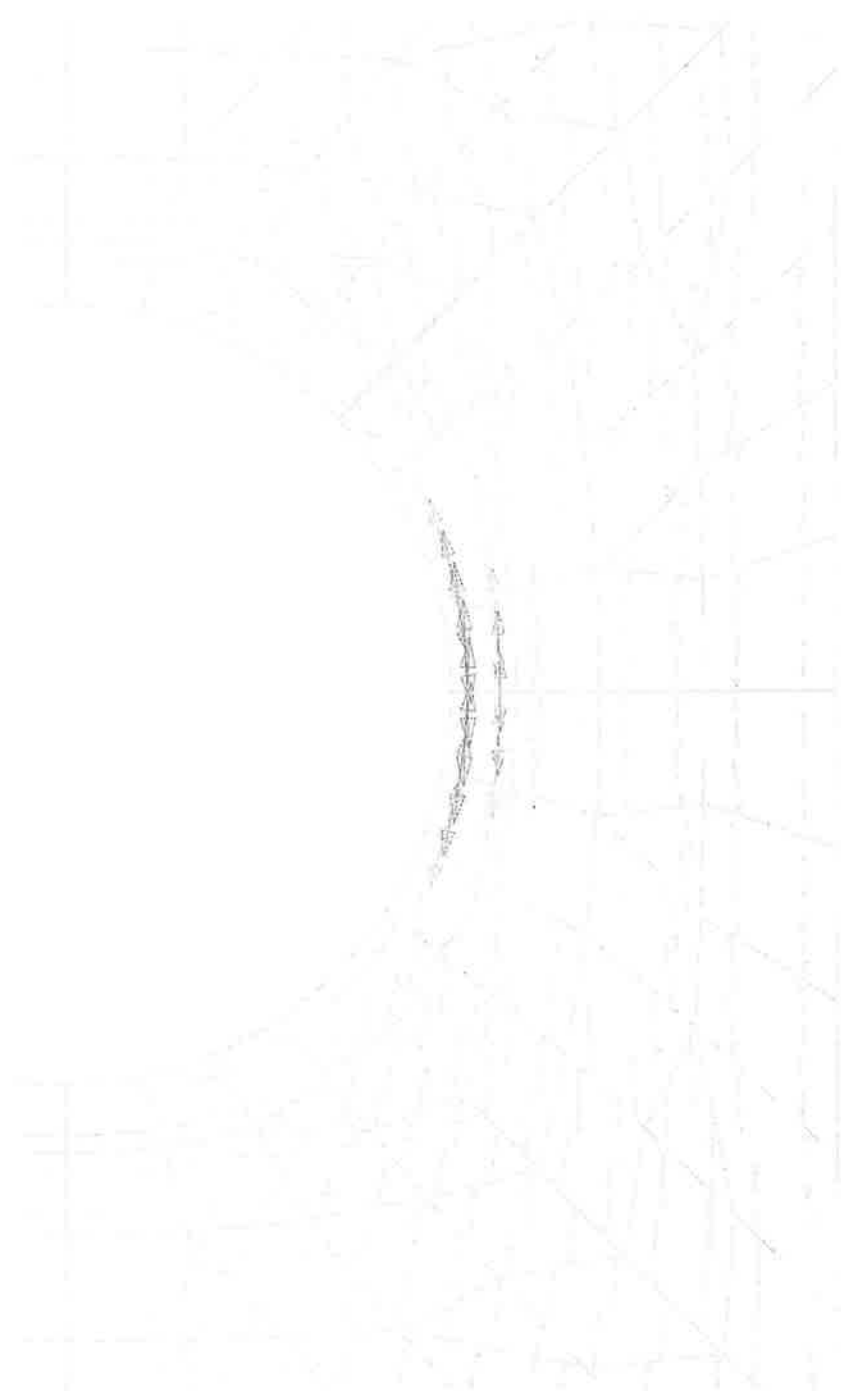


Figura 2.16: Detalhe do diagrama de tensões principais

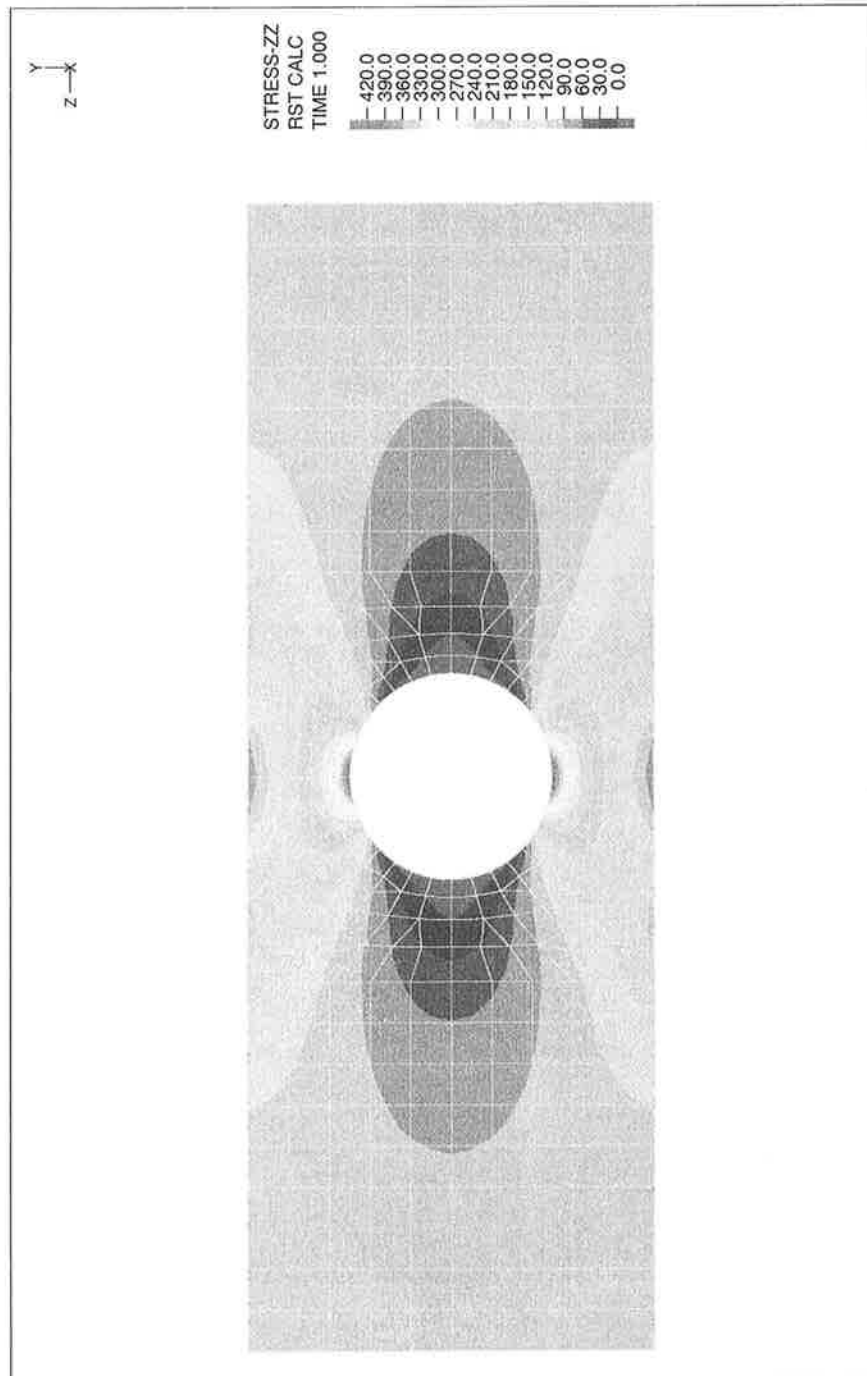


Figura 2.17: Diagrama de banda para a tensão  $\sigma_{zz}$ .

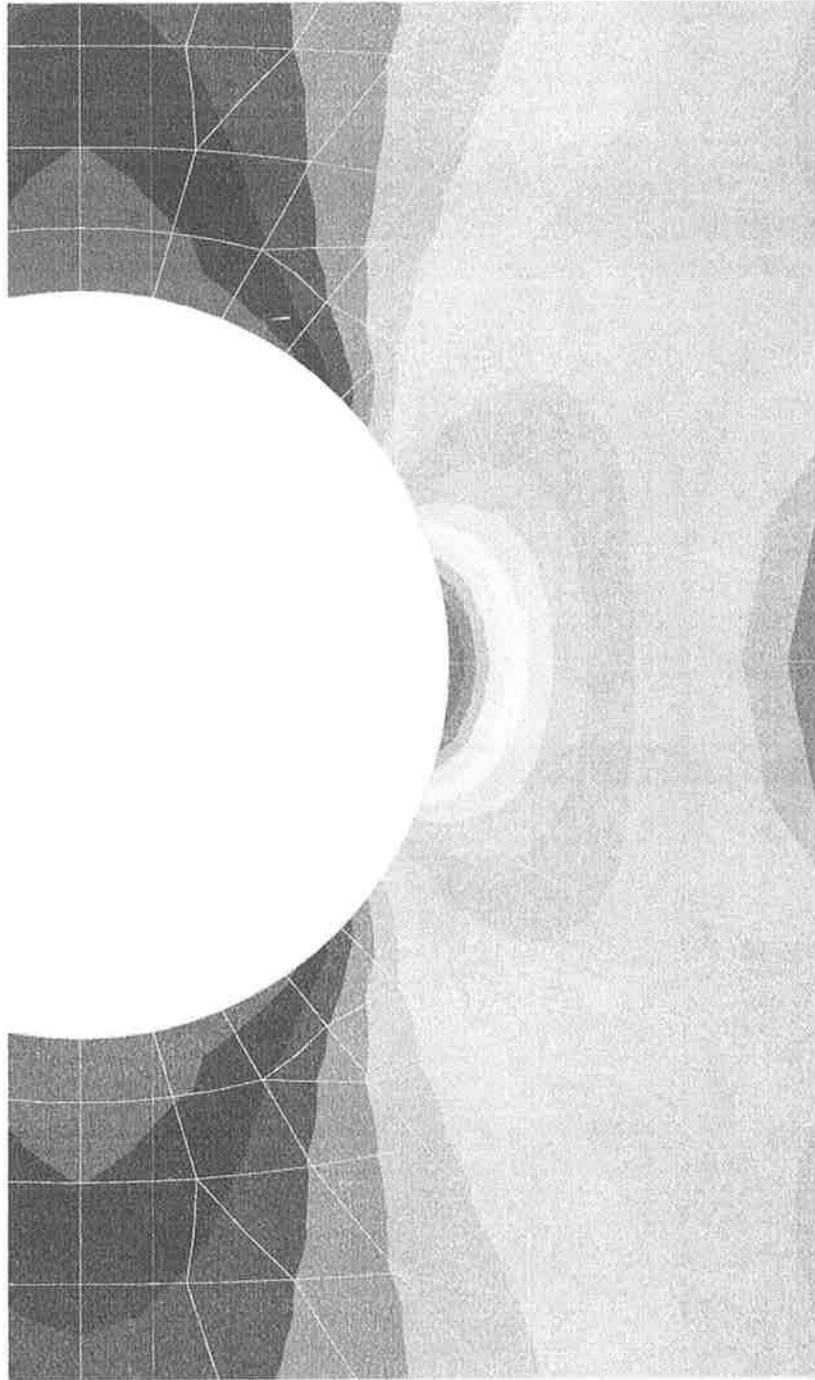


Figura 2.18: Detalhe do diagrama de banda para a tensão  $\sigma_{zz}$ .

## 2.2 Estudo das Deformações

A discussão realizada na seção anterior mostrou que se faz necessária uma descrição mais completa das deformações de um sólido para se avançar rumo à formulação de problemas da mecânica das estruturas que não estão no âmbito da resistência dos materiais. Neste contexto, mostrou-se, por meio do estudo de um problema modelo, que os alongamentos lineares de uma fibra dependem tanto do ponto que se toma como origem da fibra como de sua direção. Adiante será discutido que a mudança de ângulo entre fibras é também um dado relevante para caracterizar o estado de deformação.

Essas informações, alongamento de fibras e mudança de ângulo entre fibras na vizinhança de um ponto, estarão bem caracterizadas se se conhecerem os deslocamentos de todos os pontos do sólido. Essa observação sugere o caminho que será seguido.

A partir de um estudo cinemático do movimento serão extraídas as informações que caracterizam o estado de deformação em um ponto e que possibilitam a formulação, do ponto de vista do estudo das deformações, de problemas da elasticidade linear.

Considere-se a idealização de um **sólido deformável** como conjunto de pontos. Denomina-se **configuração** do sólido a um dado conjunto de posições ocupado pelos pontos do sólido. Na Figura 2.19 mostra-se, esquematicamente, uma configuração  $V$  de um sólido deformável.

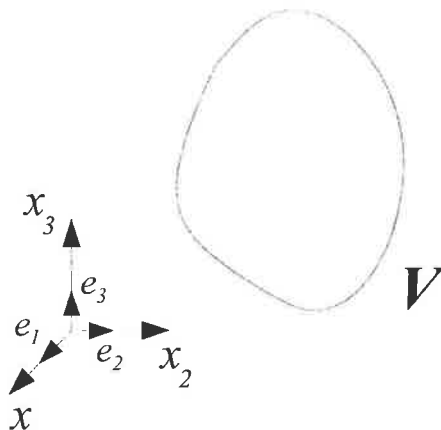


Figura 2.19: Configuração  $V$  de um sólido deformável.

Suponha-se que a partir da configuração  $V$  o sólido se deforma sob carregamento ou outras ações. A deformação fica bem caracterizada pelo conhecimento da nova posição ocupada pelos pontos do sólido, ou seja, a nova configuração  $V^*$ . Na Figura 2.20 mostram-se as duas configurações  $V$  e  $V^*$ .

Considere um ponto  $P$  do sólido que ocupa na configuração  $V$  a posição definida pelo vetor<sup>1</sup>

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$$

Devido à deformação o ponto  $P$  passa a ocupar na configuração  $V^*$  a posição definida

<sup>1</sup>Representa-se um vetor  $\mathbf{v}$  usando o negrito. Quando se está representando o vetor  $\mathbf{v}$  em uma base usa-se  $\{v\}$  ou em componentes  $\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$ .



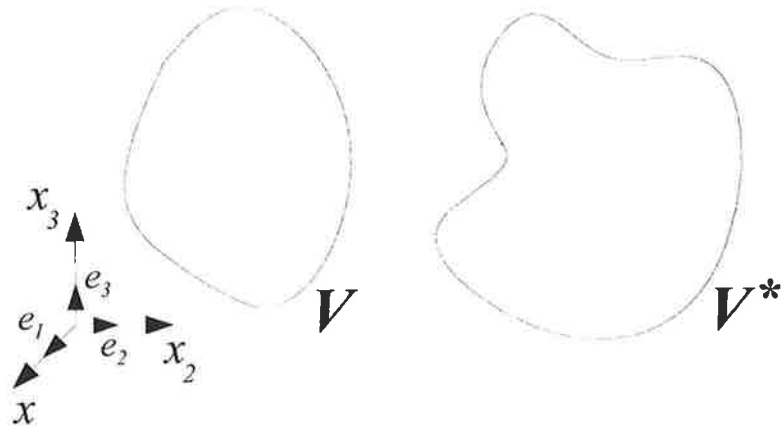


Figura 2.20: Duas configurações do sólido definindo uma deformação.

pelo vetor

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^3 y_i \mathbf{e}_i$$

sendo, então, representado por  $P'$  e tendo, portanto, um deslocamento dado pelo vetor

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$$

A Figura 2.21 esquematiza as definições acima.

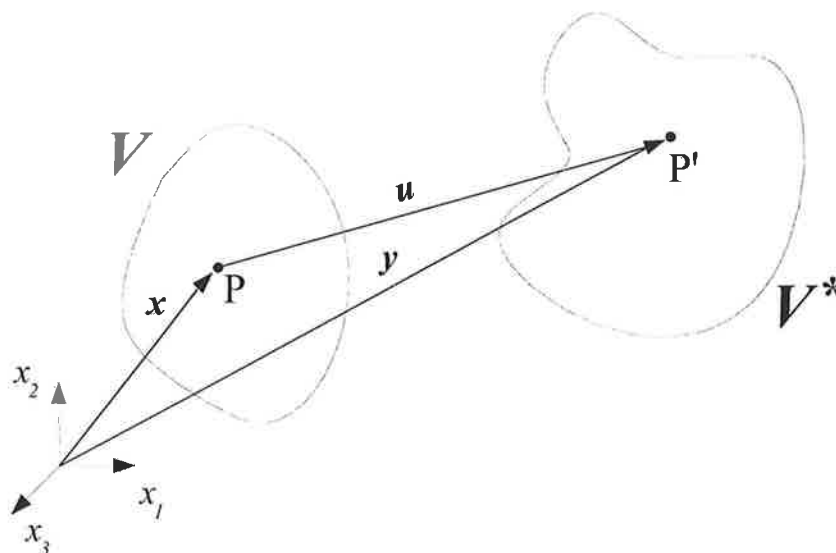


Figura 2.21: Vetores posição e vetor deslocamento.

Objetivando esclarecer as definições acima, considere-se o exemplo a seguir que estuda deformações que correspondem a movimentos de corpo rígido no plano.

**Exemplo 1** Considere um sólido prismático que tem seção transversal paralela ao plano  $x_1, x_2$ , como esquematizado na Figura 2.22

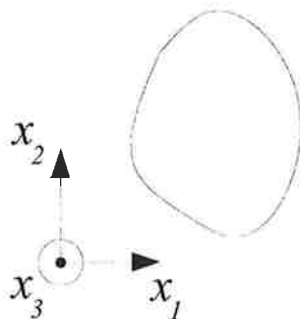


Figura 2.22: Seção transversal do sólido.

Caracterize o campo de deslocamentos para:

- (i) uma translação de corpo rígido na direção de  $x_1$  de intensidade  $\alpha$ .
- (ii) uma rotação infinitesimal de corpo rígido de intensidade  $d\varphi$  em torno do eixo  $x_3$ .

Solução

- (i) A solução deste item é imediata. Basta reconhecer que para qualquer ponto do sólido

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Formalmente

$$\begin{aligned}u_1(x_1, x_2, x_3) &= \alpha \\u_2(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\u_3(x_1, x_2, x_3) &= 0\end{aligned}$$

- (ii) Seja um ponto genérico  $P$  como representado na Figura 2.23. Nessa figura também se indica a posição do ponto  $P$  após a rotação, denotando-o por  $P'$

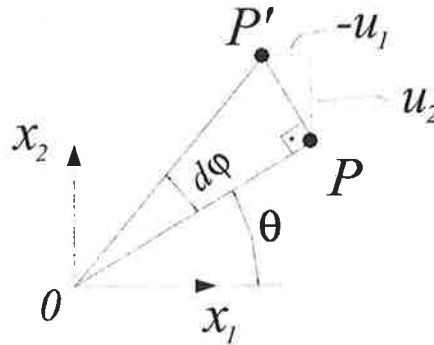


Figura 2.23: Rotação de um ponto genérico do sólido

Como a rotação é infinitesimal, deve-se tomar o deslocamento sobre a tangente ao raio  $OP$ . Então

$$\begin{aligned}-u_1 &= d\varphi \|OP\| \operatorname{sen}\theta \\u_2 &= d\varphi \|OP\| \operatorname{cos}\theta\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}x_1 &= \|OP\| \operatorname{cos}\theta \\x_2 &= \|OP\| \operatorname{sen}\theta\end{aligned}$$

que leva a

$$\begin{aligned}u_1 &= -d\varphi x_2 \\u_2 &= d\varphi x_1\end{aligned}$$

Formalmente

$$\begin{aligned}u_1(x_1, x_2, x_3) &= -d\varphi x_2 \\u_2(x_1, x_2, x_3) &= d\varphi x_1 \\u_3(x_1, x_2, x_3) &= 0\end{aligned}$$

Como discutido na Seção 1 os alongamentos lineares das fibras de um sólido dependem de sua direção e do ponto que define sua origem. Para que não se tivesse também a dependência do tamanho da fibra considerou-se, por um processo de limite, as fibras tão pequenas quanto se quisesse. Esse resultado pode ser obtido diretamente considerando-se as fibras na configuração indeformada como infinitesimais. Esse será o caminho a ser trilhado a seguir. Tome-se, então, a partir do ponto  $P$ , na configuração  $V$  suposta como

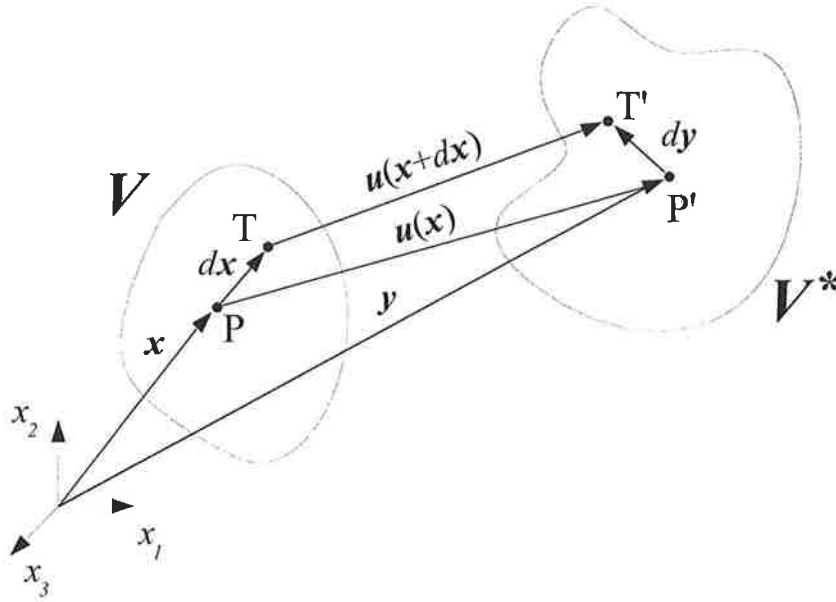


Figura 2.24: Fibras infinitesimais na configuração indeformada e deformada.

indeformada, uma fibra infinitesimal definida pelo vetor  $\mathbf{dx}$ ,  $\{dx\}^T = \{dx_1 \ dx_2 \ dx_3\}$ , onde  $dx_i$  são infinitesimais.

Devido à deformação, a essa fibra  $\mathbf{dx}$  corresponderá a fibra  $\mathbf{dy}$ , também infinitesimal, sua imagem na configuração  $V^*$ , configuração essa que é referida como deformada. Tal situação está representada na Figura 2.24.

Tem-se que

$$\mathbf{dy} = \mathbf{dx} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{dx}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

em componentes

$$dy_i = dx_i + u_i(\mathbf{x} + \mathbf{dx}) - u_i(\mathbf{x}). \quad (2.17)$$

Lembre-se que

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x} + \mathbf{dx}) &= u_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) \\ &= u_i(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Substituindo (2.18) em (2.17) resulta

$$dy_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 \quad (2.19)$$

Pode-se escrever a expressão acima matricialmente

$$\begin{Bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{dy} = \mathbf{dx} + \nabla \mathbf{u} \mathbf{dx} \quad (2.20)$$

que pode ser reescrita ainda como

$$d\mathbf{y} = (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}) d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{x}$$

onde

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}) \quad (2.21)$$

O operador linear<sup>2</sup>  $\nabla\mathbf{u}$  é chamado **gradiente dos deslocamentos** e o operador  $\mathbf{F}$  é chamado **gradiente das deformações**. Destaca-se que tanto o gradiente dos deslocamentos como o gradiente das deformações permitem relacionar fibras infinitesimais na configuração indeformada ( $d\mathbf{x}$ ) às suas imagens na configuração deformada ( $d\mathbf{y}$ ) (ver equações (2.20) e (2.21)).

Reconhece-se, ainda, que para uma dada deformação, ou equivalentemente, para um dado campo de deslocamentos, os operadores  $\mathbf{F}$  e  $\nabla\mathbf{u}$  ficam bem definidos para todos os pontos do sólido. Tomando um ponto em particular, qualquer fibra infinitesimal a partir desse ponto será relacionada com sua imagem na configuração deformada pelo mesmo operador  $\mathbf{F}$  (ou  $\nabla\mathbf{u}$ ). Portanto,  $\mathbf{F}$  (ou  $\nabla\mathbf{u}$ ) “contém” toda a informação sobre a deformação na vizinhança de um ponto. Portanto, deve ser possível obter os alongamentos lineares de fibras originárias em um ponto por meio do operador  $\mathbf{F}$  (ou  $\nabla\mathbf{u}$ ) para esse mesmo ponto.

Apresentam-se a seguir algumas manipulações que permitem calcular  $\varepsilon_\ell$  a partir de  $\mathbf{F}$ .

Para tal, considere-se uma deformação genérica como a definida na Figura 2.25. Quer-se determinar o alongamento linear de uma fibra infinitesimal  $d\mathbf{x}$ , que tem imagem na configuração deformada  $d\mathbf{y}$ . Sejam  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{m}'$  versores nas direções de  $d\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{y}$ , respectivamente. Sejam ainda  $ds$  e  $ds^*$  os comprimentos das fibras  $d\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{y}$ .

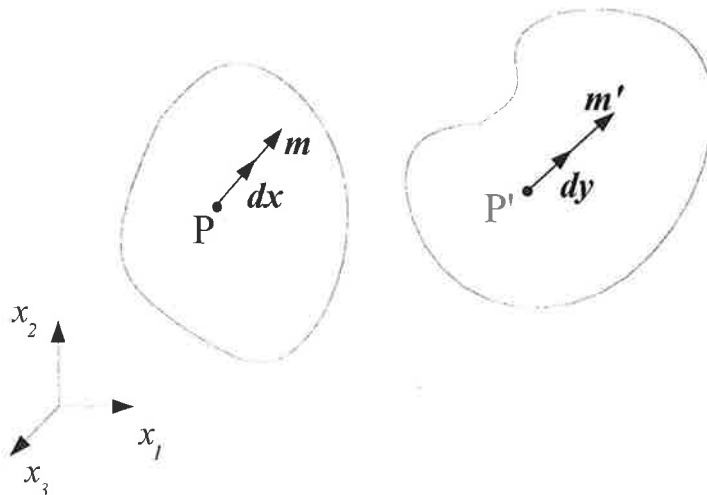


Figura 2.25: Fibras infinitesimais nas configurações deformada e indeformada.

Então

$$ds = \|d\mathbf{x}\| = ((dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.22)$$

$$ds^* = \|d\mathbf{y}\| = ((dy_1)^2 + (dy_2)^2 + (dy_3)^2)^{\frac{1}{2}}$$

<sup>2</sup>Um operador linear  $\mathbf{T}$  é uma aplicação  $\mathbf{T} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  que atende propriedades de linearidade.  $\mathbf{E}$  é um espaço vetorial. Para os objetivos deste texto  $\mathbf{E}$  será sempre o espaço de vetores da geometria Euclidiana. Será usada a notação em negrito para representar um operador linear  $\mathbf{T}$ . Quando  $\mathbf{E}$  é o espaço de vetores da geometria o operador  $\mathbf{T}$  é representado em uma base por uma matriz de dimensão  $3 \times 3$ , denotada então por  $[T]$

e o alongamento linear será dado por

$$\varepsilon_\ell = \frac{ds^* - ds}{ds} = \frac{ds^*}{ds} - 1. \quad (2.23)$$

Considerando a equação(2.22)

$$ds^* = \|\mathbf{dy}\| = \sqrt{\mathbf{dy} \cdot \mathbf{dy}} = \sqrt{\mathbf{Fdx} \cdot \mathbf{Fdx}}.$$

Seja  $\mathbf{F}^T$  o operador transposto<sup>3</sup> de  $\mathbf{F}$ . Sejam ainda  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  dois vetores quaisquer. Chamando-se  $\mathbf{v} = \mathbf{Fa}$  pode-se escrever

$$\mathbf{Fa} \cdot \mathbf{Fb} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{Fb} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{v} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{Fa} \quad (2.24)$$

onde utilizou-se na dedução acima a definição de operador transposto.

Então utilizando-se (2.24)

$$ds^* = \sqrt{\mathbf{dx} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{Fdx}}$$

e resulta

$$\varepsilon_\ell = \frac{ds^*}{ds} - 1 = \frac{\sqrt{\mathbf{dx} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{Fdx}}}{\sqrt{\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx}}} - 1$$

Usando que a composição  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  de dois operadores lineares é um operador linear e reconhecendo-se que  $\mathbf{dx} = ds \mathbf{m}$  tem-se que

$$\varepsilon_\ell = \frac{ds \sqrt{\mathbf{m} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{Fm}}}{ds \sqrt{\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}}} - 1$$

$$\varepsilon_\ell = \sqrt{\mathbf{m} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{Fm}} - 1 \quad (2.25)$$

A expressão acima fornece de forma exata o alongamento linear de uma fibra infinitesimal que tem direção dada por  $\mathbf{m}$  na configuração de referência, não importando a magnitude dos deslocamentos envolvidos na deformação. Como o objetivo presente é a discussão e formulação da elasticidade linear para a qual os deslocamentos são supostos infinitesimais, investiga-se a simplificação da expressão (2.25) quando se consideram os deslocamentos como infinitesimais.

<sup>3</sup>Seja um operador  $\mathbf{A} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ . Define-se  $\mathbf{A}^T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  o operador  $\mathbf{A}^T$  que satisfaz a seguinte relação

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{Ax} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{E}.$$

O operador  $\mathbf{A}^T$  é denominado operador transposto de  $\mathbf{A}$ .

Quando um operador e seu transposto são iguais, por exemplo,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$  diz-se que  $\mathbf{T}$  é um operador simétrico.

Quando um operador  $\mathbf{A}$  é representado em uma base por uma matriz  $[A]$  seu transposto  $\mathbf{A}^T$  será representado nessa mesma base pela matriz transposta  $[A]^T$ .

Portanto, operadores simétricos quando representados em uma base levam a matrizes simétricas.

Usando a equação (2.21)

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^T \mathbf{F} &= (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}\end{aligned}$$

Como se está interessado em deformações infinitesimais e as componentes de  $\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}$  envolvem termos do tipo  $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$  pode-se desprezar  $\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}$  em relação a  $\nabla \mathbf{u}$ .

Considere-se um outro operador linear definido por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u}]. \quad (2.26)$$

Em componentes  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se escreve

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{1}{2} \left( [\nabla \mathbf{u}]^T + [\nabla \mathbf{u}] \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Nota-se que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é um operador simétrico ( $[\boldsymbol{\varepsilon}] = [\boldsymbol{\varepsilon}]^T$ ). O operador  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é chamado de tensor das deformações infinitesimais.

Considerando a definição de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dada em (2.26), quando se tem deformações infinitesimais pode-se escrever

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.28)$$

A equação (2.25) pode então ser reescrita como

$$\varepsilon_\ell = \sqrt{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{m}} - 1 = (1 + 2\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m})^{\frac{1}{2}} - 1 \quad (2.29)$$

Pode-se usando (2.27), verificar que

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m} = \{m\}^T [\boldsymbol{\varepsilon}] \{m\} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{du_i}{dx_j} m_i m_j \quad (2.30)$$

Substituindo a identidade  $(1 + \delta)^s = (1 + s\delta + \frac{s(s-1)}{2}\delta^2 + \dots)$  em (2.29) chega-se a

$$\varepsilon_\ell = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m}) (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m}) + \dots - 1.$$

Levando-se em consideração (2.30) e desprezando os termos de ordem superior (quadráticos, cúbicos etc) em  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ , em relação a  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ , pode-se, a partir de (2.29), chegar a

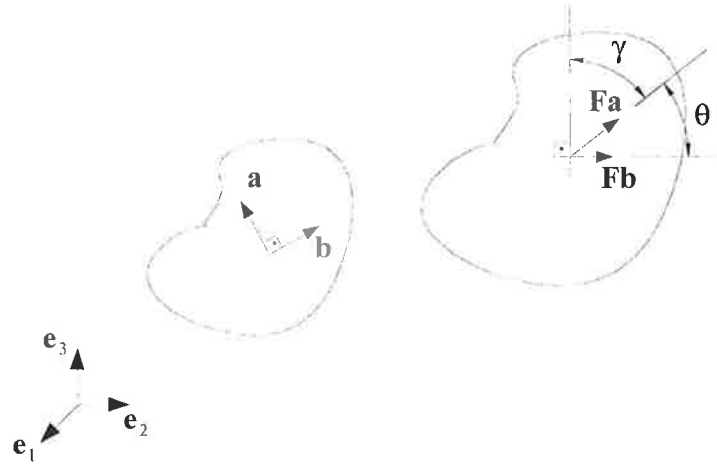


Figura 2.26: Distorção entre duas fibras infinitesimais

$$\varepsilon_\ell = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m} = \{m\}^T [\boldsymbol{\varepsilon}] \{m\} \quad (2.31)$$

Portanto o alongamento linear  $\varepsilon_\ell$  de qualquer fibra infinitesimal com origem em um ponto  $P$  e direção definida por  $\mathbf{m}$  fica determinado pelo tensor das deformações nesse ponto, sendo dado pela equação (2.31).

Considerem-se duas fibras infinitesimais que na configuração de referência são ortogonais e cujas direções são determinadas pelos versores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  como indicados na Figura 2.26.

As direções dessas fibras na configuração deformada são dadas por  $\mathbf{Fa}$  e  $\mathbf{Fb}$  como mostrado também na Figura 2.26. Define-se como distorção entre essas fibras o ângulo  $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre as fibras na configuração deformada. A distorção  $\gamma$  está representada na Figura 2.26.

Tem-se pela definição de produto escalar que

$$\mathbf{Fa} \cdot \mathbf{Fb} = \|\mathbf{Fa}\| \|\mathbf{Fb}\| \cos \theta \quad (2.32)$$

mas

$$\cos \theta = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \text{sen } \gamma$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Fa}\| &= \sqrt{\mathbf{Fa} \cdot \mathbf{Fa}} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{Fa}} \\ \|\mathbf{Fb}\| &= \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{Fb}} \end{aligned}$$

Considerando a relação dada por (2.28)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Fa}\| &= \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{Fa}} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{a}} \\ &= \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{a}} \\ &= (1 + 2 \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{a})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Retornando à equação (2.32)

$$\text{sen } \gamma = \frac{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{a}}{\sqrt{1 + 2\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{a}} \sqrt{1 + 2\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{b}}}$$



Como as deformações são infinitesimais pode-se fazer  $\gamma \cong \text{sen } \gamma$  e notando-se que  $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{a}$  e  $\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{b}$  são os alongamentos lineares nas direções  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  pode-se também desprezá-los em relação à unidade.

Resulta

$$\gamma = 2 \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{a} = 2 \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{b}$$

já que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é um operador simétrico. Utilizou-se que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  pois  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são versores ortogonais.

## 2.3 Interpretação das componentes do tensor das deformações infinitesimais

Seja o tensor das deformações infinitesimais em um ponto dado por

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

O alongamento linear de uma fibra infinitesimal na direção do eixo  $x_1$  é dado por

$$\varepsilon_\ell = \{e_1\}^T [\boldsymbol{\varepsilon}] \{e_1\}$$

onde  $\{e_1\}$  é o versor na direção do eixo  $x_1$ , ou

$$\varepsilon_\ell = \{ 1 \ 0 \ 0 \} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

que leva a

$$\varepsilon_\ell = \varepsilon_{11}.$$

Ou seja,  $\varepsilon_{11}$  é o alongamento linear de uma fibra infinitesimal na direção de  $x_1$ .

Analogamente, chega-se a que  $\varepsilon_{22}$  e  $\varepsilon_{33}$  são os alongamentos lineares de fibras infinitesimais nas direções de  $x_2$  e  $x_3$  respectivamente.

A distorção entre duas fibras infinitesimais que na configuração de referência têm as direções dos eixos  $x_1$  e  $x_2$  pode ser calculada por

$$\begin{aligned} \gamma &= 2 \{e_1\}^T [\boldsymbol{\varepsilon}] \{e_2\} \\ &= \{ 1 \ 0 \ 0 \} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

que leva a

$$\gamma = 2\varepsilon_{12} \tag{2.33}$$

e, devido à simetria de  $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ ,  $\gamma = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21}$ .

Analogamente, mostra-se que as distorções entre fibras infinitesimais nas direções  $x_1$  e  $x_3$ , e  $x_2$  e  $x_3$  são dadas, respectivamente, por  $\gamma = 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31}$  e  $\gamma = 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32}$ .

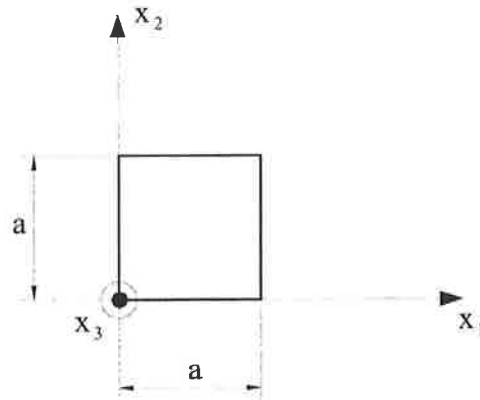


Figura 2.27: Bloco na configuração indeformada

**Exemplo 2** Considere-se um bloco tal que uma seção genérica paralela ao plano  $x_1x_2$  está representada na Figura 2.27 para a configuração indeformada.

A configuração deformada fica caracterizada pelo conhecimento da posição dos pontos nessa configuração, i.e.,

$$y_1 = x_1 + kx_2$$

$$y_2 = x_2$$

$$y_3 = x_3$$

- (i) Calcule o campo de deslocamentos
- (ii) Calcule o tensor das deformações
- (iii) Represente esquematicamente a configuração deformada.

### Solução

- (i) O campo de deslocamentos é dado por

$$u_i = y_i - x_i$$

o que leva a

$$u_1 = y_1 - x_1 = kx_2$$

$$u_2 = y_2 - x_2 = 0$$

$$u_3 = y_3 - x_3 = 0$$

- (ii) Usando a relação deslocamento-deformação

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Então

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{k}{2} \\ \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0\end{aligned}$$

- (iii) Representa-se, na Figura 2.28, de forma magnificada (os deslocamentos são considerados infinitesimais), a configuração deformada em linha cheia e a configuração indeformada em linha tracejada.

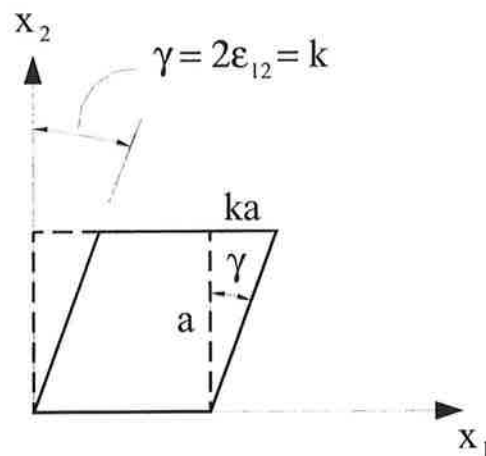


Figura 2.28: Configurações deformada e indeformada.

Indica-se também na Figura 2.28 a distorção entre fibras paralelas a  $x_1$  e  $x_2$  que para este caso é a mesma para todos os pontos do sólidos. Dessa forma, como também indicado na Figura 2.28 pode-se calcular  $\gamma$  diretamente observando as configurações deformada e indeformada por  $\gamma = \frac{ka}{a} = k$ .

É bastante usual utilizar-se a notação técnica. Nessa notação representam-se os eixos do sistema de referência por  $x$ ,  $y$  e  $z$ , ou seja  $x \equiv x_1$ ,  $y \equiv x_2$ ,  $z \equiv x_3$  e os deslocamentos por  $u$ ,  $v$  e  $w$ , isto é,  $u \equiv u_1$ ,  $v \equiv u_2$ ,  $w \equiv u_3$ .

Nessa notação as componentes do tensor das deformações escrevem-se

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Considerando a relação (2.33) representam-se as distorções para pares de fibras paralelas aos eixos de referência

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz}.\end{aligned}$$

Considerando-se o estado de deformações em um ponto, é relevante estudar-se a variação dos alongamentos lineares devido à variação das direções em que se tomam as fibras. Por exemplo, quer-se a responder questões como: Para qual direção o alongamento linear atinge o seu máximo? E o seu mínimo?

Esse estudo é realizado de forma direta e eficiente valendo-se de alguns desenvolvimentos ligados à álgebra linear. Esses mesmos desenvolvimentos serão também de valia para o estudo da variação das tensões em um ponto. Abre-se, portanto, um parêntese para resgatar esses desenvolvimentos da álgebra linear.

## 2.4 Vetores e valores próprios de operadores

Considere um operador linear  $\mathbf{T} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ , onde  $\mathbf{E}$  é o espaço de vetores da geometria euclidiana.

Se existirem  $\lambda \in \mathcal{R}$  e  $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , tal que

$$\mathbf{T}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{2.34}$$

diz-se que  $\lambda$  é um valor próprio de  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{x}$  um vetor próprio associado ao valor próprio  $\lambda$ .

Na Figura 2.29 representam-se pictorialmente duas situações. A primeira situação, a qual é a que mais comumente ocorre, mostra, a ação do operador  $\mathbf{T}$  em um vetor  $\mathbf{y}$  qualquer, levando ao vetor  $\mathbf{T}\mathbf{y}$ , que, em geral, tem uma direção diferente da de  $\mathbf{y}$ . A segunda situação mostra que o vetor  $\mathbf{x}$  e o vetor  $\mathbf{T}\mathbf{x}$  têm a mesma direção. Nesse caso  $\mathbf{x}$  é um vetor próprio e o fator multiplicativo que relaciona  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{T}\mathbf{x}$  o valor próprio. É muito comum usar a terminologia autovalor e autovetor com o mesmo significado de valor próprio e vetor próprio respectivamente.

É imediato reconhecer-se que, se  $\mathbf{x}$  é um autovetor, então  $\alpha\mathbf{x}$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}$ , também é um autovetor. De fato,

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{x})$$

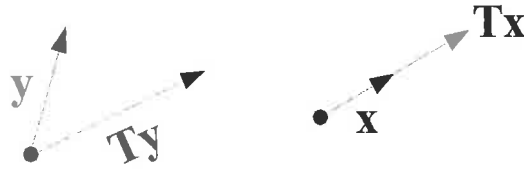


Figura 2.29: Representação esquemática da ação de um operador para um vetor genérico  $y$  e para um vetor próprio  $x$

Portanto  $\alpha x$  é também um vetor próprio associado a  $\lambda$ . Todos os vetores que têm a mesma direção de um vetor próprio também são vetores próprios. Dessa forma é usual falar-se em direção própria e caracterizá-la por um versor.

Para se determinarem os autovalores e autovetores de um operador  $T$  a equação básica a ser usada é (2.34). Seja  $h$  o autovetor procurado. Impõe-se ainda que  $h$  seja um versor. Então

$$Th = \lambda h \quad (2.35)$$

e

$$\|h\| = 1. \quad (2.36)$$

Reescrevendo-se (2.35)

$$Th - \lambda h = (T - \lambda I) h = 0 \quad (2.37)$$

Escolhendo-se uma base  $(e_1, e_2, e_3)$  a equação (2.37) pode ser escrita matricialmente por

$$([T] - \lambda[I]) \{h\} = \{0\}$$

ou

$$\begin{bmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

A solução trivial  $h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0$  do sistema acima não atende à condição de que o autovetor  $h$  seja não nulo ( $\|h\| = 1$ ).

Para que o sistema (2.38) admita soluções diferentes da trivial o determinante da matriz que define o sistema deve ser nulo

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo-se o determinante acima chega-se à chamada equação característica

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (2.39)$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= T_{11} + T_{22} + T_{33} \\ I_2 &= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{33} & T_{31} \\ T_{13} & T_{11} \end{vmatrix} \\ I_3 &= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$I_1, I_2, I_3$  são chamados de invariantes.

A solução da equação característica leva à determinação dos autovalores  $\lambda$ . Para cada autovalor, pode-se, considerando o sistema (2.38) e a condição adicional

$$\|\mathbf{h}\| = 1 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$$

determinar o correspondente autovetor  $\mathbf{h}$ . Detalha-se tal procedimento por meio de um exemplo.

Pode-se mostrar que os autovalores de um operador simétrico são reais. Um resultado igualmente importante é que autovetores de um operador simétrico associados a autovalores distintos são ortogonais. De fato, sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  dois autovalores de um operador simétrico  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_2$  os autovetores associados a esses autovalores. Como o operador é simétrico

$$\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{T}\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{T}\mathbf{h}_1$$

mas

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\mathbf{h}_1 &= \lambda_1 \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{T}\mathbf{h}_2 &= \lambda_2 \mathbf{h}_2\end{aligned}$$

Resulta

$$\mathbf{h}_1 \cdot \lambda_2 \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2 \cdot \lambda_1 \mathbf{h}_1$$

ou

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 = 0$$

Como  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e  $\mathbf{h}_1 \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{h}_2 \neq \mathbf{0}$  conclui-se que  $\mathbf{h}_1 \perp \mathbf{h}_2$ .

Considerando a solução do problema de determinação dos autovalores e autovetores (versores) de um operador simétrico identificam-se três possíveis situações distintas.

1ª Situação: Os três autovalores são distintos.

Pode-se, pelo resultado anterior, concluir-se diretamente que os autovetores serão ortogonais entre si.

2ª Situação: Dois autovalores são iguais e o terceiro distinto.

O autovalor distinto leva à determinação de um autovetor único. Os autovetores correspondentes aos autovalores iguais devem ser ortogonais ao autovetor associado ao autovalor distinto, portanto, pertencentes ao plano ortogonal a esse autovetor. Mostra-se que qualquer vetor pertencente a esse plano é um autovetor.

3ª Situação: Têm-se três autovalores iguais.

Mostra-se que nesse caso todos os vetores são autovetores.

Dado um operador simétrico  $\mathbf{T}$  pode-se concluir, pelas considerações acima, que é sempre possível construir-se uma base triortogonal formada por versores próprios de  $\mathbf{T}$ .

Seja  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$  essa base. O operador  $\mathbf{T}$  é representado nessa base pela matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

já que nessa base

$$\{h_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \{h_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \{h_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

e deve-se obedecer

$$\begin{aligned} [T] \{h_1\} &= \lambda_1 \{h_1\} \\ [T] \{h_2\} &= \lambda_2 \{h_2\} \\ [T] \{h_3\} &= \lambda_3 \{h_3\} \end{aligned}$$

É comum ordenarem-se os autovalores tal que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3.$$

Pode-se definir uma forma quadrática como sendo a aplicação associada a um operador linear simétrico  $\mathbf{T}$ ,  $t: \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{R}$  definida por

$$t(\mathbf{x}) = \mathbf{T}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}.$$

A terminologia forma quadrática está ligada à seguinte propriedade

$$\begin{aligned} t(\alpha\mathbf{x}) &= \mathbf{T}(\alpha\mathbf{x}) \cdot \alpha\mathbf{x} = \alpha^2 \mathbf{T}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \\ &= \alpha^2 t(\mathbf{x}) \quad \forall \alpha \in \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Pode-se estudar a variação dos valores assumidos pela forma quadrática  $t(\mathbf{x})$  quando se consideram as diversas direções definidas por  $\mathbf{x}$ . Para tal tome-se  $\mathbf{x}$  como um versor, isto é,

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{h}_1 + x_2 \mathbf{h}_2 + x_3 \mathbf{h}_3$$

sendo

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1.$$

Escolhe-se como base,  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$  que é a base de versores próprios de  $\mathbf{T}$ , onde  $\mathbf{T}$  é o operador simétrico que define a forma quadrática.

Nessa base

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} t(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{T}\mathbf{x} \\ &= \{ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$t(\mathbf{x}) = \lambda_1 (x_1)^2 + \lambda_2 (x_2)^2 + \lambda_3 (x_3)^2 \quad (2.40)$$

Substituindo na equação acima

$$x_1^2 = 1 - (x_2)^2 - (x_3)^2$$

$$t(\mathbf{x}) = \lambda_1 (1 - (x_2)^2 - (x_3)^2) + \lambda_2 (x_2)^2 + \lambda_3 (x_3)^2$$

que leva a

$$t(\mathbf{x}) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)(x_2)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)(x_3)^2 \quad (2.41)$$

Como se ordenaram os autovalores de forma que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ , observando-se a equação (2.41) pode-se concluir que

$$t(\mathbf{x}) \leq \lambda_1$$

já que  $\lambda_2 - \lambda_1 \leq 0$  e  $\lambda_3 - \lambda_1 \leq 0$ .

Como  $t(\mathbf{h}_1) = \lambda_1$  conclui-se que  $\lambda_1$  é o valor máximo assumido por  $t(\mathbf{x})$ . Analogamente, substituindo-se  $(x_3)^2 = 1 - (x_1)^2 - (x_2)^2$  em (2.40) resulta

$$t(\mathbf{x}) = \lambda_3 + (\lambda_1 - \lambda_3)(x_1)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(x_2)^2$$

Considerando que  $\lambda_1 - \lambda_3 \geq 0$  e  $\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$  tem-se que

$$t(\mathbf{x}) \geq \lambda_3$$

e, como  $t(\mathbf{h}_3) = \lambda_3$  conclui-se que  $\lambda_3$  é o mínimo assumido pela forma quadrática.

A solução do problema de autovalores de  $\mathbf{T}$  já fornece a solução para o problema de máximo e mínimo da forma quadrática  $t(\mathbf{x})$  quando se varia a direção.



## 2.5 Estudo da variação das deformações. Deformações e direções principais

Pretende-se utilizar os resultados dos desenvolvimentos apresentados na seção anterior para o estudo da variação dos alongamentos lineares.

Considere-se, como representado na Figura 2.30, a configuração indeformada de um sólido na qual se escolhe um ponto qualquer  $P$ . A partir de  $P$  considere-se uma fibra infinitesimal  $d\mathbf{x}$  na direção do versor  $\mathbf{m}$ . O sólido é submetido a um estado de deformação que fica bem caracterizado pelo conhecimento de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  para seus pontos.

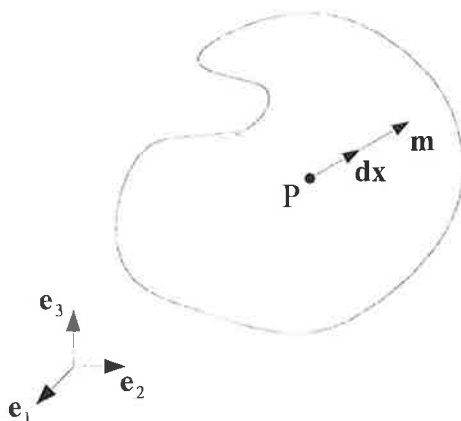


Figura 2.30: Configuração indeformada do sólido

Recorda-se que o alongamento linear da fibra  $d\mathbf{x}$  é dado por

$$\varepsilon_\ell(\mathbf{m}) = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{m} \quad (2.42)$$

A questão que se coloca é: para que direção ocorre o máximo alongamento linear e qual o valor desse alongamento? Analogamente, coloca-se a mesma questão para o mínimo alongamento.

Reconhece-se que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é um operador linear simétrico e que o alongamento linear na direção  $\mathbf{m}$  é dado pela forma quadrática associada a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  como explicitado pela equação (2.42). Pode-se então utilizar os resultados da seção anterior. Ou seja, considerando o problema de autovalores e autovetores para o operador  $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

e denominando-se os autovalores de

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$$

e os correspondentes autovetores de  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$ ,  $\mathbf{h}_3$ , tem-se que

- $\varepsilon_1$  é o máximo alongamento linear e ocorre para a direção  $\mathbf{h}_1$
- $\varepsilon_3$  é o mínimo alongamento linear e ocorre para a direção  $\mathbf{h}_3$ .

Na base dos autovetores  $\boldsymbol{\varepsilon}$  tem a seguinte representação matricial

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

o que mostra que as fibras nas direções de  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$ ,  $\mathbf{h}_3$  não sofrem distorções. Denominam-se  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  de deformações principais e  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$  e  $\mathbf{h}_3$  de direções principais.

**Exemplo 3** O estado de deformação em um ponto de um sólido deformável é caracterizado pelo tensor das deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$  que, na base ortonormal considerada, é dado por

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Determinar as deformações e direções principais de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

**Solução** A equação característica é dada por

$$\det(\boldsymbol{\varepsilon} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} -0,002 - \lambda & 0,001 & -0,001 \\ 0,001 & 0,003 - \lambda & 0,002 \\ -0,001 & 0,002 & 0,004 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sabe-se que a equação característica pode ser escrita como

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (2.43)$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0,005 \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{33} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{11} \end{vmatrix} = -8 \times 10^{-6} \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = -2,7 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

Resolvendo-se (2.43) chega-se a

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,00557 \\ \lambda_2 &= 0,00194 \\ \lambda_3 &= -0,0025 \end{aligned}$$

Pode-se determinar o autovetor associado a  $\lambda_1 = 0,00557$ , substituindo  $\lambda_1$  no sistema dado por (2.38).

$$\begin{bmatrix} -0,00757 & 0,001 & -0,001 \\ 0,001 & -0,00257 & 0,002 \\ -0,001 & 0,002 & -0,00157 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Como o sistema é indeterminado deve-se escolher duas equações linearmente independentes e considerar como equação adicional (2.36)

$$\begin{aligned} -0,00757h_1 + 0,001h_2 - 0,001h_3 &= 0 \\ 0,001h_1 - 0,00257h_2 + 0,002h_3 &= 0 \\ h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Solucionando (2.44) chega-se a

$$\begin{aligned}h_1 &= -0,03073 h_3 \\h_2 &= 0,76753 h_3 \\h_3 &= \pm 0,79304\end{aligned}$$

onde os sinais + ou - para  $h_3$  mostram que há dois versores próprios de sinais opostos. Para caracterizar a direção própria, pode-se escolher  $h_3 = 0,79304$ , que leva a

$$\begin{aligned}h_1 &= -0,02437 \\h_2 &= 0,60868 \\h_3 &= 0,79304\end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{h}_1 = -0,02437\mathbf{e}_1 + 0,60868\mathbf{e}_2 + 0,79304\mathbf{e}_3$$

Procedendo-se de forma análoga para  $\lambda_2 = 0,00194$  e  $\lambda_3 = -0,0025$  chega-se a

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_2 &= -0,3351\mathbf{e}_1 - 0,75236\mathbf{e}_2 + 0,56715\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{h}_3 &= 0,94187\mathbf{e}_1 - 0,25192\mathbf{e}_2 + 0,22230\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Observa-se que na base dos versores próprios  $(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$   $\varepsilon$  escreve-se

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0,00557 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00194 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0025 \end{bmatrix}$$

Consideram-se ainda, por meio de exemplos, casos clássicos de deformação

**Exemplo 4** Considere-se o cubo de aresta  $L$  representado na Figura 2.31.

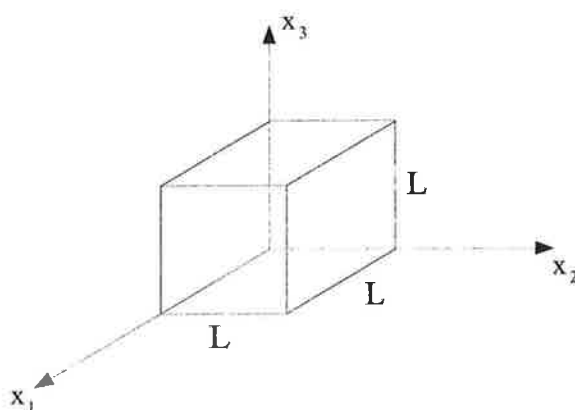


Figura 2.31: Sólido dado por um cubo.

Seja a configuração deformada definida na Figura 2.32.

- (i) Calcule por inspeção o tensor das deformações na base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
- (ii) Interprete o resultado

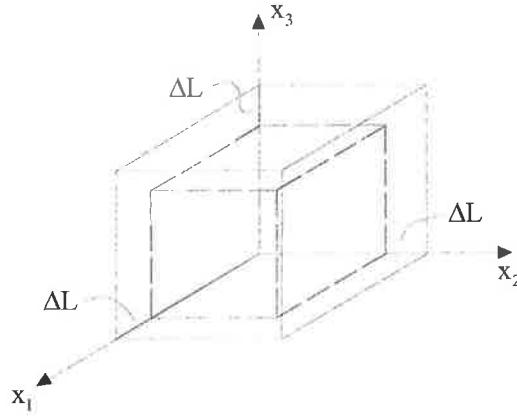


Figura 2.32: Configuração indeformada e deformada dadas pelos cubos de aresta  $L$ , representado em linha tracejada, e de aresta  $L + \Delta L$  representado em linha cheia.

**Solução:**

$$\varepsilon_{11} = \frac{(L + \Delta L) - L}{L} = \frac{\Delta L}{L}$$

como não há distorções entre fibras ortogonais paralelas a  $x_1x_2$  e  $x_1x_3$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = 0$$

Analogamente, chega-se a

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{33} = \frac{\Delta L}{L} \\ \varepsilon_{23} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, na base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta L}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta L}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta L}{L} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

- (ii) Conclui-se, pela observação da estrutura do tensor das deformações obtido, que as direções  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  são direções principais e que as deformações principais valem  $\frac{\Delta L}{L}$ . Neste caso, como os autovalores são iguais, deve-se, conforme discutido anteriormente, ter que todas as direções são direções principais. Como os autovalores são os mesmos para qualquer direção escolhida, deve-se obter o mesmo alongamento linear para qualquer direção. Seja  $\mathbf{m} = m_1\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + m_3\mathbf{e}_3$  um versor. O alongamento linear de uma fibra infinitesimal na direção do versor  $\mathbf{m}$  é dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon_\ell &= \{\mathbf{m}\}^T [\varepsilon] \{\mathbf{m}\} \\ &= \{ m_1 \quad m_2 \quad m_3 \} \begin{bmatrix} \frac{\Delta L}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta L}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta L}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix} \\ &= [(m_1)^2 + (m_2)^2 + (m_3)^2] \frac{\Delta L}{L} \end{aligned}$$

e, como  $\mathbf{m}$  é um versor,  $(m_1)^2 + (m_2)^2 + (m_3)^2 = 1$ , resultando

$$\varepsilon_\ell = \frac{\Delta L}{L}$$

conforme antecipado. Nota-se, ainda, que, por ter o tensor  $[\varepsilon]$  a representação dada em (2.45) para qualquer base ortonormal escolhida, não haverá distorção entre quaisquer duas fibras ortogonais escolhidas.

Este estado de deformação recebe o nome de estado de dilatação uniforme.

**Exemplo 5** Considere-se ainda como configuração indeformada aquela dada pelo cubo da Figura 2.31. Na Figura 2.33 representa-se a configuração deformada a ser considerada neste exemplo.

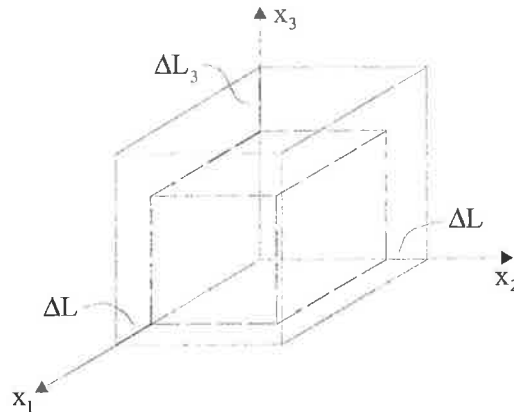


Figura 2.33: Configuração indeformada e deformada.

- (i) Calcule por inspeção o tensor das deformações na base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
- (ii) Interprete o resultado

**Solução:** Obtém-se diretamente, por inspeção

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = \frac{\Delta L}{L} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\Delta L_3}{L} \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0\end{aligned}$$

Portanto, na base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta L}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta L}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta L_3}{L} \end{bmatrix}$$

- (ii) Conclui-se, pela estrutura de  $[\varepsilon]$  que  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  é uma base de autovetores e que  $\frac{\Delta L}{L}$ ,  $\frac{\Delta L_3}{L}$  são os autovalores, sendo o autovalor  $\frac{\Delta L}{L}$  de multiplicidade 2. Portanto, como discutido anteriormente qualquer versor no plano  $x_1x_2$  será um autovetor com autovalor  $\frac{\Delta L}{L}$ .

De fato, seja  $\{m\}^T = \{ m_1 \ m_2 \ 0 \}$ ,  $(m_1)^2 + (m_2)^2 = 1$

$$[\varepsilon] \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta L}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta L}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta L_3}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta L}{L} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e o alongamento linear

$$\begin{aligned} \varepsilon_\ell(\mathbf{m}) &= \{ m_1 \ m_2 \ 0 \} \begin{bmatrix} \frac{\Delta L}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta L}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta L_3}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= [(m_1)^2 + (m_2)^2] \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{L}. \end{aligned}$$

**Exemplo 6** Considere a deformação descrita no Exemplo 2. Calcule as deformações e direções principais.

**Solução:** Do resultado obtido na solução do Exemplo 2 tem-se

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os invariantes são dados por

$$\begin{aligned} I_1 &= 0 \\ I_2 &= -\frac{k^2}{4} \\ I_3 &= 0 \end{aligned}$$

e a equação característica por

$$\lambda^3 - \frac{k^2}{4}\lambda = 0$$

que leva a

$$\lambda_1 = \frac{k}{2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\frac{k}{2}.$$

Substituindo na equação (2.38)

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tomando a 1ª e a 3ª equações, já que a 1ª e a 2ª são linearmente dependentes, e considerando que  $\|\mathbf{h}\| = 1$ , tem-se para  $\lambda = \frac{k}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{k}{2}h_1 - \frac{k}{2}h_2 &= 0 \\ -\frac{k}{2}h_3 &= 0 \\ h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

resultando

$$h_3 = 0 \quad , \quad h_1 = h_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para  $\lambda = 0$  chega-se

$$h_1 = h_2 = 0 \quad , \quad h_3 = 1$$

e para  $\lambda = -\frac{k}{2}$

$$h_3 = 0 \quad , \quad h_1 = -h_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mostra-se, pictorialmente, na Figura 2.34, considerando o plano  $x_1x_2$  os autovetores  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_3$ .

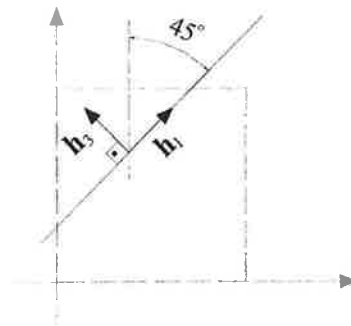


Figura 2.34: Representação das direções principais para um ponto genérico do sólido

# Capítulo 3

## Estudo das Tensões

### 3.1 Conceituação Clássica de Tensões

Considere um sólido deformável sob a ação de esforços externos. Serão considerados como esforços externos:

- Forças de volume: definidas como um campo vetorial de forças que a cada ponto do sólido associa um vetor  $\mathbf{f}^B$  que fornece a força por unidade de volume atuando naquele ponto. Um exemplo típico é o campo de forças de volume resultante da ação da gravidade.
- Forças de superfície: definidas como um campo vetorial de forças que a cada ponto da superfície do sólido associa um vetor  $\mathbf{f}^s$  que fornece a força por unidade de área atuando naquele ponto. As forças de superfície são, em geral, originárias do contato da superfície do sólido com outros sólidos ou também com fluidos.

Considere um sólido  $V$  em equilíbrio sob a ação de forças de volume  $\mathbf{f}^B$  e forças de superfície  $\mathbf{f}^s$ . Seja  $P$  um ponto no interior do sólido e considere um plano  $\alpha$  que passa por  $P$  e divide o sólido em duas partes, conforme esquematizado na Figura 3.1.

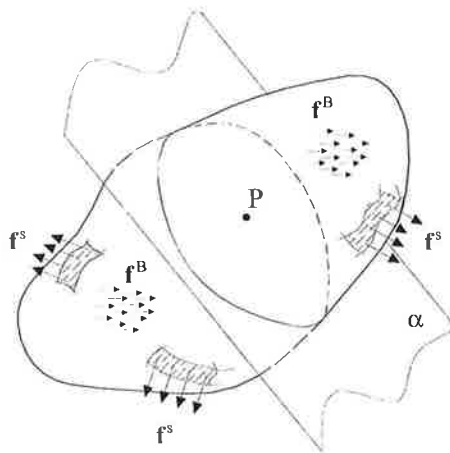


Figura 3.1: Sólido em equilíbrio sob a ação de forças de volume  $\mathbf{f}^B$  e de superfície  $\mathbf{f}^s$ .



A transmissão de esforços que deve ocorrer pelas superfícies definidas pela intersecção do plano  $\alpha$  com o sólido deve ser tal que assegure o equilíbrio de cada uma das partes, parte (I) e parte (II), consideradas isoladamente como mostrado na Figura 3.2.

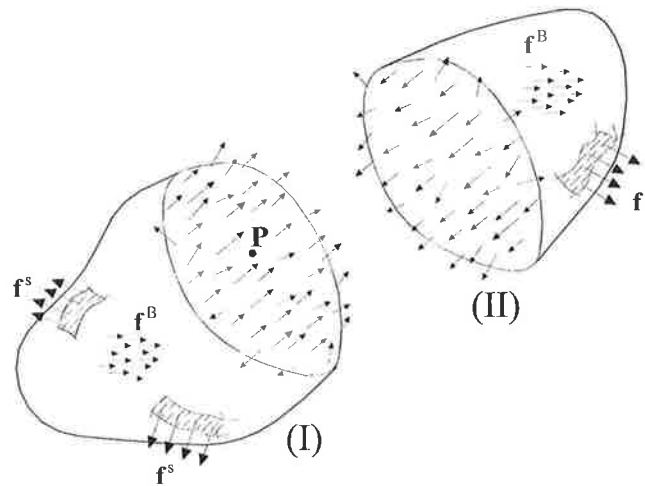


Figura 3.2: Equilíbrio das partes (I) e (II) do sólido seccionado pelo plano  $\alpha$ .

Os esforços internos que aparecem em (I) e (II) segundo a seção considerada estão esquematicamente representados na Figura 3.2.

Considere uma região  $\Delta S$  na seção de interesse que contém o ponto  $P$ , conforme indicado na Figura 3.3.

Seja  $\Delta \mathbf{F}$  a força resultante dos esforços internos atuantes em  $\Delta S$  pela ação da parte (II) na parte (I). Pode-se definir

$$\rho_m = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}$$

que é uma força média por unidade de superfície denominada tensão média no ponto  $P$  segundo o plano  $\alpha$  e considerando a área  $\Delta S$ . Com o objetivo de se chegar a uma medida local da força transmitida por unidade de área, considera-se o seguinte limite

$$\rho = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \rho_m$$

Define-se  $\rho$  como tensão no ponto  $P$  segundo o plano  $\alpha$  resultante da ação de (II) em (I). Como o plano  $\alpha$  fica bem definido pelo conhecimento da normal  $\mathbf{n}$  a esse plano (a parte interna corresponde ao semi-espaço definido pelo plano  $\alpha$  ao qual a parte I pertence), é usual expressar a dependência do plano por

$$\rho = \rho(P, \mathbf{n}).$$

É usual decompor a tensão  $\rho$  em duas parcelas: uma ortogonal ao plano, portanto na direção de  $\mathbf{n}$  e outra no plano, conforme indicado na Figura 3.4.

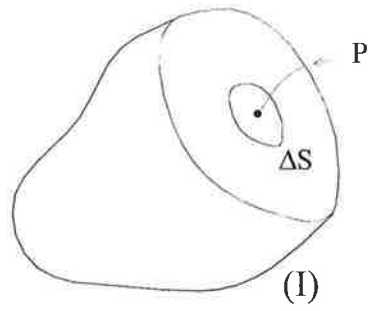


Figura 3.3: Região  $\Delta s$  selecionada em torno de  $P$ .

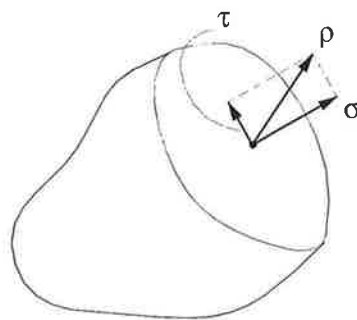


Figura 3.4: Decomposição da tensão nas componentes normal e tangencial

Então

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho} &= \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\sigma} &= (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n}\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é denominada tensão normal e  $\boldsymbol{\tau}$  tensão de cisalhamento.

A decomposição acima não é de caráter meramente formal. Tanto a tensão normal como a de cisalhamento têm interpretações físicas bastante distintas quando se considera o efeito de deformação associado.

### 3.2 Caracterização do estado de tensão em um ponto

Na discussão anterior seccionou-se o sólido por um plano e considerou-se o equilíbrio das duas partes resultantes. Na verdade, pode-se isolar qualquer parte do sólido porque as tensões que aparecerem e que representam a ação do restante do sólido sobre a parte sendo isolada devem garantir seu equilíbrio. Essa condição será utilizada diversas vezes para o estabelecimento de relações importantes entre tensões.

Nesse sentido, considere o paralelepípedo indicado na Figura 3.5 que envolve o ponto  $P$ .

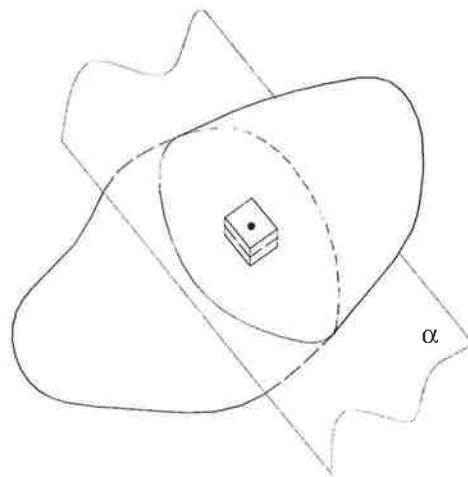


Figura 3.5: Paralelepípedo envolvendo o ponto  $P$ .

O paralelepípedo tem duas faces paralelas ao plano  $\alpha$  sendo que o plano  $\alpha$  o divide ao meio. O paralelepípedo pode ser isolado do restante do sólido, devendo-se considerar as tensões em suas faces e também as forças de volume. Mostra-se na Figura 3.6 um detalhamento do paralelepípedo isolado.

Considera-se a situação limite, onde  $\delta \rightarrow 0$ . Note que a “altura” do paralelepípedo pode ser muito pequena quando comparada à sua base (tão menor quanto menor for  $\delta$ ). A imposição da resultante nula leva a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}(P, \mathbf{n}) \delta^2 + \boldsymbol{\rho}(P, -\mathbf{n}) \delta^2 + \boldsymbol{\rho}(P, \mathbf{n}_1) \delta^3 + \boldsymbol{\rho}(P, -\mathbf{n}_1) \delta^3 + \\ \boldsymbol{\rho}(P, \mathbf{n}_2) \delta^3 + \boldsymbol{\rho}(P, -\mathbf{n}_2) \delta^3 + \mathbf{f}^B(P) \delta^4 = 0\end{aligned}$$

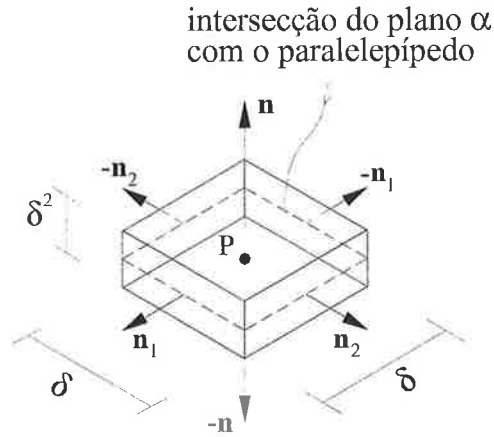


Figura 3.6: Detalhe do paralelepípedo isolado.

Considerou-se que, ao se escrever a equação anterior, no limite, quando  $\delta \rightarrow 0$  todas as faces tendem ao ponto  $P$  e que as tensões podem ser consideradas constantes para cada face. Desprezando-se os termos de ordem superior em  $\delta$  ( $\delta^3$  e  $\delta^4$  em relação a  $\delta^2$ ), resulta

$$\boldsymbol{\rho}(P, \mathbf{n}) = -\boldsymbol{\rho}(P, -\mathbf{n}). \quad (3.2)$$

Esse resultado mostra que, considerando o problema descrito na Figura 3.1, se a tensão atuando em  $P$  segundo  $\alpha$  devido à ação de (II) em (I) é representada por  $\boldsymbol{\rho}$ , então a tensão atuante em  $P$  segundo  $\alpha$  devido à ação de (I) em (II) será dada por  $-\boldsymbol{\rho}$ .

Pode-se adotar uma convenção para decompor, segundo a direção dos eixos do sistema de coordenadas, a tensão atuante em um plano paralelo a um dos planos coordenados. Para tanto, considere-se a Figura 3.7 na qual se representa a tensão atuante em um plano que tem normal  $\mathbf{e}_2$ . Define-se  $T_{22}$  como a componente de  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_2)$  na direção de  $\mathbf{e}_2$  e  $T_{12}$  e  $T_{32}$  as componentes nas direções de  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_3$  respectivamente, isto é,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_2) &= T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{32}\mathbf{e}_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 T_{i2}\mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Na Figura 3.8 mostram-se, além de  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_2)$ , as tensões e suas componentes para os planos definidos por  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ .

Tem-se

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^3 T_{ij}\mathbf{e}_i. \quad (3.3)$$

Mostra-se também na Figura 3.8 a tensão atuante, no mesmo ponto em que se definiu  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_2)$ , segundo um plano cuja normal é  $-\mathbf{e}_2$ . Essa tensão,  $\boldsymbol{\rho}(-\mathbf{e}_2)$  expressa a ação da parte (I) sobre (II) enquanto  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_2)$  a da parte (II) sobre (I). (Na Figura 3.8 mostra-se a parte (II) transladada verticalmente por uma conveniência de visualização). Tem-se então

$$\boldsymbol{\rho}(-\mathbf{e}_2) = -\boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_2) = -T_{12}\mathbf{e}_1 - T_{22}\mathbf{e}_2 - T_{32}\mathbf{e}_3$$

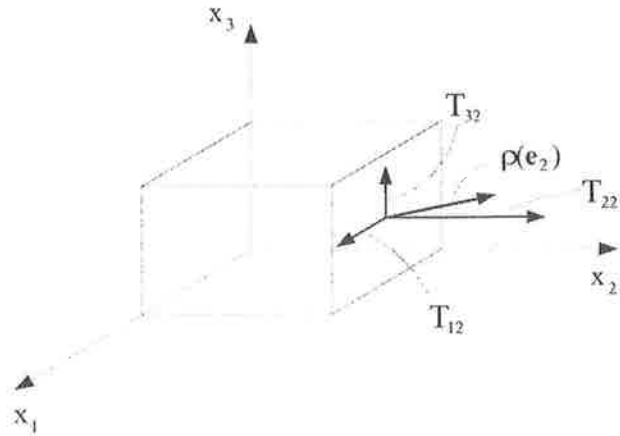


Figura 3.7: Tensão atuando em um plano que tem normal  $e_2$  e suas componentes

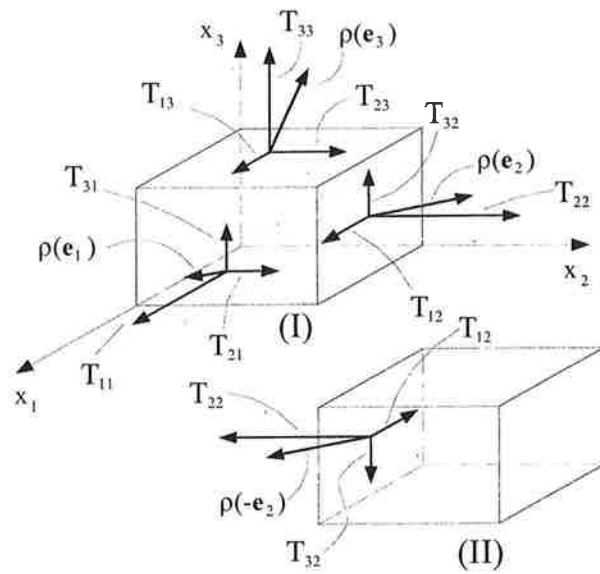


Figura 3.8: Componentes de tensão para planos coordenados

sendo os sentidos indicados para os  $T_{i2}$  aqueles correspondentes a valores positivos dessas componentes.

Note-se, pelas definições acima, que  $T_{ii}$  representará a tensão normal segundo o plano ortogonal a  $\mathbf{e}_i$  e a  $-\mathbf{e}_i$  sendo que o valor positivo indicará tração;  $T_{ij}$  representará a componente da tensão de cisalhamento segundo a direção  $\mathbf{e}_i$  para o plano definido pela normal  $\mathbf{e}_j$  e pela normal  $-\mathbf{e}_j$ , sendo que um valor positivo indicará que o sentido é o de  $\mathbf{e}_i$ , quando o plano é caracterizado pela normal  $\mathbf{e}_j$ , e o de  $-\mathbf{e}_i$ , quando o plano é definido pela normal  $-\mathbf{e}_j$ .

Considere-se que se tem um sólido em equilíbrio. Portanto, para cada ponto do sólido tem-se um estado de tensão tal que

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(P, \mathbf{n}).$$

Deseja-se melhor caracterizar o estado de tensão em um ponto. Tendo-se esse objetivo, considere-se a partir do ponto  $P$  uma parte do sólido definida por um tetraedro como mostrado na Figura 3.9.

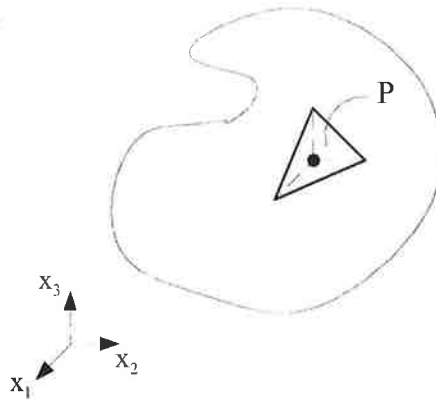


Figura 3.9: Parte do sólido que é definida por um tetraedro.

Admite-se que as arestas, a partir do ponto  $P$ , sejam paralelas aos eixos coordenados e tenham comprimento infinitesimal. Pode-se isolar essa parte do sólido desde que se considerem os esforços internos que representam a ação do restante do sólido nas superfícies (no caso faces) da parte a ser isolada (o tetraedro). Na Figura 3.10 representa-se o tetraedro.

Como as arestas são infinitesimais, pode-se tomar a tensão associada ao ponto  $P$  como constante em cada uma das faces. Portanto, na Figura 3.10 representa-se por  $\boldsymbol{\rho}(-\mathbf{e}_i)$  a tensão na face que tem normal exterior  $-\mathbf{e}_i$  e área  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). A tensão na face inclinada, que tem normal  $\mathbf{n}$  e área  $S$ , é dada por  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n})$ . Somente por conveniência de notação não se está explicitando a dependência da tensão em relação ao ponto  $P$ , pois neste caso se está considerando o mesmo ponto  $P$ , uma vez que as arestas são infinitesimais. Ou seja,  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n})$ ,  $\boldsymbol{\rho}(-\mathbf{e}_i)$  estão representando  $\boldsymbol{\rho}(P, \mathbf{n})$ ,  $\boldsymbol{\rho}(P, -\mathbf{e}_i)$  respectivamente.

Mostram-se na Figura 3.11 algumas propriedades geométricas para o tetraedro em consideração. Decorre

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}S_i \left( \frac{h}{n_i} \right) \quad (3.4)$$

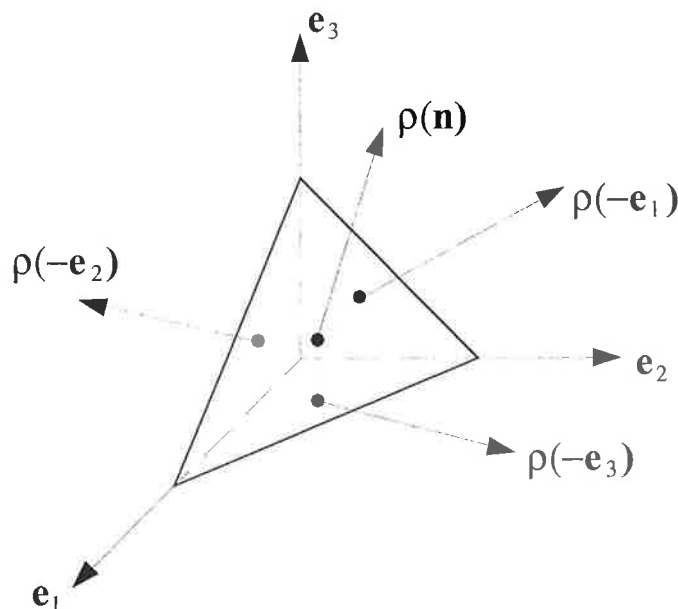


Figura 3.10: Tetraedro isolado de um sólido em equilíbrio

de onde se pode tirar

$$S_i = n_i S \quad (3.5)$$

e onde  $n_i$  são as componentes da normal  $\mathbf{n}$  na base ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ),  $V$  é o volume do tetraedro e  $h$  a distância do ponto  $P$  à face inclinada. Nota-se ainda que  $n_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i = \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{e}_i\| \cos \alpha_i = \cos \alpha_i$  onde  $\alpha_i$  é o ângulo que  $\mathbf{n}$  faz com o versor  $\mathbf{e}_i$  sendo que os  $\cos \alpha_i$  são denominados de cossenos diretores de  $\mathbf{n}$ .

Como o sólido está em equilíbrio, o tetraedro, quando isolado, estará em equilíbrio.

Impõe-se a primeira condição de equilíbrio que corresponde a se ter a resultante  $\mathbf{R}$  de todas as forças atuantes no tetraedro nula. Portanto

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{n}) S + \boldsymbol{\rho}(-\mathbf{e}_1) S_1 + \boldsymbol{\rho}(-\mathbf{e}_2) S_2 + \boldsymbol{\rho}(-\mathbf{e}_3) S_3 + \mathbf{f}^B V = \mathbf{0}$$

onde  $\mathbf{f}^B$  é a força de volume para o ponto  $P$ . Dividindo-se a expressão anterior por  $S$  resulta

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n}) + \boldsymbol{\rho}(-\mathbf{e}_1) n_1 + \boldsymbol{\rho}(-\mathbf{e}_2) n_2 + \boldsymbol{\rho}(-\mathbf{e}_3) n_3 + \frac{1}{3} \mathbf{f}^B h = \mathbf{0}$$

onde se usaram as relações (3.5) e (3.4). Como  $h$  é também um comprimento infinitesimal (visto que as arestas são infinitesimais) pode-se desprezar o termo  $\frac{1}{3} \mathbf{f}^B h$  em relação aos demais.

Utilizando (3.2) resulta

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_1) n_1 + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_2) n_2 + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_3) n_3 \quad (3.6)$$

que mostra que a tensão em um plano inclinado definido pela normal  $\mathbf{n}$  pode ser obtida a partir das tensões, no ponto, para planos paralelos aos planos coordenados.

Substituindo (3.3) em (3.6) resulta

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n}) = \left( \sum_{i=1}^3 T_{i1} \mathbf{e}_i \right) n_1 + \left( \sum_{i=1}^3 T_{i2} \mathbf{e}_i \right) n_2 + \left( \sum_{i=1}^3 T_{i3} \mathbf{e}_i \right) n_3.$$

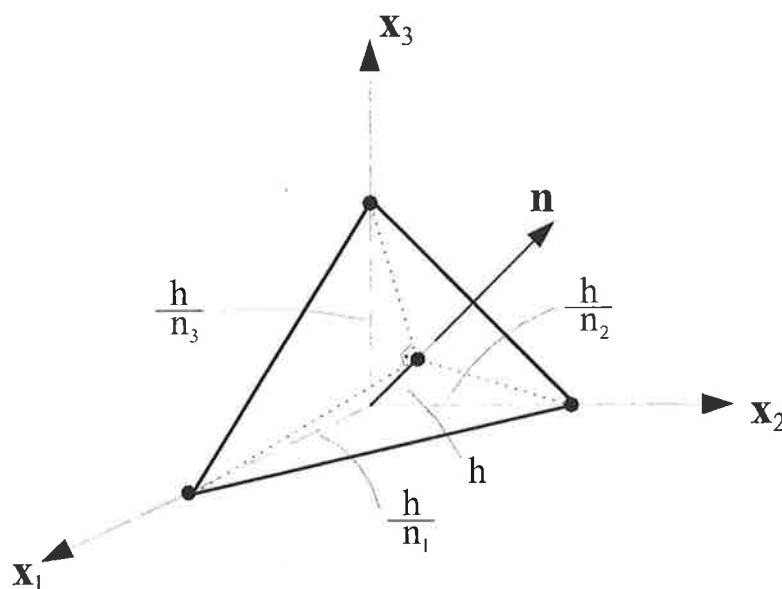


Figura 3.11: Relações geométricas para o tetraedro

Considerando as componentes de  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n})$ , definidas implicitamente por  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 \rho_i \mathbf{e}_i$  pode-se reescrever a equação acima em componentes

$$\begin{aligned}\rho_1 &= T_{11}n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 \\ \rho_2 &= T_{21}n_1 + T_{22}n_2 + T_{23}n_3 \\ \rho_3 &= T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + T_{33}n_3\end{aligned}$$

As três relações podem ser escritas matricialmente por

$$\begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

definindo implicitamente o operador  $\mathbf{T}$  cuja representação na base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  é dada por

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

O operador  $\mathbf{T}$  relaciona a normal, que define um dado plano, à tensão atuante nesse plano

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n}.$$

Nota-se que o conhecimento do operador  $\mathbf{T}$ , que recebe o nome de Tensor das Tensões de Cauchy, caracteriza o estado de tensão no ponto a que se refere, uma vez que seu conhecimento permite obter a tensão atuante em qualquer plano que passe pelo ponto.

A segunda condição necessária para se ter o tetraedro em equilíbrio estático é a de momento nulo. Ou seja, o somatório do momento dos esforços atuantes no tetraedro em relação a qualquer ponto deve ser nulo. Basta, no entanto, mostrar que tal somatório é nulo para um ponto, uma vez que a resultante também é nula.



Nota-se que, como as tensões foram admitidas constantes em cada face do tetraedro, a consideração da força resultante em cada face aplicada no centro de gravidade dessa face leva a um sistema estaticamente equivalente às tensões atuantes nessa face.

Seja  $G_i$  o ponto que corresponde ao centro de gravidade da face  $S_i$  e  $G$  o centro de gravidade da face inclinada. Mostra-se que as retas ortogonais a cada uma das faces, paralelas aos planos coordenados, e que passam pelos respectivos centros de gravidade das faces se encontram em um ponto que é o centro de gravidade da face inclinada. Tal situação está representada na Figura 3.12.

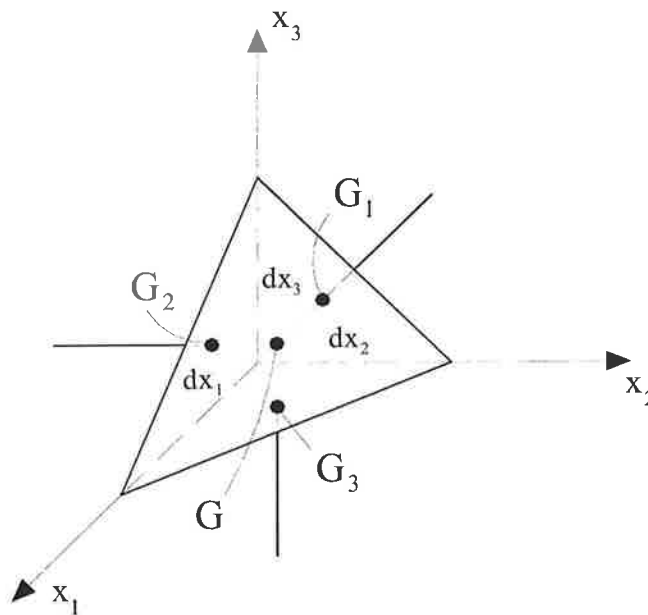


Figura 3.12: Centro de gravidade das faces do tetraedro

Escolhe-se o ponto  $G$  para se calcular o momento dos esforços externos. Sabe-se que o momento em um ponto pode ser calculado pela soma dos momentos em relação a três eixos triortogonais a partir desse ponto.

Considerando-se as grandezas mostradas na Figura 3.13 pode-se impor o somatório de momentos nulo em relação aos eixos  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ .

$$\sum M_{E_1} = 0 = T_{32}S_2 \frac{dx_2}{3} - T_{23}S_3 \frac{dx_3}{3}$$

então

$$T_{32} \left( \frac{dx_1 dx_3}{2} \right) \frac{dx_2}{3} = T_{23} \left( \frac{dx_1 dx_2}{2} \right) \frac{dx_3}{3}$$

que leva a

$$T_{23} = T_{32}.$$

Tem-se ainda que

$$\sum M_{E_2} = 0 = -T_{31}S_1 \frac{dx_1}{3} + T_{13}S_3 \frac{dx_3}{3}$$

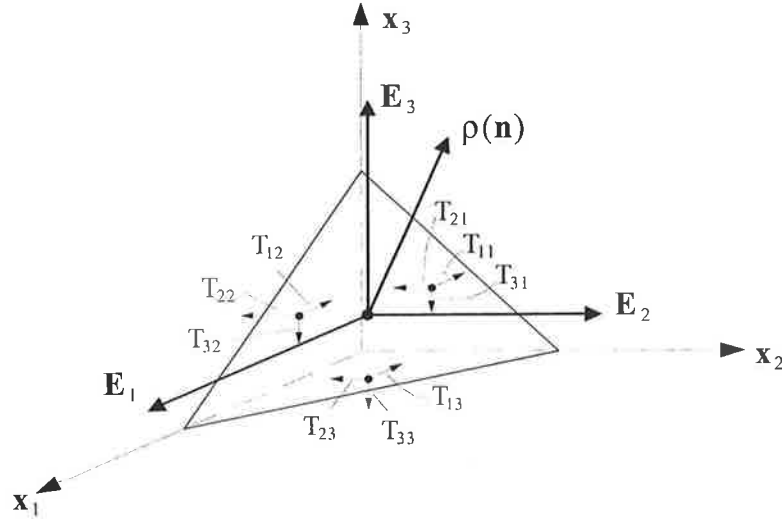


Figura 3.13: Definições e grandezas necessárias para impor-se o equilíbrio dos momentos

$$T_{31} \left( \frac{dx_2 dx_3}{2} \right) \frac{dx_1}{3} = T_{13} \left( \frac{dx_1 dx_2}{2} \right) \frac{dx_3}{3}$$

ou

$$T_{31} = T_{13}$$

e

$$\sum M_{E_3} = 0 = T_{21} S_1 \frac{dx_1}{3} - T_{12} S_2 \frac{dx_2}{3}$$

$$T_{21} \left( \frac{dx_2 dx_3}{2} \right) \frac{dx_1}{3} = T_{12} \left( \frac{dx_1 dx_3}{2} \right) \frac{dx_2}{3}$$

ou

$$T_{21} = T_{12}$$

Então a imposição do equilíbrio dos momentos mostra que o tensor das tensões é simétrico. Observa-se que nas equações de momentos acima não se considerou o momento das forças de volume. Apesar desse campo de forças estar bem definido no interior do tetraedro e produzir, em geral, um momento diferente de zero para os eixos considerados, esse momento corresponderá a um infinitésimo de ordem superior em relação aos outros termos que aparecem nas equações de momento, uma vez que as arestas do tetraedro são infinitesimais.

Resumindo, as deduções acima permitiram caracterizar o estado de tensões em um ponto. Ou seja, mostrou-se que a tensão em um ponto  $P$  atuando segundo um plano de normal  $\mathbf{n}$  é dada por

$$\boldsymbol{\rho}(P, \mathbf{n}) = \mathbf{T} \mathbf{n}$$

onde  $\mathbf{T}$  é um operador linear simétrico denominado Tensor das Tensões de Cauchy, o qual está bem definido para qualquer ponto do sólido.

### 3.3 Equações diferenciais de equilíbrio

Falta ainda estudar como as tensões se relacionam com as forças de volume, de modo a que o equilíbrio de qualquer parte do sólido fique assegurado.

Para tal, considere um paralelepípedo de arestas infinitesimais  $dx_1$ ,  $dx_2$ ,  $dx_3$  no interior de um sólido em equilíbrio como mostrado na Figura 3.14.

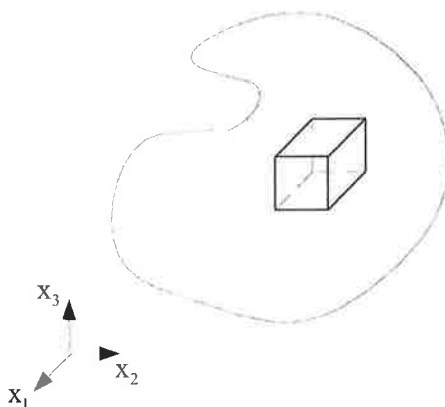


Figura 3.14: Paralelepípedo de arestas infinitesimais.

Pode-se “isolar” tal paralelepípedo do sólido desde que se considerem, em cada uma das faces, as tensões que representam a ação do resto do sólido sobre essa parte.

Nas Figuras 3.15, 3.16 e 3.17 mostram-se as tensões nas faces do paralelepípedo. Note-se que se deve considerar a variação que ocorre em cada componente de tensão quando se consideram planos paralelos, mas distantes de  $dx_j$ . Por exemplo, a variação que ocorre na componente  $T_{ij}$  quando se varia a posição do plano na coordenada  $x_j$  de  $dx_j$ , mantendo-se as demais constantes é dada por  $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dx_j$  uma vez que se está considerando um incremento  $dx_j$  infinitesimal.

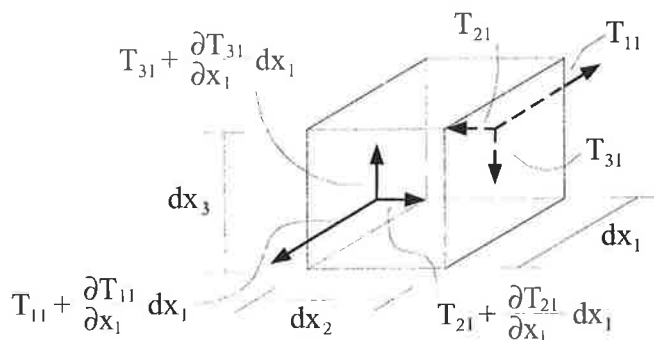


Figura 3.15: Equilíbrio na direção  $x_1$

Deve-se impor o equilíbrio do paralelepípedo considerando além das tensões nas faces, as forças de volume. Novamente, como as faces têm arestas infinitesimais, as tensões são

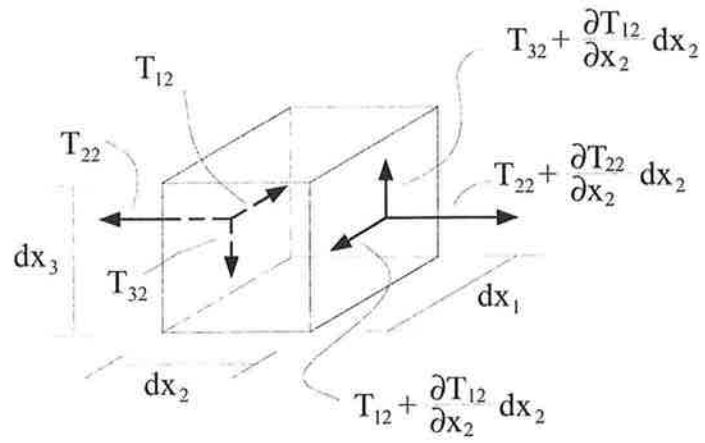


Figura 3.16: Equilíbrio na direção  $x_2$

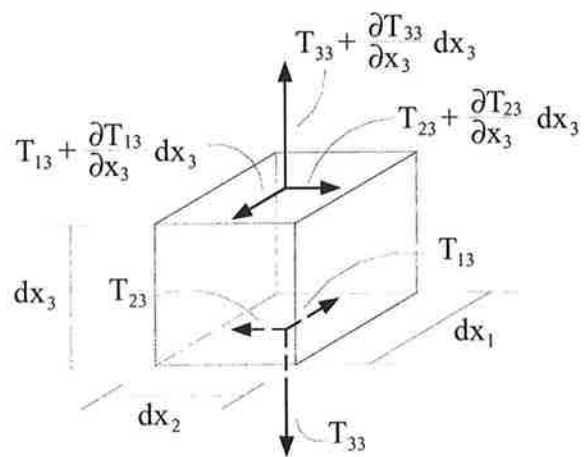


Figura 3.17: Equilíbrio na direção  $x_3$

consideradas constantes em cada face.

O equilíbrio na direção de  $\mathbf{e}_1$  é dado por

$$\begin{aligned} & - T_{11}dx_2dx_3 + T_{11}dx_2dx_3 + \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}dx_1dx_2dx_3 \\ & - T_{12}dx_1dx_3 + T_{12}dx_1dx_3 + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2}dx_2dx_1dx_3 \\ & - T_{13}dx_1dx_2 + T_{13}dx_1dx_2 + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3}dx_3dx_1dx_2 \\ & + f_1^B dx_1dx_2dx_3 = 0 \end{aligned}$$

Nota-se que a força de volume  $\mathbf{f}^B$  é dada por  $\mathbf{f}^B = f_1^B \mathbf{e}_1 + f_2^B \mathbf{e}_2 + f_3^B \mathbf{e}_3$ . Dividindo-se pelo volume do paralelepípedo  $dx_1dx_2dx_3$  obtém-se

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + f_1^B = 0$$

Analogamente, considerando-se o equilíbrio nas direções  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  chega-se a

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + f_2^B = 0$$

e

$$\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + f_3^B = 0.$$

As equações acima são denominadas equações diferenciais de equilíbrio.

### 3.4 Estudo da variação das tensões

Considere o problema de determinação dos autovalores e autovetores para o operador linear  $\mathbf{T}$  que corresponde ao tensor das tensões. Como o operador  $\mathbf{T}$  é simétrico sabe-se que os autovalores são reais. Sejam  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  os autovalores de  $\mathbf{T}$  ordenados de forma que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Seja ainda  $(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$  uma base ortonormal de autovetores de  $\mathbf{T}$ . Nessa base o tensor das tensões tem a seguinte representação

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Observe-se que para os planos que têm normal coincidente com  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  e  $\mathbf{h}_3$  não há tensões de cisalhamento, visto que as componentes fora da diagonal do tensor das tensões são as tensões de cisalhamento atuantes nos planos que têm como normal os versores da base considerada.

Recorda-se ainda que as tensões normais são dadas por

$$\sigma = \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n}$$

ou

$$\sigma = \mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}$$

expressão que mostra que a tensão normal é dada por uma forma quadrática. Sabe-se que os extremos de uma forma quadrática são dados pelos autovalores do operador simétrico que define a forma quadrática. Portanto

$$\text{máx}(\sigma) = \sigma_1$$

e

$$\text{mín}(\sigma) = \sigma_3$$

ocorrendo para os planos que têm normal  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_3$  respectivamente.

As tensões  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são respectivamente denominadas tensões principais e as direções  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$  e  $\mathbf{h}_3$  direções principais das tensões.

Pode-se estudar a variação das tensões para planos que contêm uma das direções principais. Por exemplo, tomem-se os planos que contêm  $\mathbf{h}_3$ . Representa-se na Figura 3.18 um plano  $\pi$  genérico nessa situação. O traço desse plano  $\pi$  no plano definido por  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_2$  faz com  $\mathbf{h}_1$  um ângulo  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ ), medido no sentido horário a partir de  $\mathbf{h}_1$ . A tensão  $\boldsymbol{\rho}$  nesse plano pode ser decomposta como definido em (3.1)

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\tau} = \sigma \mathbf{n} + \tau \mathbf{t}$$

onde  $\mathbf{n}$  é a normal ao plano  $\pi$  e  $\mathbf{t}$  o versor no plano  $\pi$  como mostrado na Figura 3.18. Nesse caso  $\mathbf{t}$  pertence também ao plano  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  visto que  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{T}\mathbf{n}$  pertence ao plano  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ .

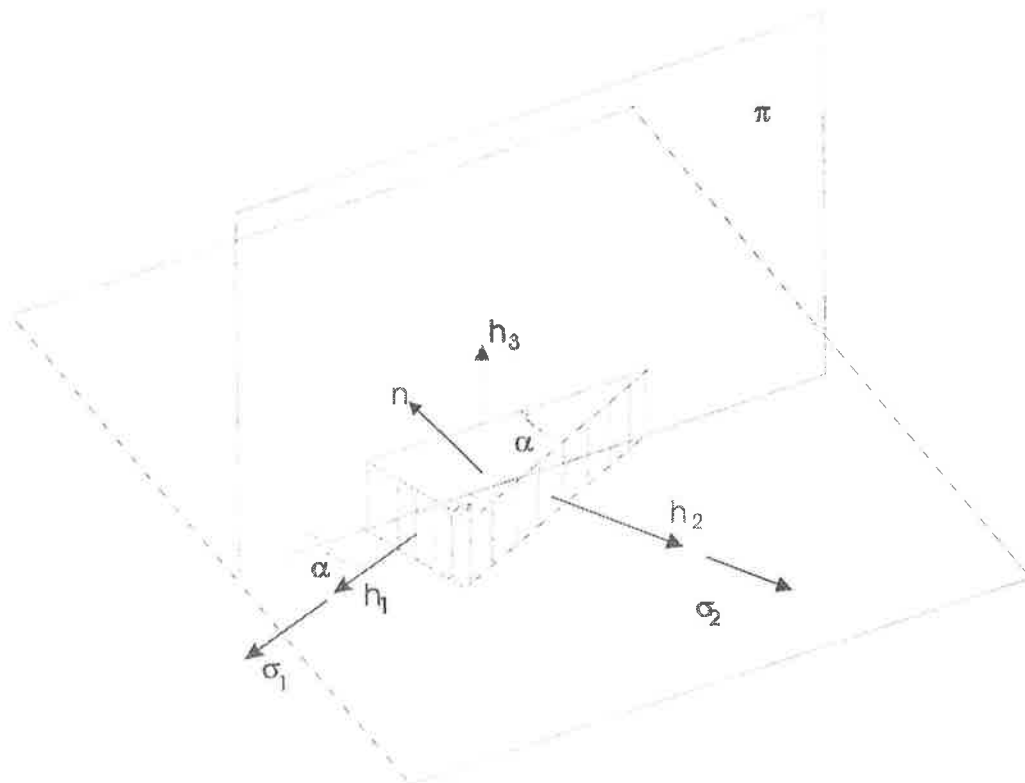


Figura 3.18: Plano genérico que contém  $\mathbf{h}_3$ .

Tem-se então que

$$\begin{aligned} \sigma &= \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \\ &= \left\{ \begin{matrix} -\text{sen}\alpha & -\text{cos}\alpha & 0 \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} -\text{sen}\alpha \\ -\text{cos}\alpha \\ 0 \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha\end{aligned}\quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}\tau &= \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{Tn} \cdot \mathbf{t} \\ &= \left\{ \begin{matrix} -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ 0 \end{matrix} \right\} \\ \tau &= (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (3.8)$$

As equações (3.7) e (3.8) permitem a representação dos pares  $(\sigma, \tau)$  graficamente como mostrado na Figura 3.19.

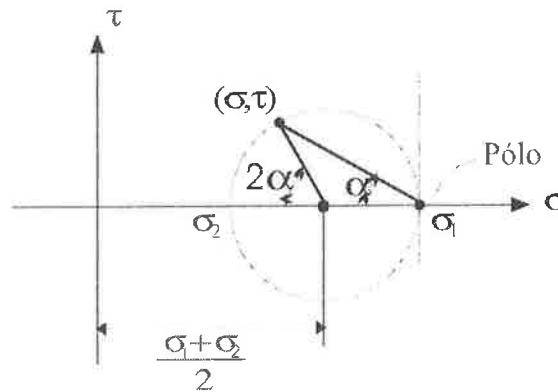


Figura 3.19: Representação gráfica dos pares  $(\sigma, \tau)$  para planos  $\pi$  contendo  $\mathbf{h}_3$ .

Essa representação é, na verdade, a do círculo de Mohr que é introduzida usualmente no estudo do estado duplo de tensão. Pode-se interpretar a equação que fornece a tensão no plano definido pela normal como o equilíbrio de forças no plano  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  do prisma que tem projeção nesse plano mostrada na Figura 3.20. A imposição do equilíbrio para esse prisma leva às equações do estado duplo para essa situação que são dadas por (3.7) e (3.8). Nota-se que o vetor  $\mathbf{t}$  foi definido de forma que a convenção usual para o sinal da tensão de cisalhamento no estado duplo fosse atendida (valor positivo indica a tendência de “girar” o elemento no sentido horário). Portanto, a variação da tensão segundo os planos que contêm uma das direções principais pode ser descrita pelas equações do estado duplo de tensão. Nota-se ainda que no caso detalhado acima para o plano ortogonal a  $\mathbf{h}_3$  não haverá tensões de cisalhamento, no entanto, há tensão normal,  $\sigma_3$ . Recorda-se que na definição de estado duplo de tensão considera-se uma chapa bastante delgada na qual todos os esforços atuantes estão no plano da chapa. Nessas condições, todas as componentes de tensão para planos paralelos ao da chapa são nulas, inclusive a tensão normal. Portanto, por essa definição a variação das tensões para os planos que contêm uma das direções principais não corresponderia a um estado duplo de tensão, já que, tomando como exemplo o caso estudado acima onde  $\mathbf{h}_3$  é a direção principal, tem-se, em geral,  $\sigma_3$  diferente de zero. No entanto, como o valor de  $\sigma_3$  não interfere no equilíbrio das forças contidas no plano  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$  e o equilíbrio das forças nesse plano é equacionado pelas mesmas expressões que seriam obtidas pela consideração de um estado duplo de tensão, pode-se denominar a variação da tensão em planos que contêm uma das direções principais de “estado duplo de tensões”.



Figura 3.20: Equilíbrio no plano  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ .

$$\mathbf{n} = -\mathbf{h}_1 \sin \alpha - \mathbf{h}_2 \cos \alpha + 0\mathbf{h}_3$$

$$\mathbf{t} = -\mathbf{h}_1 \cos \alpha + \mathbf{h}_2 \sin \alpha + 0\mathbf{h}_3$$

Considerando então a variação das tensões em planos que contêm uma das direções principais, chega-se à representação gráfica mostrada na Figura 3.21, onde cada um dos círculos representa a variação para planos que contêm uma das direções principais. Mostra-se que os possíveis pares  $(\sigma, \tau)$  para os demais planos pertencem à região hachurada na Figura 3.22.

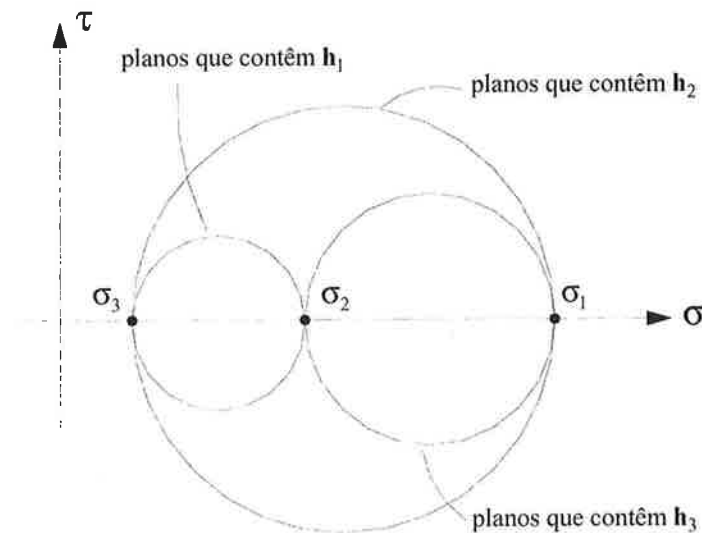


Figura 3.21: Círculos de Mohr.

Pode-se então concluir que a máxima tensão de cisalhamento vale

$$\tau_{\text{máx}} = \text{máx} \|\boldsymbol{\tau}\| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

e ocorre em planos que fazem  $45^\circ$  com as direções principais  $\mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{h}_3$ .



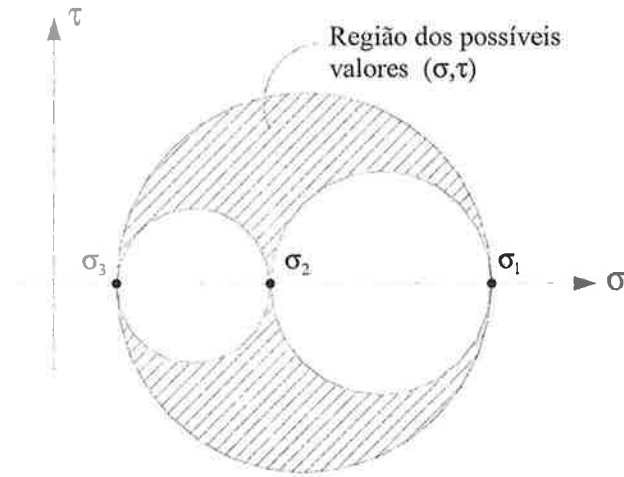


Figura 3.22: Região dos possíveis valores  $(\sigma, \tau)$ .

### 3.5 Estados particulares de tensão

#### 3.5.1 Estado hidrostático de tensão

Considere que o estado de tensão em um ponto é dado por

$$[T] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}.$$

Tem-se, portanto, que  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ .

Como se têm três autovalores iguais, qualquer vetor é um autovetor e a representação do tensor das tensões será como mostrada acima para qualquer base ortonormal. Conclui-se, também, que as tensões de cisalhamento serão nulas para qualquer plano considerado. A representação de Mohr para esse estado de tensão se reduz a um ponto conforme mostrado na Figura 3.23.

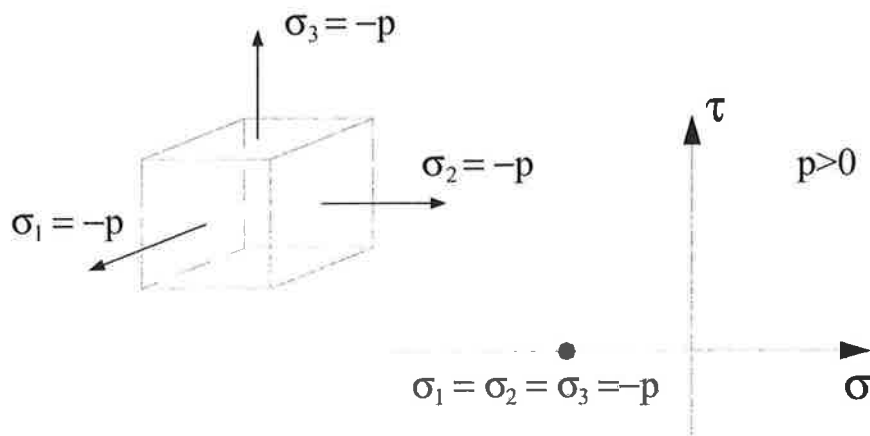


Figura 3.23: Estado hidrostático de tensão.

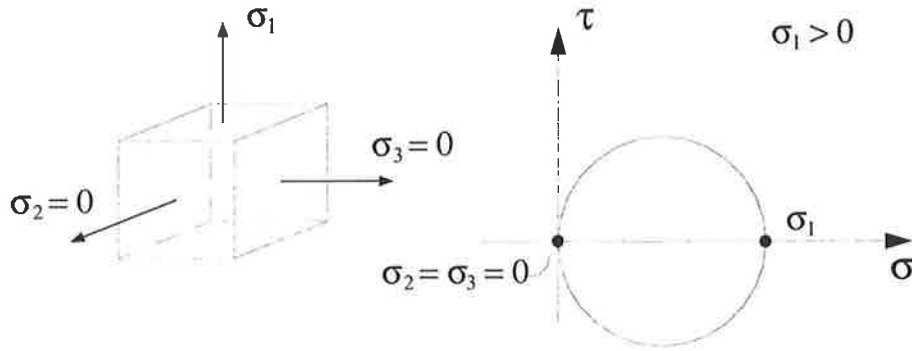


Figura 3.24: Estado simples de tensão (tração)

O estado hidrostático de tensão é bastante usual no estudo de Mecânica dos Fluidos quando se tem um líquido em equilíbrio. A interpretação da grandeza  $p$  é a de uma pressão tomada positiva para a situação de compressão.

### 3.5.2 Estado simples de tensão

No estado simples de tensão tem-se a seguinte representação do tensor das tensões

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, duas das tensões principais são nulas. A representação de Mohr é descrita na Figura 3.24.

O estado simples de tensão ocorre em ensaios usuais de tração e compressão de corpos de prova.

# Capítulo 4

## Equações constitutivas para a elasticidade linear

O termo equações constitutivas é usado para descrever as relações que ligam os estados de tensão em um sólido deformável à sua deformação. Essas equações dependem do material que constitui o sólido, o que é bastante intuitivo, uma vez que o mesmo campo de deformações leva a campos de tensões diferentes quando se consideram sólidos de materiais diferentes. Serão considerados nesse curso os materiais denominados **elásticos lineares**. O termo elástico está associado ao fato de as deformações ocorrerem imediatamente quando da aplicação das ações e de serem reversíveis, ou seja, cessadas as ações, o sólido retorna à configuração em que estava anteriormente à aplicação dessas.

Serão considerados apenas materiais que respondem da mesma forma em todas as direções, chamados **isótopos**, e que têm as mesmas propriedades em todos os seus pontos, denominados **homogêneos**. Nessas condições, o comportamento mecânico do material pode ser caracterizado pela Lei de Hooke generalizada que se descreve a seguir.

### 4.1 Lei de Hooke generalizada

Considere um paralelepípedo no qual se tem um estado de tensão uniforme (idêntico para todos os pontos do paralelepípedo) dado pela imposição da tensão normal  $\sigma$  como indicado na Figura 4.1

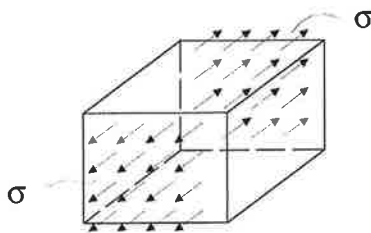


Figura 4.1: Paralelepípedo considerando estado de tensão uniforme

A lei de Hooke estabelece que o alongamento linear  $\varepsilon$  na direção de aplicação da tensão é dado por

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

e nas direções ortogonais o alongamento é dado por  $-\nu \frac{\sigma}{E}$  ou, equivalentemente,  $-\nu \varepsilon$ , sendo  $E$  o módulo de elasticidade de Young e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

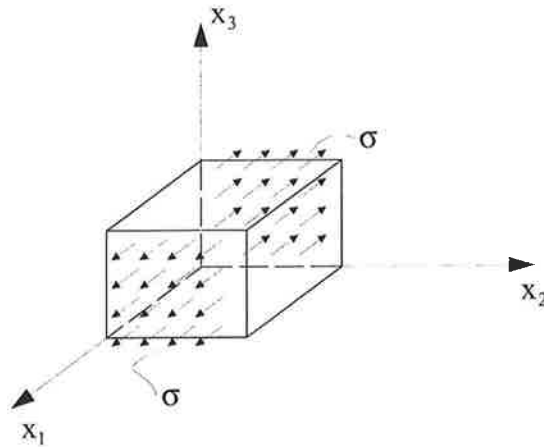


Figura 4.2: Orientação do paralelepípedo em relação aos eixos coordenados

Orientando o paralelepípedo da Figura 4.1 em relação ao sistema de coordenadas como mostrado na Figura 4.2, obtém-se

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$T_{11} = \sigma$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma}{E} \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma}{E} = \frac{T_{11}}{E}$$

e

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \frac{\sigma}{E} = -\nu \frac{T_{11}}{E} = -\nu \varepsilon_{11}$$

Considerando-se uma situação análoga para as direções 2 e 3, e admitindo-se que os efeitos combinados podem ser obtidos por superposição, chega-se a

$$\varepsilon_{11} = \frac{T_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (T_{22} + T_{33}) \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{T_{22}}{E} - \frac{\nu}{E} (T_{11} + T_{33}) \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{T_{33}}{E} - \frac{\nu}{E} (T_{11} + T_{22}) \quad (4.3)$$

Considere-se agora que o estado de tensão no paralelepípedo é dado por

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que é mostrado na Figura 4.3.

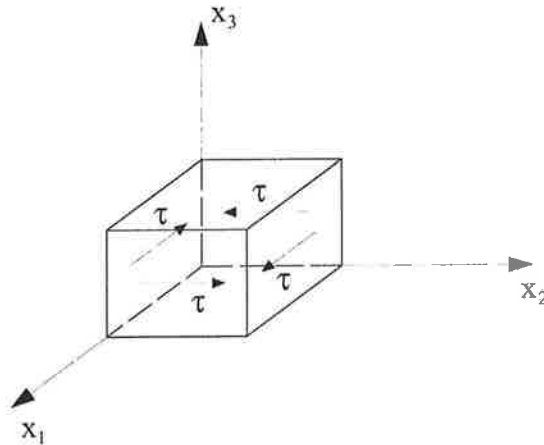


Figura 4.3: Estado de tensão uniforme de cisalhamento.

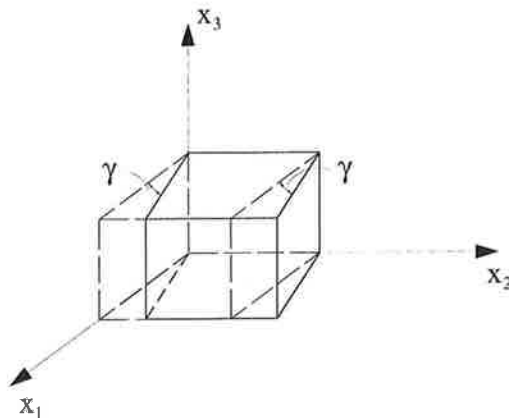


Figura 4.4: Deformação associada a um estado uniforme de tensão de cisalhamento

A deformação associada a esse estado de tensão é mostrada na Figura 4.4 para a qual o tensor das deformações é dado por

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo que vale a relação

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (4.4)$$

onde  $G$  é denominado módulo de elasticidade transversal. A relação (4.4) pode ser expressa em componentes por

$$2\varepsilon_{12} = \frac{T_{12}}{G}. \quad (4.5)$$

Considerando-se estados de cisalhamento uniformes análogos, associados às componentes  $T_{13}$  e  $T_{23}$  e admitindo-se válida a superposição de efeitos, pode-se escrever

$$2\varepsilon_{13} = \frac{T_{13}}{G} \quad (4.6)$$

$$2\varepsilon_{23} = \frac{T_{23}}{G}. \quad (4.7)$$

As equações (4.1 – 4.3) e (4.5 – 4.7), repetidas abaixo, que relacionam as componentes do tensor das tensões às do tensor das deformações é denominada **Lei de Hooke Generalizada**.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{T_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (T_{22} + T_{33}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{T_{22}}{E} - \frac{\nu}{E} (T_{11} + T_{33}) \\ \varepsilon_{33} &= \frac{T_{33}}{E} - \frac{\nu}{E} (T_{11} + T_{22}) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{T_{12}}{2G} \\ \varepsilon_{13} &= \frac{T_{13}}{2G} \\ \varepsilon_{23} &= \frac{T_{23}}{2G} \end{aligned}$$

Na verdade, entre  $E$ ,  $G$  e  $\nu$  há somente duas constantes elásticas independentes como se mostra a seguir. Tendo-se esse objetivo, considere-se o estado de tensão mostrado na Figura 4.5 atuando em um cubo.

O tensor das tensões é dado por

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Considere-se um paralelepípedo no interior do cubo tal que uma seção por um plano paralelo ao plano  $x_1x_2$  é representada na Figura 4.6.

A tensão na face inclinada que tem traço  $AB$  no plano mostrado na Figura 4.6 pode ser calculada por

$$\rho = \mathbf{T}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{array} \right\} = \sigma \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{array} \right\}$$

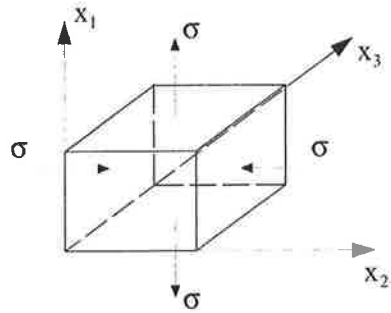


Figura 4.5: Estado de tensão uniforme atuando em um cubo. Tensões são constantes nas faces.

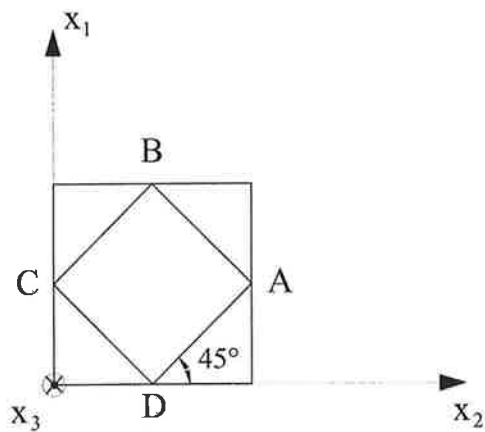


Figura 4.6: Seção transversal por um plano paralelo a  $x_1x_2$ .

que está contida nessa face inclinada, visto que

$$\mathbf{Tn} \cdot \mathbf{n} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\} \sigma \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{array} \right\} = 0$$

e terá a direção do versor  $\mathbf{t}$ , sendo  $\{\mathbf{t}\}^T = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\}$ . Trata-se, pois, de uma tensão de cisalhamento dada por

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{t} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\} \sigma \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{array} \right\} = \sigma.$$

Deduções análogas levam à situação mostrada na Figura 4.7.

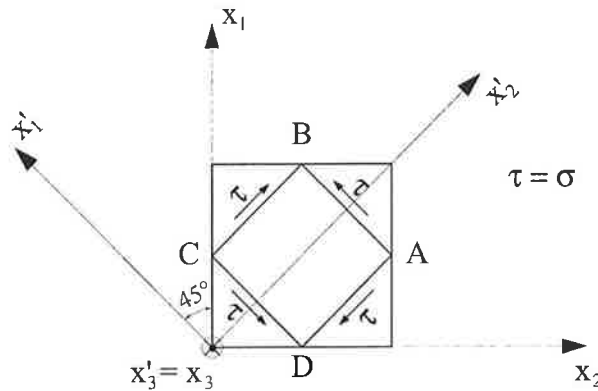


Figura 4.7: Tensões atuantes nas faces cujos traços no plano paralelo a  $x_1x_2$  são dados por  $AB, BC, CD, DA$ .

Considerando o estado de tensão para o paralelepípedo inclinado, tem-se que o tensor das deformações para a base  $\mathbf{e}'$ , que está implicitamente definida na Figura 4.7 pelos eixos  $x'_1, x'_2$  e  $x'_3$ , é dado por

$$[\varepsilon]_{e'} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\tau}{2G} & 0 \\ \frac{\tau}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

O tensor das deformações pode ser obtido, alternativamente, a partir do mesmo tensor na base  $\mathbf{e}$ , usando a relação do apêndice A2 que fornece

$$[\varepsilon]_{e'} = [Q] [\varepsilon]_e [Q]^T \quad (4.10)$$

onde o tensor na base  $[\varepsilon]_e$  pode ser obtido pela aplicação da lei de Hooke considerando o tensor dado em (4.8)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{T_{11}}{E} - \nu(T_{22} + T_{33}) = \frac{\sigma}{E} - \frac{\nu}{E}(-\sigma) = \frac{\sigma(1+\nu)}{E} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{T_{22}}{E} - \nu(T_{11} + T_{33}) = -\frac{\sigma}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma) = -\frac{\sigma(1+\nu)}{E} \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma - \sigma) = 0 \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{aligned}$$



ou

$$[\varepsilon]_e = \begin{bmatrix} \frac{\sigma(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As componentes de  $[Q]$  são dadas pelos cossenos diretores dos versores da base  $e'$  em relação a  $e$  (ver equação (B.2) do apêndice A2)

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

portanto, (4.10) leva a

$$\begin{aligned} [\varepsilon]_{e'} &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sigma(1+\nu)}{E} & \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sigma(1+\nu)}{E} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sigma(1+\nu)}{E} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sigma(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sigma(1+\nu)}{E} & 0 \\ \frac{\sigma(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Comparando as expressões (4.9) e (4.11) e usando  $\sigma = \tau$  tem-se que

$$\frac{\sigma}{2G} = \frac{\sigma(1+\nu)}{E}$$

ou

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

que estabelece a relação entre as constantes elásticas.

Uma dedução mais direta pode ser obtida considerando-se a deformação que ocorre e é mostrada na Figura 4.8.

A distorção para fibras ortogonais com origem em  $B$  sobre  $BC$  e  $BA$  pode ser obtida diretamente a partir dos alongamentos lineares de  $CP$  e  $BP$ . De fato

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{(1 + \varepsilon_{22}) \|PC\|}{(1 + \varepsilon_{11}) \|PB\|} = \frac{1 + \varepsilon_{22}}{1 + \varepsilon_{11}}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma}{E} - \frac{\nu}{E}(-\sigma) = \frac{\sigma}{E}(1 + \nu)$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\sigma}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma) = -\frac{\sigma}{E}(1 + \nu).$$

Como  $\gamma$  é pequeno

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \cong \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

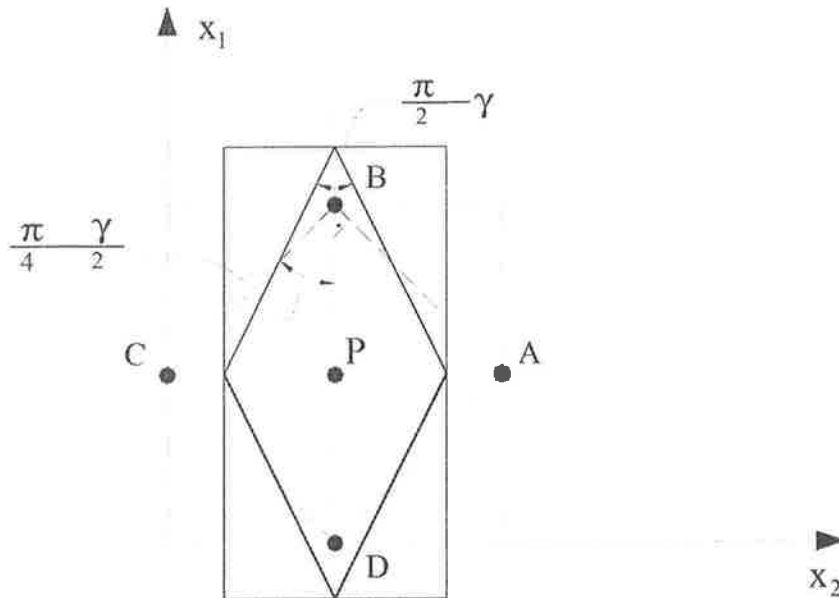


Figura 4.8: Configurações indeformada e deformada para um plano paralelo a  $x_1x_2$ .

Resulta

$$\frac{1 - \frac{\sigma}{E}(1 + \nu)}{1 + \frac{\sigma}{E}(1 + \nu)} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

que leva a

$$\gamma = \frac{\sigma}{E} 2(1 + \nu)$$

e como

$$\sigma = \tau = G\gamma$$

resulta

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

A lei de Hooke generalizada que foi estudada considerando estados uniformes de tensão, na verdade vale para qualquer ponto do sólido, visto que as deduções apresentadas poderiam ser repetidas para um cubo de arestas infinitesimais centrado no ponto, sendo então considerados os estados de tensão e de deformação no ponto.

É usual utilizar-se uma notação matricial para representar a lei de Hooke generalizada. Define-se uma matriz coluna com as componentes independentes do tensor das tensões e outra com as do tensor das deformações.

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^T &= \{ T_{11} \ T_{22} \ T_{33} \ T_{12} \ T_{13} \ T_{23} \} \\ \{\epsilon\}^T &= \{ \epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \gamma_{12} \ \gamma_{13} \ \gamma_{23} \} \end{aligned}$$

onde  $\gamma_{12} = 2\epsilon_{12}$ ,  $\gamma_{13} = 2\epsilon_{13}$  e  $\gamma_{23} = 2\epsilon_{23}$  representam as distorções.

Nessa notação a lei de Hooke generalizada pode ser escrita como

$$\{\epsilon\} = [D] \{\sigma\} \tag{4.12}$$

onde

$$[D] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}.$$

É usual considerar-se também a inversão de (4.12)

$$\{\sigma\} = [D]^{-1} \{\epsilon\} = [C] \{\epsilon\}$$

onde

$$[C] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

# Capítulo 5

## Formulação do problema da elasticidade linear

Nas seções precedentes buscou-se generalizar para o contexto de um sólido deformável sujeito a um conjunto de ações as três condições fundamentais que devem ser atendidas em um problema de Mecânica das Estruturas e que devem ser consideradas em sua formulação, a saber

- Equilíbrio
- Compatibilidade
- Equação constitutiva

Essas condições, que já haviam sido estudadas no âmbito das estruturas de barras, foram generalizadas: as condições de equilíbrio foram examinadas na seção “Estudo das tensões” levando à definição do tensor das tensões e à dedução das equações diferenciais de equilíbrio. As condições de compatibilidade foram examinadas na seção “Estudo das deformações”, onde se definiram as medidas relevantes do estado de deformação, o tensor das deformações e as relações que ligam essas medidas de deformação ao campo de deslocamentos dos pontos do sólido. Finalmente, as equações constitutivas, relações entre as medidas de deformação e de tensão, foram apresentadas para um material elástico linear isótropo e homogêneo e receberam, então, a denominação de lei de Hooke generalizada.

Nessa seção as três condições enunciadas acima são consideradas simultaneamente levando à formulação do problema da elasticidade linear que se descreve a seguir.

Considere um sólido deformável cuja configuração indeformada  $V$  está mostrada na Figura 5.1. O sólido está submetido à ação de um campo de forças de volume  $\mathbf{f}^B$  definido para todo o ponto  $X$ , que tem vetor de posição  $\mathbf{x}$ , de  $V$ . Uma parte de sua superfície,  $S_u$ , tem deslocamentos impostos  $\hat{\mathbf{u}}$  e a parte complementar da superfície,  $S_f$ , tem forças de superfície impostas  $\mathbf{f}^S$ . Nota-se que a superfície  $S$  do sólido é dada por  $S = S_f \cup S_u$ , sendo  $S_f \cap S_u = \emptyset$ . Nessas condições o problema da elasticidade linear pode ser enunciado.

Determinar o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , o campo de tensores de tensões de Cauchy  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  e campo de deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  tal que, para qualquer ponto  $\mathbf{x}$  de  $V$ ,

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + f_i^B = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.2)$$

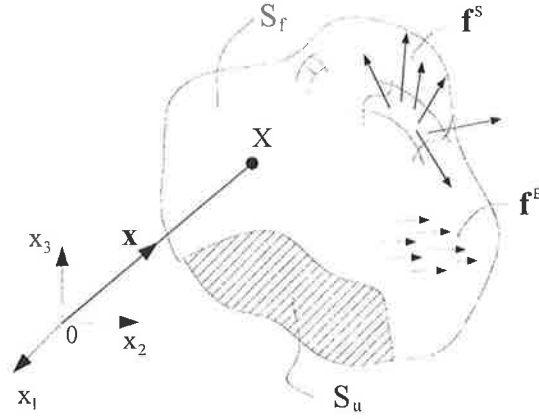


Figura 5.1: Sólido deformável submetido a ações externas e condições de contorno de deslocamentos em  $S_u$ .

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\}. \quad (5.3)$$

Para os pontos  $\mathbf{x}$  em  $S_f$

$$\sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j = f_i^S \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.4)$$

onde  $n_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  são as componentes da normal exterior à  $S_f$  em  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ .

Para os pontos  $\mathbf{x}$  em  $S_u$

$$u_i = \hat{u}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.5)$$

As equações (5.1), (5.2) e (5.3) são as equações de campo, uma vez que estão definidas para todo o  $\mathbf{x}$  em  $V$ . A equação (5.1) representa as condições diferenciais de equilíbrio, (5.2) as relações deslocamento – deformação, portanto de compatibilidade, e (5.3) as equações constitutivas. As equações (5.4) e (5.5) impõem as condições de contorno, sendo (5.4) as condições de contorno de forças de superfície e (5.5) as condições de contorno de deslocamentos impostos.

Como o problema acima envolve tanto condições de contorno de deslocamentos quanto de forças de superfície, é chamado de problema misto de valores de contorno da elasticidade linear. Dois casos particulares recebem denominações específicas:

- (i) Problema de valores de contorno de deslocamentos ou 1º problema de valores de contorno. Nesse caso  $S_u = S$  e  $S_f = \emptyset$ .
- (ii) Problema de valores de contorno de forças de superfícies ou 2º problema de valores de contorno. Nesse caso  $S_f = S$  e  $S_u = \emptyset$ .

Nota-se que as equações (5.1), (5.2) e (5.3) representam um sistema de 15 equações diferenciais a derivadas parciais tendo 15 funções incógnitas (as componentes do tensor das tensões (6), as componentes do tensor das deformações (6) e as componentes do campo de deslocamentos (3)). Sua solução tem se revelado um formidável desafio para engenheiros

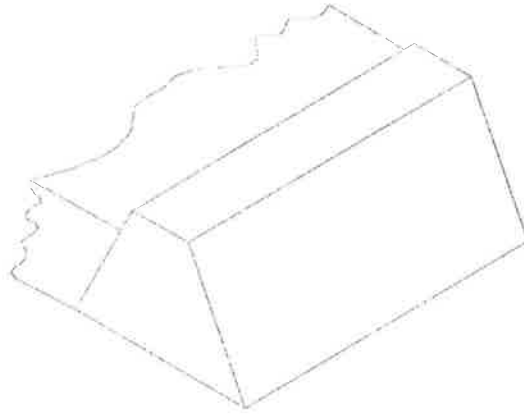


Figura 5.2: Esquema de uma barragem.

e matemáticos. Há uma rica literatura de soluções analíticas de problemas da teoria da elasticidade considerando-se condições geométricas e de contorno particulares. Não será o objetivo deste curso desenvolver as técnicas analíticas usadas na solução de tais problemas. A abordagem adotada será a de utilizar uma metodologia numérica de solução: o Método dos Elementos Finitos. No entanto, serão estudados alguns modelos matemáticos da elasticidade linear que permitem um tratamento no plano e que para diversas situações de modelagem de interesse prático, revelam-se adequados, tendo um grau de complexidade bem menor que o modelo tridimensional. Essa simplificação permitirá interpretações mais diretas, por vezes um entendimento qualitativo mais claro, além de exigir um esforço computacional menor para sua solução. O estudo desses modelos planos será o objetivo da próxima seção.

## 5.1 Elasticidade linear no plano

### 5.1.1 Estado plano de deformação

Considere o problema descrito esquematicamente na Figura 5.2, na qual se mostra um trecho de uma barragem. Reconhecem-se nessa situação algumas características típicas do modelo que será denominado **estado plano de deformação**: a barragem pode ser caracterizada com um sólido prismático, o carregamento relevante se repete ao longo das diversas seções desse sólido prismático e pertence aos planos dessas seções.

Suponha-se ainda que na região de encontro da barragem com as ombreiras, as restrições de deslocamento na direção ortogonal à seção da barragem sejam impostas de forma que se possa considerar deslocamentos nulos nessa direção. É intuitivo, então, considerar que os deslocamentos ortogonais às seções transversais sejam nulos para todas as seções e, como o carregamento se repete de seção para seção, será possível resolver o problema em um único plano, uma vez que não há diferença nas condições relevantes quando se consideram os diversos planos. Essas considerações seriam a motivação para o estudo do estado plano de deformação.

Da forma como será apresentado o problema do estado plano de deformação, ele será um exemplo típico da aplicação do método semi-inverso para a formulação de modelos matemáticos derivados da teoria da elasticidade linear. Nesse método, a partir de considerações intuitivas ou apoiadas em experimentos sobre o comportamento estrutural, propõe-se um campo de deslocamentos simplificado. A partir desse campo de deslocamentos procura-

se satisfazer as condições de compatibilidade e as equações diferenciais de equilíbrio. Essas condições devem restringir os carregamentos que podem ser aplicados e que ainda sejam compatíveis com as hipóteses adotadas. Ainda, a imposição de condições de contorno leva, em geral, a restrições adicionais.

O estado plano de deformação pode, então, ser formalmente definido: diz-se que um sólido prismático está em estado plano de deformação se

$$u_1 = u_1(x_1, x_2) \quad (5.6)$$

$$u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad (5.7)$$

$$u_3 = 0 \quad (5.8)$$

A partir dessas definições considere-se a aplicação do método semi-inverso como descrito. Para fixar idéias, seja um sólido prismático típico apresentado na Figura 5.3.

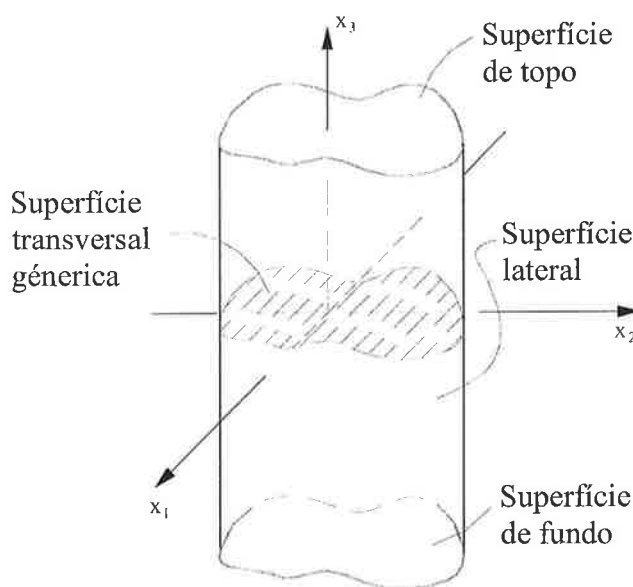


Figura 5.3: Descrição esquemática do sólido prismático.

Adota-se a convenção em que os subíndices representados por letras latinas assumam os valores 1, 2 e 3, enquanto os representados por letras gregas os valores 1 e 2.

Recorda-se que as relações deformação-deslocamento são dadas por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.9)$$

Considerando as hipóteses sobre o campo de deslocamentos para o estado plano de deformação, dadas pelas equações (5.6), (5.7) e (5.8) pode-se reescrever (5.9) pelas equações abaixo

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (5.10)$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad (5.11)$$

$$\varepsilon_{3\beta} = \varepsilon_{\beta 3} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_3} \right) = 0. \quad (5.12)$$

Considerando-se um material elástico linear, isótropo e homogêneo aplicam-se as equações constitutivas. Iniciando-se pela equação que fornece  $\varepsilon_{33}$

$$\varepsilon_{33} = 0 = \frac{T_{33}}{E} - \frac{\nu}{E} (T_{11} + T_{22})$$

que leva a

$$T_{33} = \nu (T_{11} + T_{22}). \quad (5.13)$$

As componentes no plano escrevem-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{T_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (T_{22} + T_{33}) = \frac{T_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} [T_{22} + \nu (T_{11} + T_{22})] \\ \varepsilon_{11} &= \frac{(1 - \nu^2)}{E} T_{11} - \frac{\nu(1 + \nu)}{E} T_{22}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\varepsilon_{22} = \frac{(1 - \nu^2)}{E} T_{22} - \frac{\nu(1 + \nu)}{E} T_{11}.$$

Tem-se ainda

$$\varepsilon_{12} = \frac{(1 + \nu)}{E} T_{12}$$

ou

$$\gamma_{12} = \frac{2(1 + \nu)}{E} T_{12}.$$

Como  $\varepsilon_{\alpha 3} = 0$  resulta  $T_{\alpha 3} = 0$ .

Pode-se definir matrizes-coluna contendo somente as componentes de deformação e tensão no plano por

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{Bmatrix} ; \quad \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}.$$

Então,

$$\{\epsilon\} = [D] \{\sigma\} \quad (5.14)$$

onde

$$[D] = \frac{(1 + \nu)}{E} \begin{bmatrix} (1 - \nu) & -\nu & 0 \\ -\nu & (1 - \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

A relação (5.14) pode ser invertida

$$\{\sigma\} = [D]^{-1} \{\epsilon\} = [C] \{\epsilon\} \quad (5.16)$$

onde

$$[C] = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix}.$$



Ressalta-se que se está usando a mesma representação tanto para as matrizes-coluna que abrigam as componentes de tensão e de deformação no plano como para as matrizes análogas no caso tridimensional. Supõe-se que o contexto permitirá identificar de que caso se está falando. A mesma observação vale para as matrizes  $[D]$  e  $[C]$ .

A relação (5.16) permite concluir que  $T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  uma vez que  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$ . Conclui-se também, examinando a equação (5.13) que  $T_{33} = T_{33}(x_1, x_2)$ .

Considerando as simplificações no campo de tensões discutidas acima, pode-se escrever as equações diferenciais de equilíbrio como

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \overbrace{\frac{\partial T_{13}}{\partial x_3}}^0 + f_1^B &= 0 \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \overbrace{\frac{\partial T_{23}}{\partial x_3}}^0 + f_2^B &= 0 \\ \overbrace{\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1}}^0 + \overbrace{\frac{\partial T_{32}}{\partial x_2}}^0 + \overbrace{\frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}}^0 + \overbrace{f_3^B}^0 &= 0. \end{aligned}$$

portanto as seguintes restrições devem ser observadas para o campo de forças de volume:  $f_1^B$  e  $f_2^B$  devem ser funções de  $x_1$  e  $x_2$  somente, visto que  $T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$ ;  $f_3^B$  deve ser nula. Essas restrições e as outras que serão estabelecidas na seqüência devem ser interpretadas como restrições que, se não atendidas, impedem que se tenha um campo de deslocamentos como o admitido em (5.6), (5.7) e (5.8) e que as equações da elasticidade sejam satisfeitas simultaneamente.

Pode-se examinar as condições de contorno. Considerando a superfície lateral, tem-se que  $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2$ , portanto

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j &= f_i^s \\ f_\alpha^s &= \sum_{\beta=1}^2 T_{\alpha\beta} n_\beta \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$f_3^s = \sum_{\beta=1}^2 T_{3\beta} n_\beta = 0$$

ou seja, a componente  $f_3^s = 0$  e (5.17) mostra que  $f_\alpha^s = f_\alpha^s(x_1, x_2)$ .

Na superfície de topo,  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ . Portanto

$$f_i^s = \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j = T_{i3}$$

que leva a  $f_\alpha^s = 0$  e

$$f_3^s = T_{33} = \nu (T_{11} + T_{22}). \quad (5.18)$$

Analogamente, na superfície de fundo, tem-se  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$  e, portanto,  $f_\alpha^s = 0$  e

$$f_3^s = -T_{33} = -\nu (T_{11} + T_{22}) \quad (5.19)$$

Resumindo, seja um sólido prismático como esquematizado na Figura 5.3, sob a ação de um campo de forças de volume  $f_\alpha^B(x_1, x_2)$ ,  $f_3^B = 0$  e forças de superfície dadas na superfície lateral por  $f_\alpha^s(x_1, x_2)$  e  $f_3^s = 0$ . Procura-se determinar o campo de deslocamentos  $u_\alpha(x_1, x_2)$ , as componentes de tensão  $T_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  e as componentes de deformação  $\varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  tais que

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + f_1^B = 0 \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + f_2^B = 0 \quad (5.21)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (5.22)$$

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\} \quad (5.23)$$

para todo o ponto do interior do sólido e

$$\sum_{\beta=1}^2 T_{\alpha\beta} n_\beta = f_\alpha^s \quad (5.24)$$

na superfície lateral.

Os campos  $u_\alpha(x_1, x_2)$ ,  $T_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  e  $\varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  que atendam (5.17)–(5.24) são uma solução do estado plano de deformação. Esses campos considerados conjuntamente com  $u_3 = 0$ ,  $T_{\alpha 3} = T_{3\alpha} = 0$ ,  $T_{33} = \nu(T_{11} + T_{22})$ ,  $\varepsilon_{\alpha 3} = \varepsilon_{3\alpha} = 0$ ,  $\varepsilon_{33} = 0$  são uma solução do problema da elasticidade linear quando as forças de superfície no topo e no fundo são aplicadas segundo (5.18) e (5.19).

### 5.1.2 Estado plano de tensão

A motivação para a a formulação de um modelo matemático denominado estado plano de tensão corresponde à situação descrita na Figura 5.4.

Como indicado, tem-se uma chapa delgada ( $h \ll$  que as outras dimensões características no plano da chapa) com carregamento de forças de superfície e de volume paralelas ao plano da chapa e independentes de  $x_3$ .

Tendo-se esse modelo como motivação, admite-se que

$$\begin{aligned} T_{33} = T_{13} = T_{23} &= 0 \\ f_3^S &= 0 \\ f_3^B &= 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

A partir dessas hipóteses, as equações diferenciais de equilíbrio admitem simplificações

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \overbrace{\frac{\partial T_{13}}{\partial x_3}}^0 + f_1^B &= 0 \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \overbrace{\frac{\partial T_{23}}{\partial x_3}}^0 + f_2^B &= 0 \\ \overbrace{\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1}}^0 + \overbrace{\frac{\partial T_{32}}{\partial x_2}}^0 + \overbrace{\frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}}^0 + \overbrace{f_3^B}^0 &= 0 \end{aligned}$$

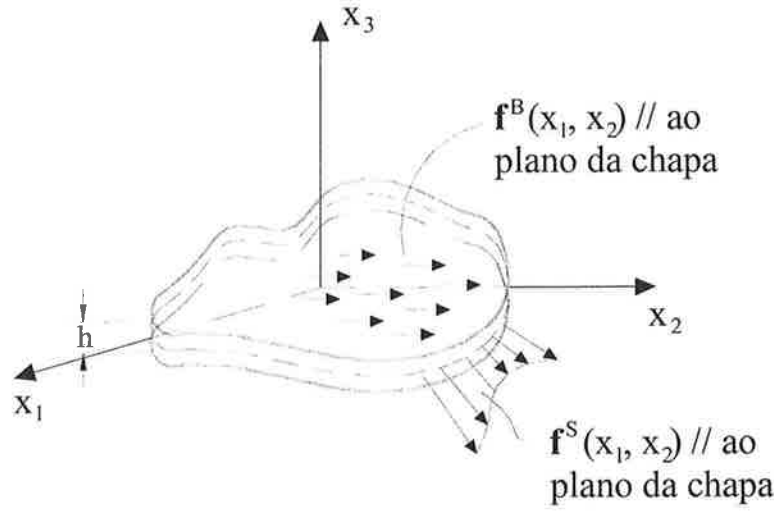


Figura 5.4: Descrição da chapa delgada com carregamentos paralelos ao plano da chapa.

ou seja, as equações de equilíbrio tornam-se

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + f_1^B = 0 \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + f_2^B = 0. \quad (5.27)$$

Supõe-se ainda que  $T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  tornando as equações diferenciais acima (5.26) e (5.27) mais simples, uma vez que as funções incógnitas são agora de duas variáveis independentes.

Considerando as equações constitutivas tem-se

$$\varepsilon_{11} = \frac{T_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} T_{22} \quad (5.28)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{T_{22}}{E} - \frac{\nu}{E} T_{11} \quad (5.29)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (T_{11} + T_{22}) \quad (5.30)$$

$$\gamma_{12} = \frac{2(1+\nu)}{E} T_{12} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{12} = \frac{(1+\nu)}{E} T_{12} \quad (5.31)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \varepsilon_{3\alpha} = \frac{(1+\nu)}{E} T_{3\alpha}. \quad (5.32)$$

Como  $T_{3\alpha} = 0$ , resulta de (5.32)

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \varepsilon_{3\alpha} = 0 \quad (5.33)$$

e de (5.28) e (5.29), lembrando que  $T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$ , chega-se a

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2).$$

Organizando de forma matricial as tensões no plano segundo a convenção definida em (5.13)

$$\{\epsilon\} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \{\sigma\}, \quad (5.34)$$

o que define  $[D]$ . A inversão de (5.34) leva a

$$[C] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Pode-se formular o problema do estado plano de tensão como: determinar  $u_\alpha(x_1, x_2)$ ,  $T_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  e  $\varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  tal que

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + f_1^B = 0 \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + f_2^B = 0 \quad (5.36)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (5.37)$$

$$[\sigma] = [C][\epsilon] \quad (5.38)$$

para todo o ponto no interior da chapa. Na superfície lateral deve-se ter

$$\sum_{\beta=1}^2 T_{\alpha\beta} n_\beta = f_\alpha^s. \quad (5.39)$$

As equações acima, (5.35)–(5.38) e a condição de contorno (5.39), quando solucionadas, fornecem os deslocamentos ( $u_\alpha$ ), as deformações ( $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ) e as tensões ( $T_{\alpha\beta}$ ) no plano, que são a solução do problema do estado plano de tensão.

Nota-se que a condição de contorno de não haver forças de superfície nas faces superior e inferior da chapa está implicitamente satisfeita pelas hipóteses sobre o campo de tensões. De fato, para essas superfícies,  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$  e considerando primeiramente  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$  tem-se

$$f_i^s = \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j = T_{i3} = 0.$$

Analogamente, para  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$ ,  $f_i^s = -T_{i3} = 0$ .

A partir da solução do estado plano de tensão, pode-se determinar  $\varepsilon_{33}$  pela equação (5.30). É interessante notar que, caso se considerem as componentes de deslocamento, de tensão e de deformação no plano correspondente à solução do estado plano de tensão e se considerem, adicionalmente,  $\varepsilon_{33}$  dado por (5.30),  $u_3$  resultante da integração de  $\varepsilon_{33}$ ,  $T_{31} = T_{32} = T_{33} = 0$  (por hipótese) e  $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$  pela equação (5.33), tais campos não corresponderão, em geral, à solução do problema da elasticidade tridimensional para as forças de volume e de superfície definidas. Isso pode ser explicado quando se considera que se partiu de hipóteses sobre o campo de tensões e se verificaram, a partir daí, o equilíbrio, as equações constitutivas e as relações deslocamento–deformação para as componentes no plano,  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ . No entanto, não se impuseram as relações deslocamento–deformação para as componentes  $\varepsilon_{\alpha 3}$ ,  $\varepsilon_{3\alpha}$ . Mostra-se que, quando se soluciona o problema da chapa de forma exata (considerando todas as equações da elasticidade linear), a resposta é bastante próxima da fornecida pela solução do estado plano de tensão e é tão mais próxima quanto menor for a espessura, sendo que o erro cometido é proporcional ao quadrado da espessura.

Considere agora a definição de

$$E_* = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

e

$$\nu_* = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

onde  $E_*$  e  $\nu_*$  são denominados módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson efetivos. É fácil verificar que

$$\frac{1 + \nu_*}{E_*} = \frac{\left(1 + \frac{\nu}{1 - \nu}\right) (1 - \nu) (1 + \nu)}{E} = \frac{1 + \nu}{E}. \quad (5.40)$$

Partindo-se da matriz  $[D]$  para o estado plano de deformação dada por (5.15) e substituindo-se (5.40) resulta

$$[D] = \frac{1 + \nu_*}{E_*} \begin{bmatrix} 1 - \nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} (1 + \nu_*) (-\nu) &= \left(1 + \frac{\nu}{1 - \nu}\right) (-\nu) = \frac{1}{1 - \nu} (-\nu) = -\frac{\nu}{1 - \nu} = -\nu_* \\ (1 - \nu) (1 + \nu_*) &= (1 - \nu) \left(1 + \frac{\nu}{1 - \nu}\right) = (1 - \nu) \frac{1}{(1 - \nu)} = 1. \end{aligned}$$

Portanto,  $[D]$  expresso em termos das constantes elásticas efetivas é dada por

$$[D] = \frac{1}{E_*} \begin{bmatrix} 1 & -\nu_* & 0 \\ -\nu_* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu_*) \end{bmatrix}$$

que é idêntica à matriz  $[D]$  para o estado plano de tensão, a menos do fato que, na matriz  $[D]$  acima se consideram constantes elásticas efetivas.

Comparando então as equações para o estado plano de tensão (5.35), (5.36), (5.37) e (5.38) e as para o estado plano de deformação (5.21), (5.22), (5.20) e (5.23) pode-se concluir que são idênticas a menos do fato de as equações constitutivas para o estado plano de deformação serem escritas usando constantes elásticas efetivas.

Dessa forma pode-se resolver, para os campos no plano, um problema de estado plano de tensão e obter também a solução do problema para estado plano de deformação só pela substituição das constantes elásticas por efetivas e vice-versa.

Nota-se, no entanto, que a interpretação do significado das soluções deve guiar-se pelas hipóteses dos modelos e que componentes fora do plano, como  $T_{33}$  e  $\varepsilon_{33}$ , são diferentes para os dois modelos (vejam-se as equações (5.11), (5.18), (5.30) e (5.25)).

# Capítulo 6

## Princípio dos trabalhos virtuais

Nesta seção introduz-se inicialmente o princípio dos trabalhos virtuais no contexto de um problema unidimensional. Em seguida, generaliza-se esse princípio para a elasticidade tridimensional, derivando-se, em particular, sua forma para os modelos de estado plano de tensão e estado plano de deformação.

### 6.1 Princípio dos trabalhos virtuais para um problema unidimensional

Considere-se o problema de uma barra prismática submetida a um carregamento axial distribuído  $f(x)$  dado por unidade de comprimento e uma força concentrada em sua extremidade  $R$ , como mostrado na Figura 6.1.

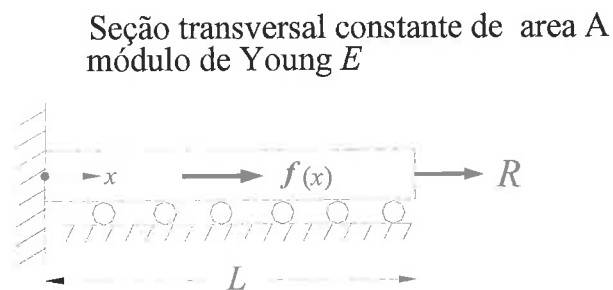


Figura 6.1: Problema de barra submetida a carregamento axial.

Revisitam-se a seguir as equações básicas que descrevem esse problema, enfatizando-se as condições fundamentais:

#### Equilíbrio

Como usual, considera-se o equilíbrio de um elemento diferencial de barra, conforme mostrado esquematicamente na Figura 6.2.

$$-\sigma A + (\sigma + d\sigma) A + f dx = 0$$

e

$$A \frac{d\sigma}{dx} + f = 0 \quad (6.1)$$

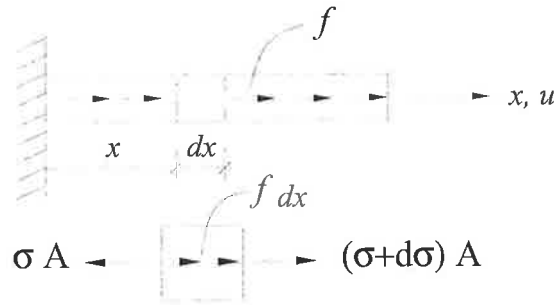


Figura 6.2: Equilíbrio de um elemento diferencial de barra.

que é a equação de equilíbrio. Note-se que, como  $f(x)$  é uma força dada por unidade de comprimento, a força por unidade de volume será dada por  $f^B(x) = f(x)/A$  e dividindo-se a equação (6.1) por  $A$ ,

$$\frac{d\sigma}{dx} + f^B = 0$$

que é a particularização da 1ª equação de equilíbrio da elasticidade linear para uma situação unidimensional ( $\sigma = \sigma_{xx}$ ).

### Compatibilidade

A medida relevante de deformação para esse caso é o alongamento linear na direção axial ( $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$ ) que está relacionado com o campo de deslocamento axial  $u(x)$  por

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (6.2)$$

### Equação constitutiva

Considerando-se o material elástico linear tem-se

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (6.3)$$

Tendo-se os requisitos básicos expressos pelas equações (6.1), (6.2) e (6.3), e impondo-se as condições de contorno, pode-se escrever a denominada **formulação diferencial** do problema dada por

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} + f = 0 \quad \text{na barra} \quad (6.4)$$

$$u|_{x=0} = 0 \quad (6.5)$$

$$EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = R \quad (6.6)$$

onde (6.5) é a condição de contorno de deslocamentos na extremidade dada por  $x = 0$  e (6.6) é a condição em termos de forças na extremidade  $x = L$  que é obtida por

$$\sigma(L)A = E\varepsilon(L)A = EA \frac{du}{dx}(L) = R.$$

Dada uma forma funcional particular de  $f(x)$ , pode-se obter a solução da formulação diferencial integrando-se (6.4) duas vezes em relação a  $x$  e impondo-se as condições de contorno (6.5) e (6.6).

Tem-se como objetivo derivar uma forma alternativa, porém equivalente à formulação diferencial apresentada acima.

Considerando-se a equação de equilíbrio (6.1) pode-se escrever

$$\left( A \frac{d\sigma}{dx} + f \right) \delta u = 0 \quad (6.7)$$

onde  $\delta u(x)$  é uma função contínua arbitrária definida no intervalo  $0 \leq x \leq L$ , que satisfaz a condição de contorno em deslocamento da formulação diferencial, isto é,  $\delta u|_{x=0} = 0$ . Um campo de deslocamentos que respeita as condições de vinculação é chamado **cinematicamente admissível**. Portanto, um campo de deslocamentos virtuais será sempre entendido como um campo de deslocamentos cinematicamente admissível. A função  $\delta u(x)$  é chamada de campo de deslocamentos virtuais.

Utilizando-se a equação (6.7) é imediato que

$$\int_0^L \left( A \frac{d\sigma}{dx} + f \right) \delta u \, dx = 0 \quad (6.8)$$

ou, equivalentemente, que

$$- \int_0^L A \frac{d\sigma}{dx} \delta u \, dx = \int_0^L f \delta u \, dx \quad (6.9)$$

A integração do primeiro termo da equação (6.9) por partes leva a

$$- \int_0^L A \frac{d\sigma}{dx} \delta u \, dx = - [A\sigma\delta u] \Big|_0^L + \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} A\sigma \, dx$$

e substituindo-se na equação (6.9) resulta

$$\int_0^L \frac{d\delta u}{dx} A\sigma \, dx = \int_0^L f \delta u \, dx + (A\sigma\delta u) \Big|_0^L \quad (6.10)$$

chamando-se  $\delta\varepsilon = \frac{d\delta u(x)}{dx}$  o campo de deformações virtuais e utilizando a condição de contorno em termos de forças  $\sigma A|_{x=L} = R$ , pode-se reescrever (6.10) como

$$\int_0^L \delta\varepsilon \sigma A \, dx = \int_0^L f \delta u \, dx + R \delta u \Big|_{x=L} \quad (6.11)$$

onde também se usou  $\delta u|_{x=0} = 0$ .

Considerando-se a noção de trabalho usual da Mecânica pode-se interpretar os termos da equação (6.11), iniciando-se pelo lado direito

- $R \delta u|_{x=L} \equiv$  trabalho realizado pela força  $R$  para o deslocamento virtual em  $x = L$ ;
- $\int_0^L f \delta u \, dx \equiv$  trabalho realizado pela força distribuída  $f(x)$  para o campo de deslocamentos virtuais  $\delta u(x)$ ;
- $\int_0^L \delta\varepsilon \sigma A \, dx \equiv$  por definição é chamado trabalho interno realizado pelo campo de tensões  $\sigma(x)$ , solução da formulação diferencial, para o campo de deformações virtuais  $\delta\varepsilon(x)$ .



A equação (6.11) é a expressão matemática do chamado **Princípio dos Trabalhos Virtuais** para o problema da barra.

Mostrou-se acima que, para o campo de tensões que satisfaz a equação de equilíbrio, o trabalho virtual das forças externas é igual ao trabalho virtual das internas – as tensões – para qualquer campo de deslocamentos virtuais que satisfaça a condição de contorno de deslocamento. Resumindo, mostrou-se que satisfazer o equilíbrio implica satisfazer a expressão do princípio dos trabalhos virtuais.

Para se mostrar a equivalência entre satisfazer o equilíbrio e o princípio dos trabalhos virtuais é necessário ainda mostrar que satisfazer o princípio dos trabalhos virtuais implica satisfazer o equilíbrio. Em outras palavras, é necessário mostrar que (6.11) implica (6.1).

Usando integração por partes tem-se

$$\int_0^L \delta \varepsilon \sigma A dx = \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} \sigma A dx = \delta u \sigma A \Big|_0^L - \int_0^L \delta u \frac{d\sigma}{dx} A dx. \quad (6.12)$$

e substituindo-se (6.12) em (6.11) resulta

$$\int_0^L \left( A \frac{d\sigma}{dx} + f \right) \delta u dx - \delta u \sigma A \Big|_0^L + R \delta u \Big|_{x=L} = 0$$

Impondo-se  $\delta u|_{x=0} = 0$

$$\int_0^L \left( A \frac{d\sigma}{dx} + f \right) \delta u dx + \{ (R - \sigma A) \delta u \} \Big|_{x=L} = 0 \quad (6.13)$$

que deve ser válida para qualquer  $\delta u(x)$  que atende  $\delta u(0) = 0$ . Tome-se

$$\delta u(x) = x \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \left( A \frac{d\sigma}{dx} + f \right). \quad (6.14)$$

Apesar de não se saber explicitamente a forma funcional de  $\left( A \frac{d\sigma}{dx} + f \right)$ , a escolha acima é permitida, uma vez que a função definida por (6.14) satisfaz  $\delta u(0) = 0$ . Considerando que a definição de  $\delta u(x)$  em (6.14) também implica que  $\delta u(L) = 0$ , a equação (6.13) torna-se

$$\int_0^L \left( A \frac{d\sigma}{dx} + f \right)^2 x \left( 1 - \frac{x}{L} \right) dx = 0.$$

Considerando-se que no domínio de integração  $(0, L)$ ,  $x > 0$ ,  $\left( 1 - \frac{x}{L} \right) > 0$  e  $\left( A \frac{d\sigma}{dx} + f \right)^2 \geq 0$ , a única possibilidade de a integral se anular é

$$A \frac{d\sigma}{dx} + f = 0 \quad \text{na barra} \quad (6.15)$$

ou seja, satisfazer a equação de equilíbrio.

Tendo-se mostrado (6.15), pode-se retornar à equação (6.13) que se torna

$$\{ (R - \sigma A) \delta u \} \Big|_{x=L} = 0$$

Como  $\delta u|_{x=L}$  pode ser escolhida arbitrariamente, pode-se concluir que

$$R = \sigma A \quad \text{for} \quad x = L.$$

Tem-se, então, que a condição de contorno de força está implicitamente contida na expressão do princípio dos trabalhos virtuais.

Portanto, mostrou-se acima a equivalência entre o princípio dos trabalhos virtuais e o equilíbrio.

A formulação diferencial, equações (6.4), (6.5) e (6.6) foi escrita em termos do campo de deslocamentos. Pode-se escrever o princípio dos trabalhos virtuais também em termos dos deslocamentos somente; para tal usam-se a equação constitutiva e a de compatibilidade resultando o enunciado seguinte:

Determinar  $u(x)$  tal que

$$\int_0^L EA \frac{d\delta u}{dx} \frac{du}{dx} dx = \int_0^L f \delta u dx + R \delta u |_{x=L} \quad (6.16)$$

para todo o  $\delta u(x)$ ,  $\delta u(0) = 0$ .

A expressão (6.16), que é o princípio dos trabalhos virtuais em termos dos deslocamentos, é chamada também de **princípio dos deslocamentos virtuais**.

Considere agora que o problema da barra foi solucionado e a reação  $F$  foi determinada. A situação está esquematicamente representada na Figura 6.3.



Figura 6.3: Problema de barra com a reação explicitamente representada.

Tem-se que

$$F = -\sigma(0) A$$

sendo que nesse caso  $F$  pode ser calculada diretamente por equilíbrio.

$$F = - \left( \int_0^L f dx + R \right)$$

Partindo-se do problema descrito na Figura 6.3, para o qual, não há restrição a deslocamentos e aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais tomando um movimento do corpo rígido caracterizado por uma translação na direção  $x$ .

Considerando  $\alpha$  a magnitude do deslocamento de translação tem-se

$$\int_0^L \delta \varepsilon \sigma A dx = 0 = \int_0^L f \alpha dx + F \cdot \alpha + R \cdot \alpha$$

$$0 = \alpha \left( \int_0^L f dx + F + R \right)$$

O lado esquerdo da equação acima se anula, uma vez que o campo de deslocamentos virtuais é caracterizado por um movimento de corpo rígido, o qual leva a deformações virtuais nulas. De fato,  $\delta \varepsilon = \delta \frac{du}{dx} = \delta \frac{d\alpha}{dx} = 0$ . Como  $\alpha$  é arbitrário a equação conduz a

$$\int_0^L f dx + F + R = 0$$

e, portanto,

$$F = - \left( \int_0^L f dx + R \right)$$

que é a equação de equilíbrio global da barra. Logo, o princípio dos trabalhos virtuais contém tanto o equilíbrio local (diferencial) quanto o equilíbrio global.

## 6.2 Princípio dos trabalhos virtuais para a elasticidade tridimensional

O objetivo da seção anterior foi discutir o princípio dos trabalhos virtuais no contexto de um problema unidimensional, onde, devido à simplicidade do problema unidimensional, foi possível concentrar-se nas idéias essenciais. Nesta seção generaliza-se o princípio dos trabalhos virtuais para problemas tridimensionais da elasticidade linear. É conveniente mencionar que a particularização de tal princípio para os modelos matemáticos derivados da elasticidade tridimensional, como os da elasticidade plana e os modelos estruturais (vigas, placas e cascas), pode ser obtida com certa facilidade tendo-se como referência o modelo tridimensional.

Considere-se a definição do problema da elasticidade linear da seção 5, onde as grandezas envolvidas estão representadas na Figura 5.1. Por conveniência de apresentação, admita-se que os deslocamentos impostos em  $S_u$  sejam nulos. Suponha-se que, para determinado carregamento, isto é, para um campo de forças de superfície  $\mathbf{f}^s$  e para um campo de forças de volume  $\mathbf{f}^B$ , o problema tenha sido solucionado. Seja o campo de tensões que corresponde à solução desse problema da elasticidade linear dado por  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ . Portanto esse campo satisfaz equilíbrio diferencial expresso pelas equações (5.1) e a condição de contorno de forças de superfície em  $S_f$  dada pelas equações (5.4). A equivalência fundamental entre satisfazer equilíbrio e satisfazer o princípio dos trabalhos virtuais, que foi demonstrada no contexto do problema unidimensional, é também válida no contexto do problema tridimensional. Antes de se abordar tal equivalência, pretende-se generalizar os conceitos envolvidos na definição do princípio dos trabalhos virtuais.

Define-se o trabalho dos esforços internos – as tensões –  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  para o campo de deformações virtuais por

$$\begin{aligned} \tau_i = \text{Trabalho dos esforços internos} = & \int_V (\delta \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \delta \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + \\ & + \delta \varepsilon_{zz} \sigma_{zz} + \delta \gamma_{xy} \sigma_{xy} + \delta \gamma_{xz} \sigma_{xz} + \delta \gamma_{yz} \sigma_{yz}) dV. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Utilizando-se a notação de matriz coluna para as componentes do tensor das deformações e das tensões, pode-se reescrever (6.17) como

$$\tau_i = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV.$$

O trabalho dos esforços externos é dado por

$$\tau_e = \text{Trabalho dos esforços externos} = \int_V \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}^S\} dS$$

onde

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}.$$

O princípio dos trabalhos virtuais para a elasticidade tridimensional pode ser escrito como

$$\int_V \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^s\} dS. \quad (6.18)$$

Nota-se que o campo de deformações virtuais  $\{\delta\epsilon\}$  é obtido a partir do campo de deslocamentos virtuais  $\{\delta u\}$  pelo uso das relações de deslocamento – deformação (5.2).

Demonstra-se no apêndice 9.2 um resultado bastante importante. Mostra-se que, se um campo de tensões satisfaz o equilíbrio e as condições de contorno de forças e superfície, então a expressão do princípio dos trabalhos virtuais (6.18) é satisfeita, que é a generalização para a situação tridimensional do resultado detalhado para o problema unidimensional.

Reconhecendo-se a equivalência entre satisfazer equilíbrio e o princípio dos trabalhos virtuais discutida no Apêndice 9.2, pode-se formular, alternativamente, o problema da elasticidade linear por:

Determinar o campo de deslocamentos  $\{u\}$ , o campo de tensores de tensões de Cauchy  $\{\sigma\}$  e campo de deformação  $\{\epsilon\}$  tal que

$$\int_V \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^s\} dV$$

para qualquer campo de deslocamentos virtuais  $\{\delta u\}$  tal que  $\{\delta u\} = \{0\}$  em  $S_u$  e que para qualquer ponto  $x$  de  $V$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\}.$$

e

$$u_i = \hat{u}_i \quad i = 1, 2, 3$$

para qualquer  $x$  de  $S_u$ .

Ou seja as equações de equilíbrio foram substituídas pela expressão do princípio dos trabalhos virtuais dada a equivalência discutida acima.

Consideram-se a seguir as simplificações do princípio dos trabalhos virtuais para o estado plano de tensão e o estado plano de deformação.

## 6.3 Princípio dos trabalhos virtuais para a elasticidade no plano

### 6.3.1 Estado plano de tensão

Considerando-se o modelo de estado plano de tensão descrito na seção 6.2 recorda-se que as únicas componentes não nulas de tensão são  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$  e as componentes não nulas de deformação são  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ,  $\gamma_{xy}$  e  $\epsilon_{zz}$ .

Partindo-se da expressão geral do princípio dos trabalhos virtuais para a elasticidade tridimensional e introduzindo-se as simplificações acima tem-se

$$\begin{aligned}\int_V \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma\} dV &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\delta\epsilon_{xx}\sigma_{xx} + \delta\epsilon_{yy}\sigma_{yy} + \delta\epsilon_{zz}0 + \delta\gamma_{xy}\sigma_{xy}) dzdA \\ &= h \int_A (\delta\epsilon_{xx}\sigma_{xx} + \delta\epsilon_{yy}\sigma_{yy} + \delta\gamma_{xy}\sigma_{xy}) dA.\end{aligned}\quad (6.19)$$

Lembrando que as forças de volume  $\mathbf{f}^B$  e as forças de superfície  $\mathbf{f}^s$  são paralelas ao plano  $xy$  e não dependem de  $z$ , o trabalho dos esforços externos pode ser escrito

$$\begin{aligned}\int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^s\} dS &= \\ \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\delta u f_x^B + \delta v f_y^B) dzdA + \int_{L_f} \int_{-h/2}^{h/2} (\delta u f_x^s + \delta v f_y^s) dzdL &= \\ h \int_A (\delta u f_x^B + \delta v f_y^B) dA + h \int_{L_f} (\delta u f_x^s + \delta v f_y^s) dL.\end{aligned}\quad (6.20)$$

Na expressão acima as matrizes-coluna  $\{\sigma\}$  e  $\{\epsilon\}$  contêm somente as componentes do plano, como definido anteriormente.

Representa-se por  $L_f$  a curva dada pela interseção da parte da superfície lateral dada por  $S_f$  com o plano  $xy$ .

Analogamente, definem-se

$$\{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix} ; \quad \{f^B\} = \begin{Bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \end{Bmatrix} ; \quad \{f^s\} = \begin{Bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

resultando, formalmente, a mesma expressão para o princípio dos trabalhos virtuais para a situação tridimensional,

$$\int_A \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_A \{\delta u\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{f^s\} dL. \quad (6.22)$$

Enfatiza-se que as matrizes-coluna da expressão (6.21) possuem somente as componentes no plano como definido acima. Nota-se que  $\{f^B\}$  e  $\{f^s\}$  em (6.22) são dadas por unidade de volume e de superfície, respectivamente.

### 6.3.2 Estado plano de deformação

A discussão do modelo de estado plano de deformação mostrou que as componentes de deformação não nulas são  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  e  $\gamma_{xy}$  e as não nulas de tensão são  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{zz}$ . Lembrando que para o estado plano de deformação qualquer seção transversal tem o mesmo estado de tensão e de deformação, pode-se escrever o princípio dos trabalhos virtuais para uma espessura unitária. Procedendo-se dessa forma chega-se a

$$\int_A \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_A \{\delta u\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{f^s\} dL. \quad (6.23)$$

onde as matrizes coluna têm a mesma interpretação das definidas para o estado plano de tensão.

# Capítulo 7

## Introdução ao Método dos Elementos Finitos

### 7.1 Formulação do método dos elementos finitos para a elasticidade plana

Considere-se a formulação do problema da elasticidade linear quando o equilíbrio é imposto por meio do princípio dos trabalhos virtuais.

#### Equilíbrio

$$\int_A \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma\} dA = \int_A \{\delta u\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{f^s\} dL \quad (7.1)$$

onde  $\{u\}^T = \{ u \quad v \}$ .

#### Compatibilidade

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (7.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

#### Equação Constitutiva

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\} \quad (7.3)$$

Definindo-se

$$[\partial_\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

A equação (7.2) pode ser reescrita como

$$\{\epsilon\} = [\partial_\epsilon] \{u\}. \quad (7.4)$$

Substituindo-se (7.4) e (7.3) em (7.1) resulta

$$\int_A \{\delta u\}^T [\partial_\epsilon]^T [C] [\partial_\epsilon] \{u\} dA = \int_A \{\delta u\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{f^s\} dL \quad (7.5)$$

Portanto uma formulação do problema da elasticidade plana em termos de deslocamentos pode ser escrita como:

Determinar o campo de deslocamentos  $\{u\}$ ,  $\{u\}^T = \{ u(x, y) \quad v(x, y) \}$  tal que

$$\int_A \{\delta u\}^T [\partial_\epsilon]^T [C] [\partial_\epsilon] \{u\} dA = \int_A \{\delta u\}^T \{f^B\} dA + \int_{L_f} \{\delta u\}^T \{f^s\} dL \quad (7.6)$$

para qualquer  $\{\delta u\}$ ,  $\{\delta u\}^T = \{ \delta u(x, y) \quad \delta v(x, y) \}$  tal que  $\{\delta u\} = \{0\}$  em  $L_u$ , onde  $L_u$  é a curva que fica definida pela intersecção da superfície lateral que tem deslocamentos impostos,  $S_u$ , com o plano  $xy$ .

Apesar de o problema estar bem definido pelas equações acima não há uma metodologia para se determinar de forma direta o campo de deslocamentos que satisfaz (7.6) para qualquer campo de deslocamentos virtuais. Em vez de se considerar todos os possíveis deslocamentos virtuais e de se admitir em princípio que as funções  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  que caracterizam a solução  $\{u\}$  tenham uma forma funcional qualquer, impõe-se que tanto os deslocamentos virtuais bem como as funções-solução tenham uma pré-determinada variação funcional. No método dos elementos finitos a definição da variação funcional acima mencionada segue uma determinada metodologia que se descreve a seguir.

O domínio de definição do problema da elasticidade plana é particionado em uma série de subdomínios como mostrado na Figura 7.1. Mostra-se também na Figura 7.1 um subdomínio genérico  $A^{(m)}$  que será denominado de elemento  $(m)$ . Para cada elemento define-se um conjunto de pontos denominados pontos nodais ou simplesmente nós. Mostram-se esquematicamente os pontos nodais do elemento  $(m)$  na Figura 7.2. Na Figura 7.3 mostram-se os nós considerando-se todos os elementos da partição. O resultado de uma determinada partição do domínio, levando a um conjunto de elementos é denominado de malha. Observa-se que os pontos nodais em geral pertencem a mais de um elemento. Por exemplo, na Figura 7.3 o nó  $k$  pertence aos elementos  $p$ ,  $l$ ,  $m$  e  $q$ . O sistema global de coordenadas será representado pelas letras maiúsculas  $X, Y$ . As letras minúsculas são reservadas para um sistema local de coordenadas  $x, y$  associado a cada elemento da malha.

Admite-se que os deslocamentos no elemento  $(m)$  estão bem definidos pelo conhecimento dos deslocamentos dos pontos nodais desse elemento. Os deslocamentos são obtidos a partir dos deslocamentos nodais por interpolação. Seja

$$\{u^{(m)}\} = \left\{ \begin{array}{l} u(x, y) \\ v(x, y) \end{array} \right\}$$

os deslocamentos medidos no sistema local de coordenadas  $x, y$  para o elemento  $(m)$ .

Com o intuito de exemplificar como a interpolação dos deslocamentos pode ser realizada, considere-se um elemento retangular genérico da malha mostrada na Figura 7.4. Um detalhe na região do elemento  $(m)$  é apresentado na Figura 7.5. Deseja-se definir funções de interpolação que, a partir dos deslocamentos nodais, forneçam os deslocamentos em qualquer ponto do domínio do elemento. É conveniente adotar uma numeração local para graus de liberdade nodais do elemento como mostrado na Figura 7.6. Nessa figura também se define

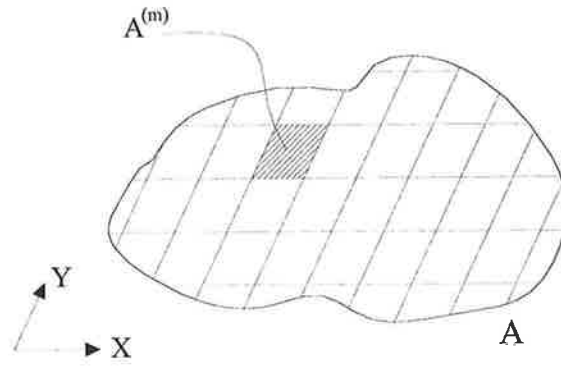


Figura 7.1: Partição do domínio em subdomínios ou elementos

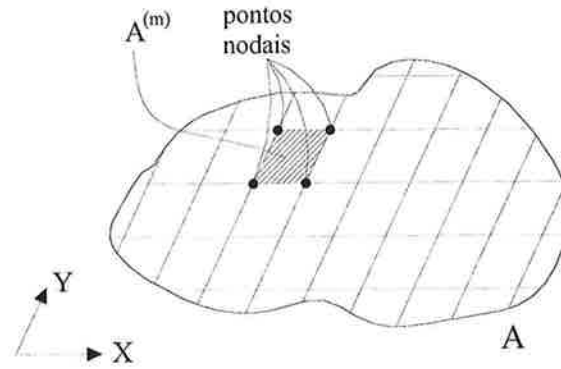


Figura 7.2: Pontos nodais para o elemento ( $m$ )

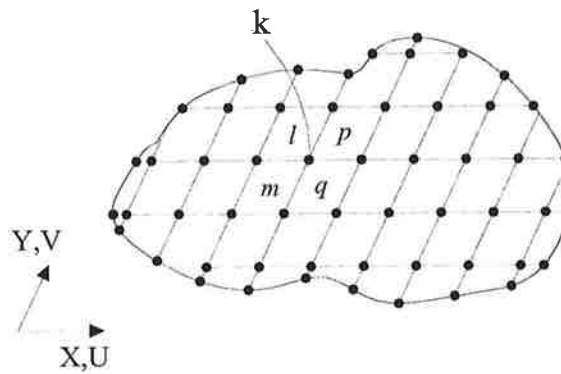


Figura 7.3: Pontos nodais considerando-se todos os elementos da malha.



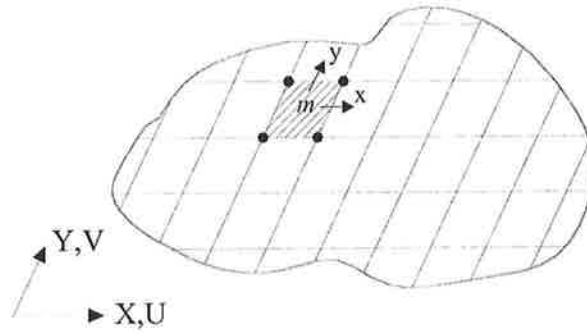


Figura 7.4: Elemento retangular de quatro nós de uma malha

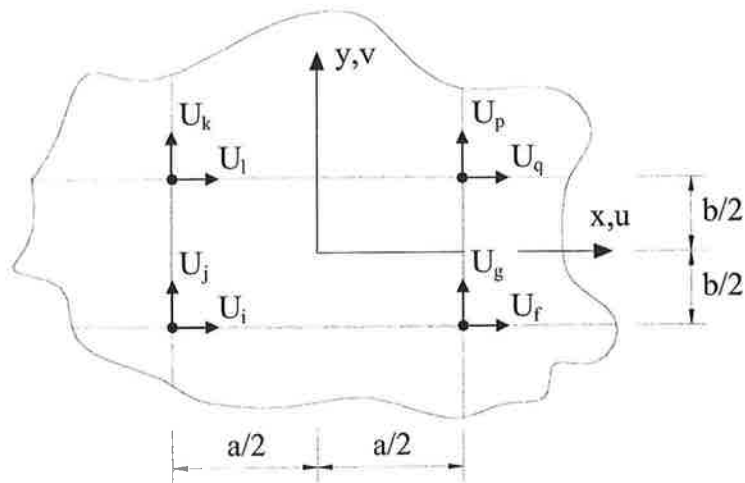


Figura 7.5: Detalhe da região do elemento ( $m$ ) indiciando-se a numeração dos graus de liberdade globais.

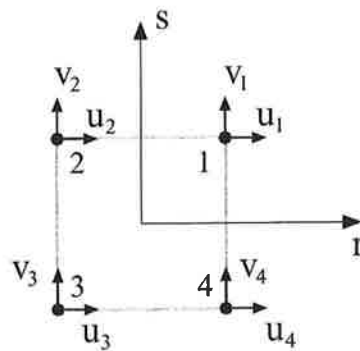


Figura 7.6: Numeração dos graus de liberdade locais do elemento. Sistema auxiliar de coordenadas  $r$  e  $s$ .

um sistema de coordenadas auxiliar relacionado ao sistema local  $xy$  por

$$x = \frac{ra}{2} \quad \text{ou} \quad r = \frac{2x}{a} \quad (7.7)$$

e

$$y = \frac{sb}{2} \quad \text{ou} \quad s = \frac{2y}{b} \quad (7.8)$$

de forma que, para qualquer elemento retangular, o domínio do elemento no sistema auxiliar  $r, s$  será dado por  $-1 \leq r \leq 1$  e  $-1 \leq s \leq 1$ .

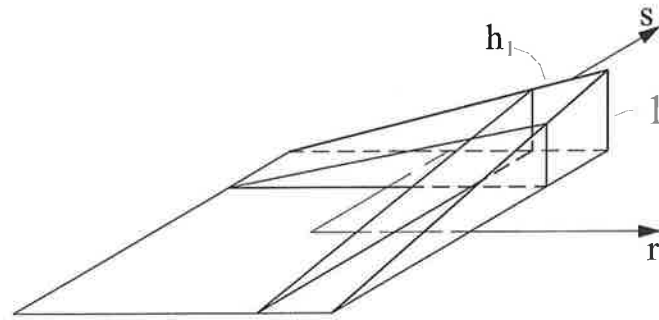


Figura 7.7: Descrição esquemática função  $h_1(r, s)$ .

Pode-se definir a função de interpolação associada ao nó 1,  $h_1$ . Mostra-se na Figura 7.7 geometricamente a função  $h_1$  no sistema auxiliar  $r$  e  $s$ . Deseja-se que a função seja linear em  $r$  e linear em  $s$  e que tenha valor 1 correspondente às coordenadas do nó 1, que no sistema  $r$  e  $s$  são  $(1, 1)$ . Quer-se também que a função seja nula nos demais pontos nodais do elemento: nó 2 de coordenadas  $r = -1, s = 1$ ; nó 3  $r = -1, s = -1$ ; nó 4  $r = 1, s = -1$ . Então, por inspeção,

$$h_1(r, s) = \frac{1}{4} (1 + r) (1 + s)$$

que atende os requisitos estabelecidos acima. Analogamente,

$$h_2(r, s) = \frac{1}{4} (1 - r) (1 + s)$$

$$h_3(r, s) = \frac{1}{4} (1 - r) (1 - s)$$

$$h_4(r, s) = \frac{1}{4} (1 + r) (1 - s).$$

Essas funções podem ser diretamente expressas em termos de  $x$  e  $y$  usando (7.7) e (7.8)

$$h_1(x, y) = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2x}{a} \right) \left( 1 + \frac{2y}{b} \right) \quad (7.9)$$

$$h_2(x, y) = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2x}{a} \right) \left( 1 + \frac{2y}{b} \right) \quad (7.10)$$

$$h_3(x, y) = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2x}{a} \right) \left( 1 - \frac{2y}{b} \right) \quad (7.11)$$

$$h_4(x, y) = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2x}{a} \right) \left( 1 - \frac{2y}{b} \right). \quad (7.12)$$

Na verdade as funções de interpolação (7.9) a (7.12), dada a simplicidade do elemento considerado, poderiam ter sido obtidas por inspeção diretamente no sistema  $x, y$  sem a necessidade do sistema auxiliar. No entanto, como o sistema  $r$  e  $s$  será usado adiante, é conveniente introduzi-lo agora nesse contexto simplificado. Definidas as funções de interpolação, pode-se caracterizar a interpolação dos deslocamentos por

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^4 h_i u_i \quad (7.13)$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^4 h_i v_i. \quad (7.14)$$

Pelas propriedades das funções de interpolação é imediato reconhecer-se que tomando a coordenada do nó  $j$  ( $j$  na numeração local, portanto  $j = 1, 2, 3$  e  $4$ ) como  $x = x_j$  e  $y = y_j$  tem-se

$$u(x_j, y_j) = \sum_{i=1}^4 h_i(x_j, y_j) u_i.$$

Como  $h_i(x_j, y_j) = 1$  quando  $i = j$  e  $h_i(x_j, y_j) = 0$  quando  $i \neq j$  tem-se

$$u(x_j, y_j) = u_j.$$

Analogamente,

$$v(x_j, y_j) = v_j.$$

As expressões  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  dos deslocamentos interpolados, definidas por (7.13) e (7.14) têm os mesmos termos monomiais que as funções de interpolação, portanto serão lineares em  $x$  e em  $y$  havendo, no entanto um termo monomial  $xy$ .

Definindo-se uma matriz coluna com deslocamentos nodais no sistema local de numeração por

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix},$$

pode-se escrever que

$$\{u^{(m)}\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [H] \{u\} \quad (7.15)$$

onde

$$[H] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix}$$

Nota-se que o particular elemento a que  $[H]$  se refere fica subentendido pelo contexto.

Seja  $\{U\}$  a matriz coluna que abriga os deslocamentos de todos os pontos nodais do modelo de elementos finitos referidos ao sistema global. Representa-se  $\{U\}$  por

$$\{U\}^T = \{ U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_n \}$$

onde  $U_i$  pode representar tanto um deslocamento na direção de  $X$  ou de  $Y$ .

Pode-se escrever

$$\{u^{(m)}\} = [H^{(m)}] \{U\} \quad (7.16)$$

onde  $[H^{(m)}]$  é também uma matriz de interpolação dos deslocamentos para o elemento  $(m)$  que define os deslocamentos no interior do elemento a partir dos deslocamentos nodais referidos ao sistema global.

Para se obter a matriz  $[H^{(m)}]$  basta colocar adequadamente as funções de interpolação obedecendo a correlação que existe entre a numeração local e a global dos nós. Então

$$[H^{(m)}] = \begin{bmatrix} & & & U_k & & & & U_\ell & U_i & & U_q \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_2 & h_3 & \dots & h_1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ & & & & & & & & & & & \\ U_f & U_p & & U_j & & & & U_g & & & & \\ h_4 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & & & & & \\ 0 & h_1 & \dots & h_3 & \dots & h_4 & \dots & & & & & \end{bmatrix}$$

A matriz  $[H^{(m)}]$  acima se refere ao elemento  $(m)$  mostrado na Figura 7.5.

Nota-se ainda que a matriz  $[H^{(m)}]$  tem várias entradas nulas (todas as entradas indicadas por pontos são nulas também) já que os deslocamentos no elemento  $(m)$  dependem somente do valor dos deslocamentos dos nós que pertencem ao elemento  $(m)$ . As entradas associadas aos deslocamentos de nós do elemento  $(m)$  são dadas pelas funções de interpolação. A partir de  $\{u^{(m)}\}$ , considerando as relações deslocamento-deformação, pode-se obter as deformações para o elemento  $(m)$

$$\{\epsilon^{(m)}\} = [B^{(m)}] \{U\} \quad (7.17)$$

onde

$$[B^{(m)}] = [\partial_\epsilon] [H^{(m)}]$$

e, finalmente, a equação constitutiva para o elemento  $(m)$  fica definida por

$$\{\sigma^{(m)}\} = [C^{(m)}] \{\epsilon^{(m)}\} \quad (7.18)$$

sendo que para um material homogêneo  $[C^{(m)}] = [C]$ .

As equações (7.16), (7.17) e (7.18) serão substituídas na expressão dos trabalhos virtuais (7.1). Como a expressão (7.1) envolve integrais, essas integrais podem ser calculadas convenientemente como a soma das integrais nos subdomínios, isto é, nos elementos. Escrevendo-se o princípio dos trabalhos virtuais dessa forma

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n_e} \int_{A^{(m)}} \{\delta\epsilon^{(m)}\}^T \{\sigma^{(m)}\} dA^{(m)} &= \sum_{m=1}^{n_e} \int_{A^{(m)}} \{\delta u^{(m)}\}^T \{f^{B^{(m)}}\} dA^{(m)} + \\ \sum_{m=1}^{n_e} \int_{L_1^{(m)}, \dots, L_q^{(m)}} \{\delta u^{(m)}\}^T \{f^s{}^{(m)}\} dL^{(m)} & \end{aligned} \quad (7.19)$$

onde  $n_e$  é o número de elementos da malha e  $L_1^{(m)}, L_2^{(m)}, \dots, L_q^{(m)}$  representam os lados dos elementos que pertencem à fronteira do domínio  $L_f$ , portanto, sujeitos a forças de superfície. Quando se tem um elemento no interior do domínio (isto é a intersecção de seus lados com  $L_f$  é vazia) esse termo correspondente às forças de superfície será nulo.

Considerando ainda que os deslocamentos virtuais são interpolados da mesma forma que os deslocamentos

$$\{\delta u^{(m)}\} = [H^{(m)}] \{\delta U\} \quad (7.20)$$

$$\{\delta \epsilon^{(m)}\} = [B^{(m)}] \{\delta U\} \quad (7.21)$$

e substituindo-se (7.16), (7.17), (7.18), (7.20) e (7.21) em (7.19)

$$\begin{aligned} \{\delta U\}^T & \left[ \sum_{m=1}^{n_e} \int_{A^{(m)}} [B^{(m)}]^T \{C^{(m)}\} [B^{(m)}] dA^{(m)} \right] \{U\} = \\ \{\delta U\}^T & \left[ \sum_{m=1}^{n_e} \left( \int_{A^{(m)}} [H^{(m)}]^T \{f^{B^{(m)}}\} dA^{(m)} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{n_e} \left( \int_{L_1^{(m)}, \dots, L_q^{(m)}} [H^{(m)}]^T \{f^{S^{(m)}}\} dL^{(m)} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.22)$$

Nota-se que, como  $\{U\}$  e  $\{\delta U\}$  abrigam os deslocamentos nodais de todos os pontos, eles podem ser colocados para fora das integrais e dos somatórios.

Definindo-se

$$[K^{(m)}] = \int_{A^{(m)}} [B^{(m)}]^T \{C^{(m)}\} [B^{(m)}] dA^{(m)} \quad (7.23)$$

$$\{R_B^{(m)}\} = \int_{A^{(m)}} [H^{(m)}]^T \{f^{B^{(m)}}\} dA^{(m)}$$

$$\{R_S^{(m)}\} = \int_{L_1^{(m)}, \dots, L_q^{(m)}} [H^{(m)}]^T \{f^{S^{(m)}}\} dL^{(m)}$$

e

$$[K] = \sum_{m=1}^{n_e} [K^{(m)}] \quad (7.24)$$

$$\{R_B\} = \sum_{m=1}^{n_e} \{R_B^{(m)}\}$$

$$\{R_S\} = \sum_{m=1}^{n_e} \{R_S^{(m)}\}$$

$$\{R\} = \{R^B\} + \{R^S\}.$$

Pode-se escrever (7.22)

$$\{\delta U\}^T ([K] \{U\} - \{R\}) = 0.$$

Como os deslocamentos virtuais devem ser arbitrários e

$\{\delta u^{(m)}\} = [H^{(m)}] \{\delta U\}$ ,  $\{\delta U\}$  pode ser tomado arbitrariamente. Então resulta

$$[K] \{U\} = \{R\} \quad (7.25)$$

**Exemplo** Considere o problema descrito na Figura 7.8.

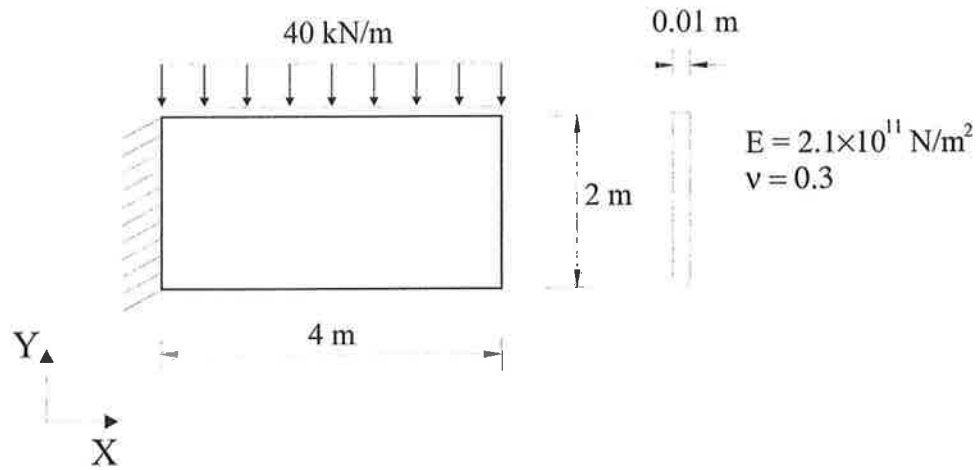


Figura 7.8: Problema de uma chapa em balanço

Seja o modelo de elementos finitos mostrado na Figura 7.9.

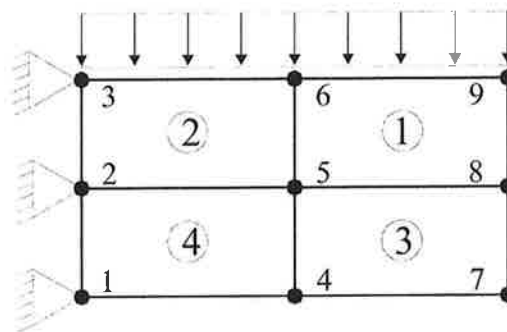


Figura 7.9: Modelo de elementos finitos

Adote-se a numeração dos graus de liberdade da Figura 7.10.

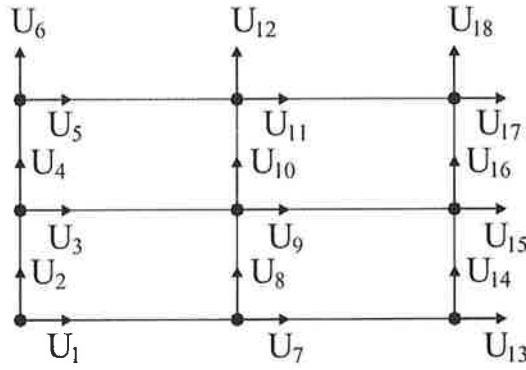


Figura 7.10: Numeração dos graus de liberdade globais

Pede-se caracterizar  $[H^{(2)}]$ ,  $[B^{(2)}]$ ,  $[K^{(2)}]$  e  $\{R_S^{(2)}\}$ , bem como calcular  $K_{10,10}^{(2)}$ .

### Solução

Pode-se calcular diretamente as funções de interpolação  $h_i$  usando as expressões (7.9), (7.10), (7.11) e (7.12), desde que se adote a convenção do sistema local de acordo com a Figura 7.11.

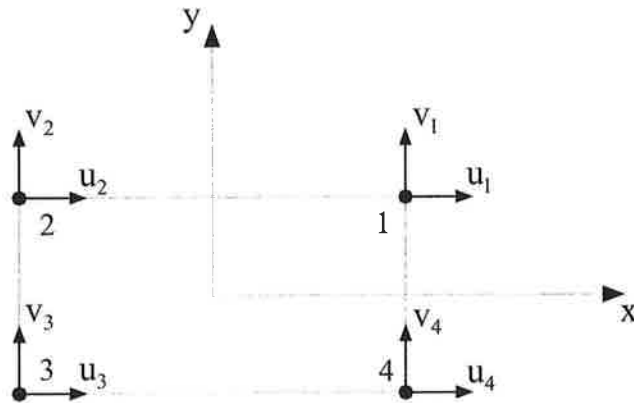


Figura 7.11: Convenção para sistema local de coordenadas

$$h_1(x, y) = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2x}{2} \right) (1 + 2y) = \frac{1}{4} (1 + x) (1 + 2y)$$

$$h_2(x, y) = \frac{1}{4} (1 - x) (1 + 2y)$$

$$h_3(x, y) = \frac{1}{4} (1 - x) (1 - 2y)$$

$$h_4(x, y) = \frac{1}{4} (1 + x) (1 - 2y).$$

$$[H^{(2)}] = \begin{bmatrix} \cdots & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & \cdots & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} & \cdots \\ \cdots & h_3 & 0 & h_2 & 0 & \cdots & h_4 & 0 & h_1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & h_3 & 0 & h_2 & \cdots & 0 & h_4 & 0 & h_1 & \cdots \end{bmatrix}$$

Recorda-se que

$$\{\epsilon^{(2)}\} = [B^{(2)}] \{U\}$$

onde

$$\{\epsilon^{(2)}\} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}.$$

As deformações para o elemento 2 podem ser calculadas por

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^4 h_i u_i \right) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial x} u_i$$

e, analogamente,

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{i=1}^4 h_i v_i \right) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial y} v_i$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial y} u_i + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial x} v_i.$$

As expressões acima permitem escrever  $[B^{(2)}]$

$$[B^{(2)}] = \begin{bmatrix} \dots & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & \dots & U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} \\ \dots & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 \\ \dots & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \dots & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} \end{bmatrix}$$

onde as demais entradas indicadas por pontos são nulas.

Lembra-se que a matriz  $[K^{(2)}]$  é dada por

$$[K^{(2)}] = \int_{A^{(2)}} [B^{(2)}]^T [C] [B^{(2)}] dA^{(2)}.$$

Representando a coluna  $j$  da matriz  $[B^{(2)}]$  por  $\{B^{(2)}\}_j$ , o elemento  $K_{ij}^{(2)}$  pode ser calculado por

$$K_{ij}^{(2)} = \int_{A^{(2)}} \{B^{(2)}\}_i^T [C] \{B^{(2)}\}_j dA^{(2)}.$$

Então o coeficiente  $K_{10,10}^{(2)}$  será dado por

$$K_{10,10}^{(2)} = \int_{A^{(2)}} \left\{ 0 \quad \frac{\partial h_4}{\partial y} \quad \frac{\partial h_4}{\partial x} \right\} [C] \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{matrix} \right\} dA^{(2)}.$$

Como

$$\frac{\partial h_4}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{4} (1+x)(1-2y) \right] = \frac{1}{4} (1-2y)$$



e

$$\frac{\partial h_4}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{4} (1+x)(1-2y) \right] = -\frac{1}{2} (1+x),$$

então

$$K_{10,10}^{(2)} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 \int_{-1/2}^{1/2} \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(1+x) & \frac{1}{4}(1-2y) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(1+x) \\ \frac{1}{4}(1-2y) \end{Bmatrix} dy dx$$

e, efetuando-se os cálculos,

$$K_{10,10}^{(2)} = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{12}\nu \right).$$

Pode-se interpretar o significado de  $K_{10,10}^{(2)}$ . Para tal, procura-se interpretar inicialmente  $K_{10,10}$ . Considerando a equação (7.25) com  $\{U\}$  dado por

$$\{U\}^T = \left\{ 0 \quad \dots \quad 0 \quad \overset{U_{10}}{1} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\}$$

ou seja, considera-se um deslocamento imposto unitário segundo o grau de liberdade  $U_{10}$  e impede-se o deslocamento segundo qualquer outro grau de liberdade. Resulta

$$\{R\}^T = \left\{ K_{1,10} \quad K_{2,10} \quad \dots \quad K_{10,10} \quad \dots \quad K_{18,10} \right\}$$

isto é, a décima coluna da matriz de rigidez (correspondente a  $U_{10}$ ) fornece as forças nodais compatíveis com esses deslocamentos nodais impostos. Portanto  $K_{10,10}$  é dado pela força que deve ser aplicada segundo o grau de liberdade  $U_{10}$  para produzir um deslocamento unitário  $U_{10}$  impedindo-se todos os outros deslocamentos nodais. Na verdade esse tipo de interpretação já havia sido explorado no contexto da análise matricial de estruturas.

Considerando a equação (7.23) tem-se

$$K_{10,10} = K_{10,10}^{(1)} + K_{10,10}^{(2)} + K_{10,10}^{(3)} + K_{10,10}^{(4)}.$$

Seguindo-se um raciocínio análogo,  $K_{10,10}^{(2)}$  seria dado pela força necessária para impor um deslocamento unitário na direção de  $U_{10}$  considerando-se somente a existência do elemento 2 e impedindo-se os demais deslocamentos correspondentes ao elemento 2.

Considere-se agora o cálculo de  $\{R_S^{(2)}\}$ . Por definição

$$\{R_S^{(2)}\} = \int_{L_1^{(m)}, \dots, L_q^{(m)}} [H^{(2)}]^T \{f^s^{(2)}\} dL^{(m)}. \quad (7.26)$$

No caso em questão só há um lado do elemento 2 que pertence a  $L_f$ , que é dado por  $y = 1/2$ . Portanto (7.26) simplifica-se

$$\{R_S^{(2)}\} = \int_{-1}^1 [H^{(2)}]_{y=1/2}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ f_y^s \end{Bmatrix} dx.$$

Notando que  $h_3|_{y=1/2} = h_4|_{y=1/2} = 0$ .

$$\{R_S^{(2)}\} = \int_{-1}^1 \begin{matrix} U_5 \\ U_6 \\ U_{11} \\ U_{12} \end{matrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ h_2(x, \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & h_2(x, \frac{1}{2}) \\ \vdots & \vdots \\ h_1(x, \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & h_1(x, \frac{1}{2}) \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{18 \times 2} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ f_y^s \end{matrix} \right\}_{2 \times 1} dx$$

$$\{R_S^{(2)}\} = \int_{-1}^1 \begin{matrix} U_6 \\ U_{12} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_2(x, \frac{1}{2}) f_y^s \\ \vdots \\ h_1(x, \frac{1}{2}) f_y^s \\ 0 \end{matrix} \right\} dx.$$

Calculando-se

$$\int_{-1}^1 h_1\left(x, \frac{1}{2}\right) f_y^s dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} (1+x) 2f_y^s dx.$$

Como  $f_y^s$  é constante

$$\int_{-1}^1 h_1\left(x, \frac{1}{2}\right) f_y^s dx = \frac{1}{2} f_y^s \int_{-1}^1 (1+x) dx = \frac{1}{2} (f_y^s \times 2).$$

Nota-se que  $\frac{1}{2} (f_y^s \times 2)$  é metade da força resultante por unidade de espessura atuando no lado dado por  $y = \frac{1}{2}$  do elemento 2. Analogamente,

$$\int_{-1}^1 h_2\left(x, \frac{1}{2}\right) f_y^s dx = \frac{1}{2} (f_y^s \times 2)$$

resultando em

$$\{R_S^{(2)}\} = \begin{matrix} U_6 \\ U_{12} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{2} (f_y^s \times 2) \\ \vdots \\ \frac{1}{2} (f_y^s \times 2) \\ \vdots \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_y^s \\ \vdots \\ f_y^s \\ \vdots \end{matrix} \right\}.$$

Ou seja, a resultante do carregamento por unidade de espessura é igualmente distribuída para os nós de extremidade do lado considerado. Nota-se que  $f_y^s = 4000 \text{ kN/m}^2$  uma vez que  $f^s$  é uma força dada por unidade de área.

Recorda-se a definição da matriz  $[H]$  pela equação (7.15) que é a matriz que contém as funções de interpolação. Essa é uma matriz associada a um elemento em particular tendo somente colunas relacionadas aos graus de liberdade do elemento, sendo esses referidos ao sistema local de numeração. Analogamente à definição de  $[H]$  é conveniente definirem-se matrizes  $[B]$  e  $[k]$  que sejam equivalentes a  $[B^{(m)}]$  e  $[K^{(m)}]$  quando se consideram apenas entradas associadas aos graus de liberdade do elemento e que sejam referidas ao sistema local de numeração. Nesse contexto a matriz  $[B]$  pode ser definida para um dado elemento por

$$\{\epsilon^{(m)}\} = [B] \{u\}.$$

Por exemplo, para o elemento de quatro nós

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

e a matriz  $[k]$  por

$$[k] = \int_A [B]^T [C] [B] dA$$

onde o domínio  $A$ , e as matrizes  $[B]$  e  $[C]$  são associadas implicitamente ao elemento em consideração. Como discutido no exemplo anterior

$$K_{ij}^{(m)} = \int_{A^{(m)}} \{B^{(m)}\}_i^T [C] \{B^{(m)}\}_j dA^{(m)}.$$

O termo  $K_{ij}^{(m)}$  será não nulo apenas quando tanto  $\{B^{(m)}\}_i^T$  e  $\{B^{(m)}\}_j$  tiverem entradas não nulas. Isso ocorrerá somente quando os graus de liberdade  $U_i$  e  $U_j$  pertencerem ao elemento  $(m)$ . Portanto todos os termos não nulos de  $[K^{(m)}]$  estão também em  $[k]$  uma vez que todas as colunas que possuem termos não nulos em  $[B^{(m)}]$  estão em  $[B]$ . Pode-se então obter a matriz  $[K^{(m)}]$  a partir da correspondente  $[k]$  por colocação de seus termos em  $[K^{(m)}]$ , obedecendo-se a correlação entre a numeração global e local dos graus de liberdade. Nota-se ainda que o processo de montagem da matriz de rigidez  $[K]$  está implicitamente definido pela equação

$$[K] = \sum_{m=1}^{n_e} [K^{(m)}].$$

Analogamente ao que se fez na montagem da matriz de rigidez na análise matricial de estruturas, pode-se, partindo de uma matriz com todos os coeficientes nulos e de dimensão  $(n \times n)$ , onde  $n$  é o número total de graus de liberdade do modelo, adicionar-se à matriz global  $[K]$  os coeficientes da matriz de rigidez  $[k]$  de todos os elementos da malha obedecendo a correlação entre os graus de liberdade nos sistema local e global.

Para se facilitar a correlação entre graus de liberdade globais e locais, pode-se definir para cada elemento a matriz-coluna  $\{LM^{(m)}\}$  que lista a numeração global dos graus de liberdade dos nós do elemento  $(m)$  ordenados de acordo com a numeração local. Para exemplificar, considerando-se o elemento descrito na Figura 7.5 a matriz linha  $\{LM\}$  para esse elemento seria dado por

$$\{LM^{(m)}\} = \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ \{ & q & p & l & k & i & j & f & g \} \end{matrix}$$

As contribuições da matriz de rigidez do elemento  $(m)$  para a matriz  $[K]$  podem ser obtidas então somando-se

$k_{11}$  na posição  $qq$  de  $[K]$ ;  
 $k_{12}$  na posição  $qp$  de  $[K]$ ;  
 $\vdots$   
 $k_{18}$  na posição  $qg$  de  $[K]$ ;  
 $k_{22}$  na posição  $pp$  de  $[K]$ ;  
 $\vdots$   
 $k_{28}$  na posição  $pg$  de  $[K]$ ;

e assim por diante. Pode-se, em função da simetria, preencher somente uma parte da matriz  $[K]$ .

Considere-se uma malha de elementos triangulares como a mostrada na Figura 7.12 na qual um elemento genérico ( $m$ ) é destacado.

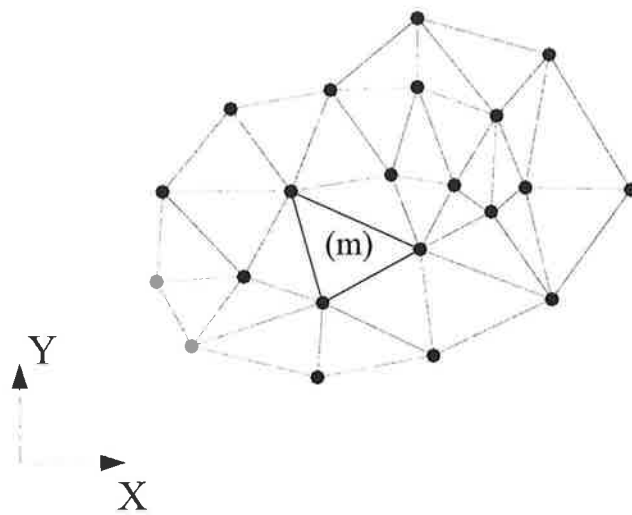


Figura 7.12: Malha de elementos triangulares de 3 nós destacando um elemento genérico ( $m$ ).

Para se formular o elemento triangular é necessário caracterizar as funções de interpolação. Para tal considere-se o elemento ( $m$ ) mostrado na Figura 7.13 que representa um elemento genérico. Nessa figura já se usa a numeração local dos nós e dos graus de liberdade. Note-se ainda que o sistema local, nesse caso, dada a particularidade das funções de interpolação que serão apresentadas, pode ser tomado coincidente com o sistema global, sendo portanto idêntico para qualquer elemento da malha.

Pode-se construir as funções de interpolação obedecendo-se a mesma propriedade utilizada na construção dos elementos retangulares, ou seja: a função  $h_i$  tem valor unitário para as coordenadas do nó  $i$  e anula-se para as do nó  $j$ ,  $i \neq j$ . Usando a propriedade geométrica de que por três pontos não colineares passa um único plano, pode-se construir geometricamente a função  $h_1$  impondo que ela tenha valor unitário para as coordenadas do nó 1 e se anule para as coordenadas dos nós 2 e 3. Mostra-se tal situação esquematicamente na Figura 7.14. Considere-se a função

$$h_1(x, y) = \frac{1}{2A} (a_1 + b_1x + c_1y) \quad (7.27)$$

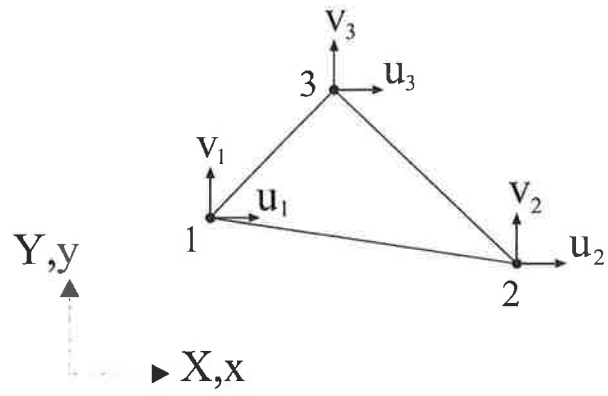


Figura 7.13: Elemento triangular de 3 nós

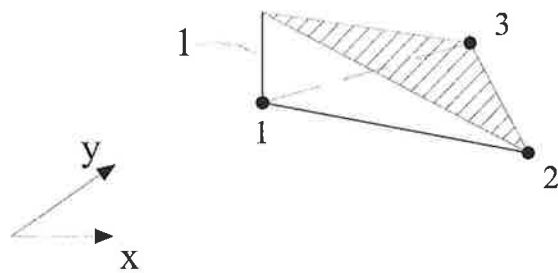


Figura 7.14: Função de interpolação  $h_1$  definida geometricamente

onde  $A$  é a área do triângulo dada por

$$2A = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1$$

sendo  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$  as coordenadas dos nós 1, 2 e 3 e

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 \\ b_1 &= y_2 - y_3 \\ c_1 &= x_3 - x_2. \end{aligned}$$

É de verificação imediata que  $h_1(x, y)$  é de fato a função mostrada na Figura 7.14. Por substituição em (7.27), chega-se a:

$$\begin{aligned} h_1(x_1, y_1) &= 1 \\ h_1(x_2, y_2) &= 0 \\ h_1(x_3, y_3) &= 0 \end{aligned}$$

e, como a forma funcional de  $h_1(x, y)$  define um plano, todos os requisitos estão atendidos. Analogamente

$$h_2(x, y) = \frac{1}{2A} (a_2 + b_2x + c_2y)$$

e

$$h_3(x, y) = \frac{1}{2A} (a_3 + b_3x + c_3y)$$

com

$$\begin{aligned} a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 & ; & & a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 \\ b_2 &= y_3 - y_1 & ; & & b_3 &= y_1 - y_2 \\ c_2 &= x_1 - x_3 & ; & & c_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Tendo as funções de interpolação definidas, pode-se explicitar as matrizes  $[H]$ ,  $[B]$  e a matriz  $[k]$  do elemento. Nota-se que considerando a forma funcional das funções de interpolação para o elemento triangular de três nós, pode-se concluir que as deformações  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e  $\gamma_{xy}$  e por conseguinte que as tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$  serão constantes para cada elemento. Por essa razão esse elemento é referido como elemento triangular de deformação constante.

## 7.2 Considerações sobre o equilíbrio e a solução de elementos finitos

Conforme discutido no início dessa seção, a formulação do problema da elasticidade plana em termos de deslocamentos apresentada na equação (7.5) satisfaz os três requisitos: equilíbrio, compatibilidade e equações constitutivas. Na verdade, ao se escrever a equação (7.5) já se considerou implicitamente a compatibilidade e as equações constitutivas. Portanto, ao se formularem elementos finitos tomando-se um campo de deslocamentos com uma forma funcional pré-determinada, está-se satisfazendo equilíbrio apenas de uma forma aproximada.

Esse fato é facilmente constatado quando se examinam as previsões de tensão para as interfaces dos elementos. Descontinuidades nas previsões das componentes das tensões são

encontradas nessas interfaces, sendo que aquelas não deveriam existir quando o material é homogêneo. É verdade que à medida que se refina a malha essas descontinuidades tendem a desaparecer.

Duas propriedades relacionadas ao equilíbrio, que valem para qualquer grau de refinamento da malha, podem ser demonstradas. Essas propriedades também apontam para se satisfazer melhor as condições de equilíbrio à medida que se refina a malha. Para tal definem-se forças nodais para o elemento ( $m$ ) por

$$\{F^{(m)}\} = [K^{(m)}] \{U\} \quad (7.28)$$

onde  $\{U\}$  corresponde à solução do modelo de elementos finitos para o problema em consideração.

Essas forças nodais admitem a interpretação de que seriam as forças que, se aplicadas aos nós do elemento ( $m$ ), produziriam os mesmos deslocamentos que os obtidos pela solução do modelo de elementos finitos quando esse elemento é considerado isoladamente. Mostram-se na Figura 7.15 alguns elementos triangulares de uma malha e a representação esquemática das forças nodais para esses elementos.

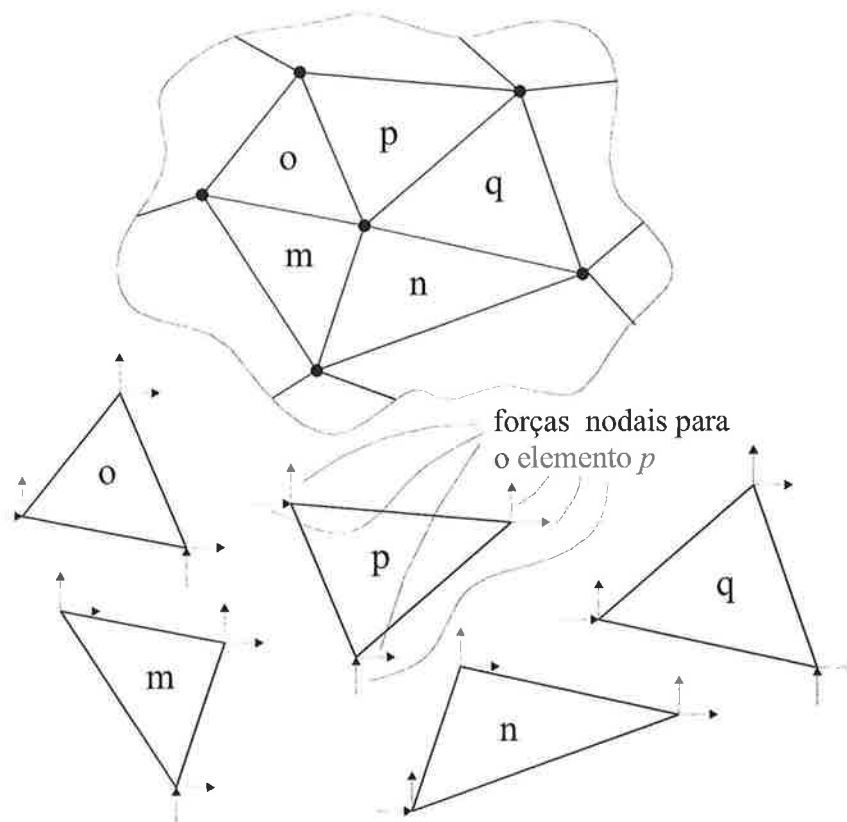


Figura 7.15: Forças nodais para alguns elementos de uma malha

Considerem-se as forças nodais dos elementos que têm um nó em comum. Essas forças nodais correspondentes a esse nó estão em equilíbrio com a resultante das forças externas aplicadas nesse nó. De fato,

$$\sum_{m=1}^{n_e} \{F^{(m)}\} = \sum_{m=1}^{n_e} [K^{(m)}] \{U\} = [K] \{U\} = \{R\}$$

que mostra simultaneamente esse resultado para todos os nós. Esse resultado é o análogo, no contexto de elementos finitos, ao equilíbrio nodal da análise matricial de estruturas.

Considere agora as forças nodais em um único elemento. Para o elemento  $(m)$  da Figura 7.16 elas são caracterizadas por  $\{F^{(m)}\}$ .

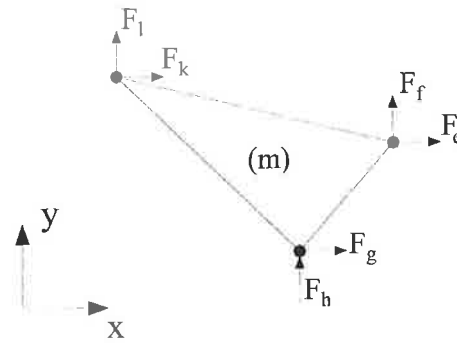


Figura 7.16: Representação das forças nodais para o elemento  $(m)$ .

$$\{F^{(m)}\}^T = \{0 \dots \overset{e}{F_e} \dots \overset{f}{F_f} \dots \overset{g}{F_g} \dots \overset{h}{F_h} \dots \underset{k}{F_k} \dots \underset{l}{F_l} \dots 0\}.$$

Considere-se um vetor de deslocamentos nodais correspondente a um movimento de corpo rígido para o elemento  $(m)$  na direção de  $x$ , ou seja

$$\{\delta U\}^T = \{0 \dots \overset{e}{\alpha} \dots \overset{g}{\alpha} \dots \overset{k}{\alpha} \dots 0\}.$$

Pode-se escrever

$$\{\delta U\}^T \{F^{(m)}\} = \alpha F_e + \alpha F_g + \alpha F_k \quad (7.29)$$

usando a definição de  $\{F^{(m)}\}$  dada em (7.28) chega-se a

$$\begin{aligned} \{\delta U\}^T \{F^{(m)}\} &= \{\delta U\}^T [K^{(m)}] \{U\} \\ &= \{\delta U\}^T \int_{A^{(m)}} [B^{(m)}]^T [C] [B^{(m)}] dA^{(m)} \{U\} \\ &= \int_{A^{(m)}} \{\delta U\}^T [B^{(m)}]^T [C] [B^{(m)}] dA^{(m)} \{U\} \end{aligned} \quad (7.30)$$

mas

$$\{\delta U\}^T [B^{(m)}]^T = \{\delta \epsilon^{(m)}\}^T$$

onde  $\{\delta \epsilon^{(m)}\}$  são as deformações virtuais associadas ao campo de deslocamentos virtuais  $\{\delta u^{(m)}\} = [H^{(m)}] \{\delta U\}$ . Se o elemento representar de forma exata os movimentos de corpo rígido — isto é, para deslocamentos nodais correspondentes a um movimento de corpo rígido —, o campo de deslocamentos no interior do elemento será de corpo rígido e ter-se-á que  $\{\delta \epsilon^{(m)}\} = \{0\}$  (mostra-se que tanto o elemento triangular quanto o retangular estudados anteriormente representam de forma exata os movimentos de corpo rígido). Considerando-se (7.30)

$$\{\delta U\}^T \{F^{(m)}\} = 0. \quad (7.31)$$



Das equações (7.31) e (7.29) resulta

$$F_e + F_g + F_k = 0$$

que é a equação de equilíbrio de forças na direção  $x$ .

Seguindo procedimento análogo para uma translação de corpo de rígido na direção  $y$  resulta

$$F_f + F_h + F_\ell = 0$$

que é a expressão do equilíbrio na direção  $y$ . Finalmente, considerando-se um movimento de rotação de corpo rígido chega-se à equação de equilíbrio de momentos do sistema de forças considerado.

### 7.3 Elementos quadrilaterais isoparamétricos

Na construção de malhas para a modelagem de problemas de engenharia é muito conveniente ao se discretizar (construir a malha) poder usar elementos quadrilaterais que não sejam necessariamente retangulares como mostrado na Figura 7.17. Nessa malha há elementos triangulares de três nós e elementos quadrilaterais de quatro nós (não retangulares).

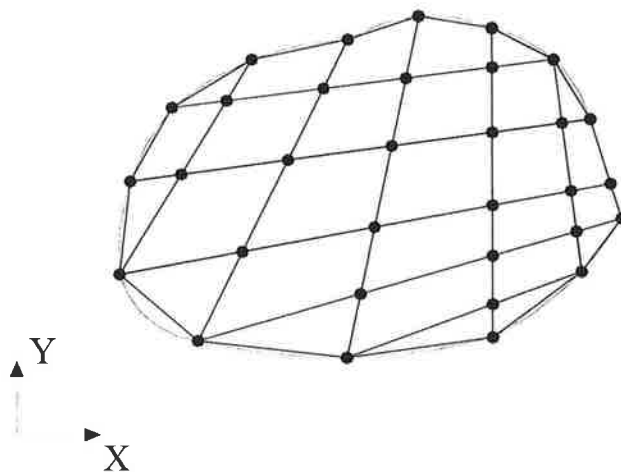


Figura 7.17: Malha com elementos quadrilaterais e triangulares

Essa construção de malha permite facilmente respeitar as características geométricas do domínio e ter elementos de tamanhos diferentes em partes diferentes do domínio. Considerando essa breve motivação, é, portanto, conveniente ter-se a possibilidade de se usar elementos quadrilaterais na discretização de um domínio plano. Portanto, discute-se, ainda que de forma sumária, a formulação do elemento quadrilateral.

Considere-se, conforme mostrado na Figura 7.18, um elemento quadrilateral genérico ( $m$ ). Para se chegar à formulação desse elemento quadrilateral basta definir como os deslocamentos são interpolados no interior do elemento a partir dos deslocamentos nodais. Em outras palavras é necessário definirem-se as funções de interpolação. Em vez de se construir as funções de interpolação diretamente no domínio do elemento quadrilateral, dada a irregularidade desse domínio, utiliza-se um domínio auxiliar de coordenadas  $r$  e  $s$  como mostrado na Figura 7.19.

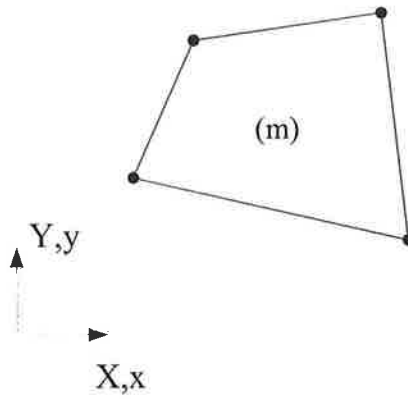


Figura 7.18: Elemento quadrilateral genérico

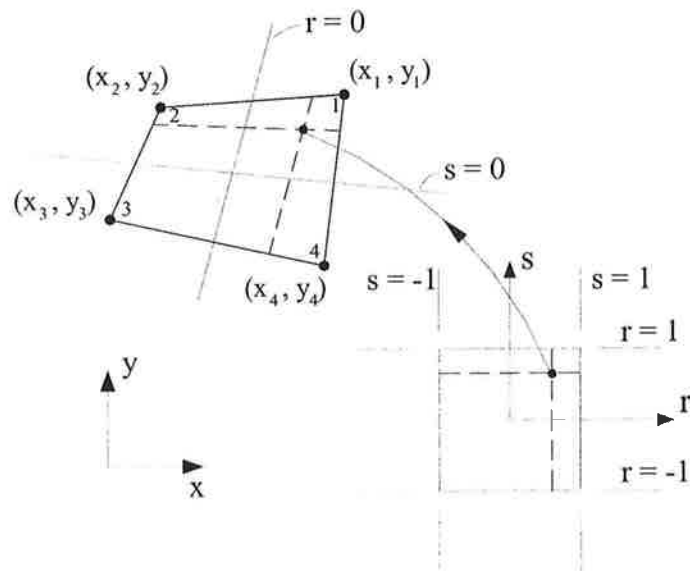


Figura 7.19: Representação esquemática do domínio auxiliar e da aplicação que relaciona os dois domínios.

A idéia que justifica a consideração do domínio auxiliar  $-1 \leq r \leq 1$ ,  $-1 \leq s \leq 1$  é poder definir as funções de interpolação nesse domínio que é regular. Considerando-se então uma aplicação que relaciona os pontos  $(r, s)$  do domínio regular aos pontos  $(x, y)$  do domínio do elemento, ficam implicitamente definidas as funções de interpolação para o elemento desde que essas funções estejam bem definidas no domínio regular. Seja assim a aplicação que relaciona os pontos desses dois domínios definida por

$$x(r, s) = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s) x_i \quad (7.32)$$

$$y(r, s) = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s) y_i \quad (7.33)$$

onde  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas dos nós do elemento  $(m)$ ,  $h_i(r, s)$  são as funções de interpolação discutidas para o elemento retangular considerando nesse caso o domínio regular, ou seja,

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4} (1+r)(1+s) \\ h_2 &= \frac{1}{4} (1-r)(1+s) \\ h_3 &= \frac{1}{4} (1-r)(1-s) \\ h_4 &= \frac{1}{4} (1+r)(1-s). \end{aligned}$$

As relações (7.32) e (7.33) definem para qualquer ponto  $(r, s)$  no domínio  $-1 \leq r \leq 1$  e  $-1 \leq s \leq 1$  o correspondente ponto  $(x, y)$  no domínio do elemento. Tem-se que uma reta dada por  $r$  constante é relacionada a uma reta no domínio do elemento, sendo que resultado análogo é válido também para  $s$ . Representa-se pictorialmente na Figura 7.19 essa propriedade. É fácil também de se verificar que os lados do domínio regular são relacionados aos lados do elemento e os vértices do domínio regular aos nós do elemento.

Representam-se na Figura 7.20 os deslocamentos nodais do elemento  $(m)$  respeitando a numeração local.

A interpolação dos deslocamentos pode ser então definida por

$$u(r, s) = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s) u_i \quad (7.34)$$

$$v(r, s) = \sum_{i=1}^4 h_i(r, s) v_i. \quad (7.35)$$

Nota-se que, como os  $h_i$  foram definidos em função de  $r$  e  $s$ , os deslocamentos  $(u, v)$  no interior do elemento  $(m)$  na direção respectivamente de  $x$  e  $y$  estão expressos em termos de  $r$  e  $s$ . No entanto, a inversão da aplicação definida pelas equações (7.32) e (7.33) permite escrever

$$r = r(x, y) \quad (7.36)$$

$$s = s(x, y) \quad (7.37)$$

ou seja, dados  $(x, y)$  no domínio do elemento, as relações (7.36) e (7.37) fornecem  $(r, s)$  no domínio de referência  $-1 \leq r \leq 1$  e  $-1 \leq s \leq 1$  (Nota-se que um exemplo dessa inversão é dado pelas equações (7.7) e (7.8)).

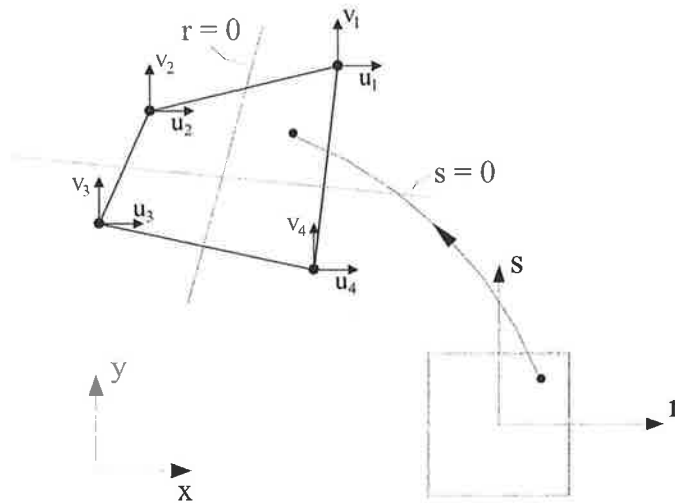


Figura 7.20: Deslocamentos nodais do elemento ( $m$ ) obedecendo a numeração local.

Portanto, usando-se (7.36) e (7.37) pode-se reescrever (7.34) e (7.35) como

$$\begin{aligned}
 u(r(x, y), s(x, y)) &= u(x, y) = \sum_{i=1}^4 h_i(r(x, y), s(x, y)) u_i \\
 &= \sum_{i=1}^4 h_i(x, y) u_i \\
 v(r(x, y), s(x, y)) &= v(x, y) = \sum_{i=1}^4 h_i(r(x, y), s(x, y)) v_i \\
 &= \sum_{i=1}^4 h_i(x, y) v_i.
 \end{aligned}$$

Logo, a interpolação dos deslocamentos está bem definida, o que permite calcularem-se  $[H]$ ,  $[B]$  e  $[k]$  para o elemento ( $m$ ). Nota-se que não é necessário efetuar-se formalmente a inversão dada pelas equações (7.36) e (7.37) uma vez que o cálculo das matrizes  $[H]$ ,  $[B]$  e  $[k]$  não exige tal inversão. No entanto, é importante saber que tal inversão é possível, o que garante a consistência dessa formulação com os desenvolvimentos anteriores.

Os elementos discutidos nessa seção são chamados de isoparamétricos. Essa terminologia se justifica pelo fato de se usarem as mesmas funções  $h_i$  para se definir a aplicação dada pelas relações (7.36) e (7.37) e a interpolação dos deslocamentos definida por (7.34) e (7.35).

## 7.4 Integração numérica

O cálculo da matriz de rigidez para um modelo de elementos finitos envolve o cálculo da matriz de rigidez de cada elemento, que é dada por

$$[k] = \int_A [B]^T [C] [B] dA.$$

Considerando-se um elemento de quatro nós, com o objetivo de fixar idéias, a matriz  $[k]$  tem dimensão  $8 \times 8$  e o cálculo da matriz de rigidez do elemento envolve a integração de

$8 + 28 = 36$  funções, uma associada a cada posição da matriz de rigidez (considerou-se a simetria da matriz de rigidez). Quando se consideram elementos isoparamétricos é, em geral, ineficiente efetuar as integrações analiticamente. Utiliza-se então a integração numérica.

Antes de se discutir a integração numérica, recorda-se um resultado que será útil para o cálculo da matriz do elemento isoparamétrico.

Considerem-se dois domínios como mostrado na Figura 7.21 que estão relacionados pela aplicação  $x(r, s)$ ,  $y(r, s)$ . Seja  $f(x, y)$  uma função de duas variáveis em  $x$  e  $y$ . Tem-se então que

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(r, s), y(r, s)) \det [J] dr ds$$

onde

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}.$$

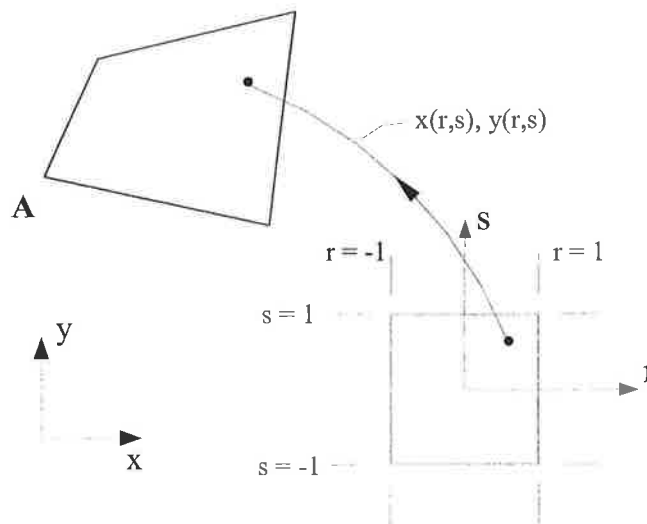


Figura 7.21: Domínios relacionados por uma aplicação

Esse resultado mostra que a matriz de rigidez pode ser obtida pela integração no domínio  $-1 \leq r \leq 1$  e  $-1 \leq s \leq 1$ . De fato,

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [C] [B] \det [J] dr ds$$

onde  $x(r, s)$  e  $y(r, s)$  são dados pelas expressões (7.32) e (7.33).

A integração numérica de uma função  $g(r, s)$  definida no domínio  $-1 \leq r \leq 1$  e  $-1 \leq s \leq 1$  pode ser resumida por

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(r, s) dr ds \cong \sum_{i=1}^{n_{intr}} \sum_{j=1}^{n_{ints}} \alpha_i \alpha_j g(r_i, s_j) \quad (7.38)$$

ou seja, a integração pode ser aproximada pelo somatório da função calculada em alguns pontos  $(r_i, s_j)$  (pontos de amostragem) multiplicada por coeficientes  $\alpha_i$  e  $\alpha_j$  (pesos). Na

Ordem de integração	Pontos de Gauss	Pesos
1	0.0000000000000000	2.0000000000000000
2	$\pm 0.577350269189626$	1.0000000000000000
3	$\pm 0.774596669241483$ 0.0000000000000000	0.5555555555555556 0.8888888888888889

Tabela 7.1: Coordenadas dos pontos de Gauss e pesos em uma dimensão

equação (7.38)  $n_{intr}$  e  $n_{ints}$  representam o número de pontos de integração em  $r$  e  $s$  respectivamente.

Para a integração de Gauss, que é mais utilizada, os pontos  $(r_i, s_j)$  são sempre fixos para determinada ordem de integração. Na Tabela 7.1 fornecem-se os pontos e pesos para as regras de integração de Gauss em uma dimensão referidas por ordem 1, 2 e 3. Os pontos e pesos para as regras de integração em duas dimensões como definidas pela equação (7.38) podem ser obtidas a partir das coordenadas e pesos das regras de integração em uma dimensão dadas na Tabela 7.1. Por exemplo para  $n_{intr} = 2$  e  $n_{ints} = 2$  os pontos  $(r_i, s_i)$  são obtidos a partir da Tabela 7.1 como mostrado na Figura 7.22 para a integração  $2 \times 2$ . As regras de integração mais usadas para elementos finitos quadrilaterais são  $1 \times 1$  (1 ponto),  $2 \times 2$  (2 pontos) e  $3 \times 3$  (9 pontos). A Figura 7.22 ilustra a localização dos pontos de integração de Gauss para elementos quadrilaterais usando essas regras. A integração de Gauss fornece valores exatos quando se utiliza uma regra  $n \times n$  e o integrando é uma função polinomial de ordem até  $2n - 1$  em cada variável.

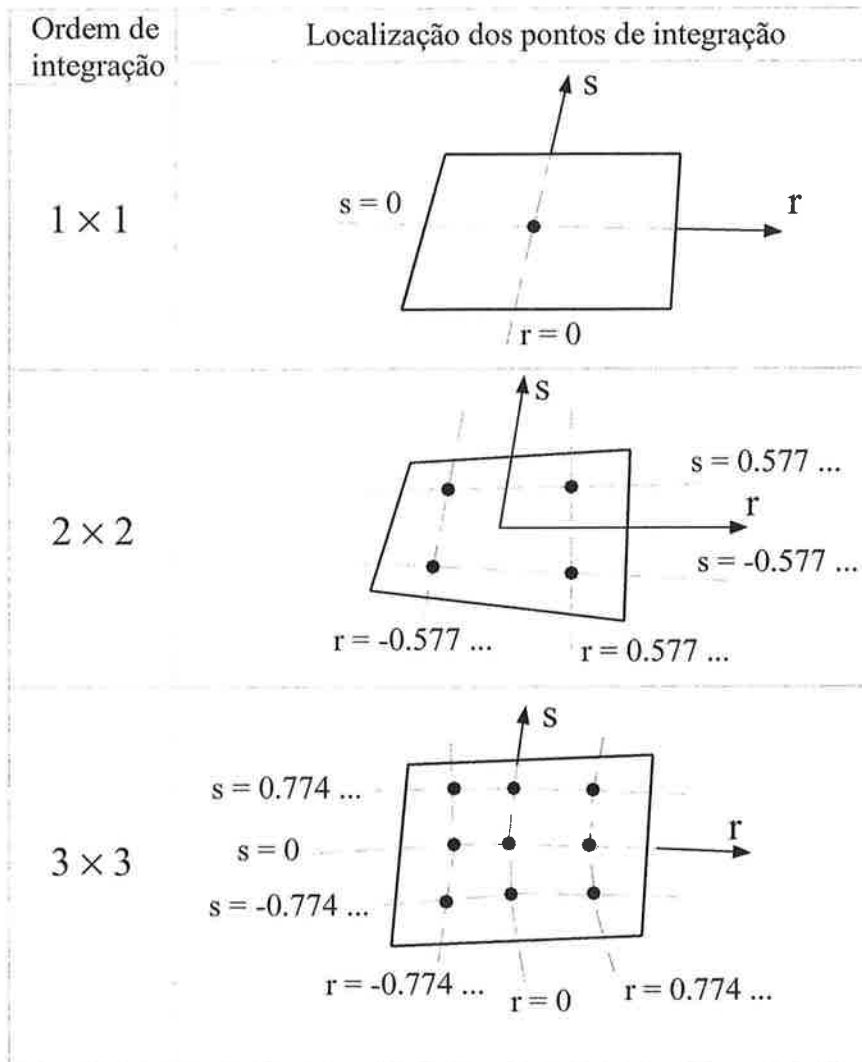


Figura 7.22: Localização dos pontos de Gauss para elementos quadrilaterais.

# Apêndice A

## Formulário para Análise Matricial de Estruturas

### A.1 Matrizes de Rigidez no Sistema Local

#### A.1.1 Barra Biengastada

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

#### A.1.2 Barra Engastada-Articulada

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### A.1.3 Barra Articulada-Engastada

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$



### A.1.4 Barra Biarticulada

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## A.2 Matriz de Transformação de Coordenadas

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.000 \end{bmatrix}$$

## A.3 Relações entre Grandezas nos Sistemas Global e Local

### A.3.1 Vetores de Deslocamentos e Esforços nas Extremidades de uma Barra

$$\{u\} = [T]^t \{\bar{u}\}$$

$$\{\bar{q}\} = [T]\{q\}$$

$$\{f\} = [T]^t \{\bar{f}\}$$

$$\{\bar{f}\} = [T]\{f\}$$

### A.3.2 Matriz de Rigidez

$$[k] = [T]^t [\bar{k}] [T]$$

## A.4 Equacionamento da Estrutura

$$[K_{ll}]\{U_l\} = [K_{lb}]\{U_b\} - \{R_l\} + \{U_l\}_0$$

$$\{R_b\} = [K_{bl}]\{U_l\} + [K_{bb}]\{U_b\} + \{R_b\}_0$$

## A.5 Esforços Solicitantes nas Extremidades de Barra

$$\{\bar{f}\} = \{\bar{f}\}_0 + [\bar{k}]\{\bar{u}\}$$

# Apêndice B

## Componentes de vetores e de operadores lineares

Um vetor  $\mathbf{v}$  pode ser definido por

$$B = A + \mathbf{v}$$

ou

$$B - A = \mathbf{v}$$

onde  $A, B$  são pontos do espaço euclidiano. Portanto, quando se escolhe uma base ortonormal dada pelos versores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , o vetor  $\mathbf{v}$  pode ser representado por

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i$$

onde  $v_1, v_2, v_3$  são as componentes de  $\mathbf{v}$  na base  $\mathbf{e}$ . Representam-se essas componentes pela matriz-coluna

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}.$$

Seria mais preciso escrever-se  $\{v\}_{\mathbf{e}}$  indicando que é a representação de  $\mathbf{v}$  na base  $\mathbf{e}$ . No entanto, quando se está trabalhando em uma única base, ou a base utilizada fica subentendida pelo contexto, usa-se simplesmente  $\{v\}$ .

Quando se escolhe uma outra base ortonormal, por exemplo  $\mathbf{e}'$  dada por  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ , o vetor  $\mathbf{v}$  pode ser escrito nessa nova base como

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v'_i \mathbf{e}'_i$$

e a matriz-coluna que coleciona essas componentes

$$\{v\}_{\mathbf{e}'} = \begin{Bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{Bmatrix}$$

é diferente de  $\{v\}_{\mathbf{e}}$ .

Analogamente, um operador linear  $\mathbf{T}$  foi definido pela aplicação que desfruta de certas propriedades de linearidade e que relaciona um vetor de  $\mathbf{E}$  (espaço euclidiano) a outro vetor de  $\mathbf{E}$ . Ou seja

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}.$$

Quando se escolhe uma base os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são representados por matrizes coluna e o operador  $\mathbf{T}$  por uma matriz  $3 \times 3$ , levando a

$$\{y\} = [T] \{x\}.$$

Como as componentes de  $\{x\}$  e  $\{y\}$  dependem da base escolhida, as componentes de  $[T]$  também dependerão.

O objetivo é deduzir as relações entre as componentes de vetores e de operadores lineares, quando se consideram bases distintas.

Considerem-se as bases ortonormais  $\mathbf{e}$ , definida pelos versores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  e a base  $\mathbf{e}'$ , definida pelos versores  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ . Seja  $\mathbf{v}$  um vetor de  $\mathbf{E}$ . Na base  $\mathbf{e}$ , pode-se escrever

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i$$

onde  $v_i$  é dado por

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i. \quad (\text{B.1})$$

De fato

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i = v_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_i + v_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_i + v_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_i = v_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Pode-se escrever o versor  $\mathbf{e}'_i$  na base  $\mathbf{e}$

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^3 Q_{ij} \mathbf{e}_j \quad (\text{B.2})$$

onde, usando (B.1),

$$Q_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j. \quad (\text{B.3})$$

Nota-se que  $Q_{ij}$  é o cosseno do ângulo  $\alpha_{ij}$  entre  $\mathbf{e}'_i$  e  $\mathbf{e}_j$ , uma vez que

$$Q_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j = \|\mathbf{e}'_i\| \|\mathbf{e}_j\| \cos \alpha_{ij}.$$

Seja  $[Q]$  a matriz que tem termo genérico  $Q_{ij}$  dado por (B.3). Mostra-se que a matriz  $[Q]$  é ortogonal, ou seja,

$$[Q][Q]^T = [Q]^T [Q] = [I]$$

isto é,

$$[Q]^T = [Q]^{-1}.$$

As componentes do vetor  $\mathbf{v}$  na base  $\mathbf{e}'_i$  são dadas por

$$v'_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_i$$

usando (B.2)

$$v'_i = \mathbf{v} \cdot \sum_{j=1}^3 Q_{ij} \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 Q_{ij} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j$$

$$v'_i = \sum_{j=1}^3 Q_{ij} v_j$$

ou, equivalentemente,

$$\{v\}_{\mathbf{e}'} = [Q] \{v\}_{\mathbf{e}} \quad (\text{B.4})$$

que estabelece a relação entre as componentes de  $\mathbf{v}$  na bases  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{e}'$ .

Pode-se, alternativamente, escrever

$$\{v\}_{\mathbf{e}} = [Q]^T \{v\}_{\mathbf{e}'} \quad (\text{B.5})$$

Considere agora a relação  $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ , onde  $\mathbf{T}$  é um operador linear, escrito na base  $\mathbf{e}$

$$\{y\}_{\mathbf{e}} = [T]_{\mathbf{e}} \{x\}_{\mathbf{e}}.$$

Utilizando a relação (B.5)

$$[Q]^T \{y\}_{\mathbf{e}'} = [T]_{\mathbf{e}} [Q]^T \{x\}_{\mathbf{e}'}$$

que leva a

$$\{y\}_{\mathbf{e}'} = [Q] [T]_{\mathbf{e}} [Q]^T \{x\}_{\mathbf{e}'}$$

ou seja

$$[T]_{\mathbf{e}'} = [Q] [T]_{\mathbf{e}} [Q]^T. \quad (\text{B.6})$$

Analogamente, partindo-se de

$$\{y\}_{\mathbf{e}'} = [T]_{\mathbf{e}'} \{x\}_{\mathbf{e}'}$$

e usando (B.4)

$$[Q] \{y\}_{\mathbf{e}} = [T]_{\mathbf{e}'} [Q] \{x\}_{\mathbf{e}}$$

que leva a

$$[T]_{\mathbf{e}} = [Q]^T [T]_{\mathbf{e}'} [Q] \quad (\text{B.7})$$

resultado que poderia ter sido obtido diretamente de (B.6). As equações (B.6) e (B.7) estabelecem as relações entre as componentes de um operador linear

$\mathbf{T} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  em duas bases distintas.

## B.1 Equivalência entre o princípio dos trabalhos virtuais e o equilíbrio para a elasticidade linear

Considere-se que para um sólido deformável o campo de tensões  $\{\sigma\}^T = \{ \sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz} \}$  satisfaz as equações de equilíbrio (5.1) e as condições de contorno de força de superfície em  $f^s$  (5.4).

Seja  $\delta u(x, y, z)$ ,  $\delta v(x, y, z)$  e  $\delta w(x, y, z)$  um campo de deslocamentos arbitrariamente escolhido que satisfaz as condições de contorno em  $S_u$  (cinematicamente admissível), isto é,

$$\delta u = 0 ; \delta v = 0 ; \delta w = 0 \quad \text{on } S_u. \quad (\text{B.8})$$

Portanto,  $\delta u$ ,  $\delta v$  e  $\delta w$  é um campo de deslocamentos virtuais.

Utilizando as equações de equilíbrio

$$\left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x^B \right) \delta u = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y^B \right) \delta v = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\left( \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z^B \right) \delta w = 0. \quad (\text{B.11})$$

Usando a regra de derivação para um produto de funções, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} \delta u + \sigma_{yx} \delta v + \sigma_{zx} \delta w) &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta u + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} \delta v + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} \delta w \\ &+ \sigma_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \sigma_{yx} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \sigma_{zx} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

e rearranjando os termos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta u + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} \delta v + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} \delta w &= \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} \delta u + \sigma_{yx} \delta v + \sigma_{zx} \delta w) \\ &- \left( \sigma_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \sigma_{yx} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \sigma_{zx} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

usando expressões análogas para as derivadas em relação a  $y$  e a  $z$  além das equações (B.9), (B.10) e (B.11) pode-se escrever

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} \delta u + \sigma_{yx} \delta v + \sigma_{zx} \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xy} \delta u + \sigma_{yy} \delta v + \sigma_{zy} \delta w) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{xz} \delta u + \sigma_{yz} \delta v + \sigma_{zz} \delta w) + \right. \\ \left. - \left( \sigma_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial \delta w}{\partial z} + \sigma_{yx} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. \sigma_{zx} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \sigma_{xz} \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \sigma_{yz} \frac{\partial \delta w}{\partial z} + \sigma_{zy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \right) \right] \end{aligned}$$

$$+ f_x^B \delta u + f_y^B \delta v + f_z^B \delta w ] = 0 \quad (\text{B.14})$$

a seguinte identidade matemática é obtida pelo uso do teorema do divergente que relaciona integrais de volume com integrais de superfície

$$\begin{aligned} & \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} \delta u + \sigma_{yx} \delta v + \sigma_{zx} \delta w) + \right. \\ & \quad \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xy} \delta u + \sigma_{yy} \delta v + \sigma_{zy} \delta w) + \\ & \quad \left. \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{xz} \delta u + \sigma_{yz} \delta v + \sigma_{zz} \delta w) \right] dV \\ & = \int_S [(\sigma_{xx} \delta u + \sigma_{yx} \delta v + \sigma_{zx} \delta w) n_x + \\ & \quad (\sigma_{xy} \delta u + \sigma_{yy} \delta v + \sigma_{zy} \delta w) n_y + \\ & \quad (\sigma_{xz} \delta u + \sigma_{yz} \delta v + \sigma_{zz} \delta w) n_z] dS \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

onde  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  são as componentes da normal exterior à superfície  $S$ . O 2º membro da equação (B.15) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \int_S [(\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z) \delta u + (\sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z) \delta v + \\ & \quad (\sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z) \delta w] dS \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Utilizando as condições de contorno de força de superfície (5.4) e (B.8), o termo dado por (B.16) pode ser finalmente escrito como

$$\int_{S_f} [\delta u f_x^s + \delta v f_y^s + \delta w f_z^s] dS \quad (\text{B.17})$$

Considerando a simetria do tensor das tensões e substituindo (B.17) e (B.14) chega-se a

$$\begin{aligned} & \int_V (\delta \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \delta \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + \delta \varepsilon_{zz} \sigma_{zz} + \delta \gamma_{xy} \sigma_{xy} + \delta \gamma_{yz} \sigma_{yz} + \delta \gamma_{xz} \sigma_{xz}) dV = \\ & \int_V [\delta u f_x^B + \delta v f_y^B + \delta w f_z^B] dV + \int_{S_f} [\delta u f_x^s + \delta v f_y^s + \delta w f_z^s] dS \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Nota-se que as componentes do campo de deformações  $\delta \varepsilon_{xx}$ ,  $\delta \varepsilon_{yy}$ ,  $\delta \varepsilon_{zz}$ ,  $\delta \gamma_{xy}$ ,  $\delta \gamma_{xz}$  e  $\delta \gamma_{yz}$  são obtidas a partir do campo de deslocamentos virtuais, usando as relações deslocamento – deformação, portanto são deformações virtuais. A equação (B.18) pode ser reescrita usando notação matricial como

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{f^B\} dV + \int_{S_f} \{\delta u\}^T \{f^s\} dV. \quad (\text{B.19})$$

que é a expressão dos trabalhos virtuais completando a demonstração.

Resumindo, mostrou-se que um campo de tensões que satisfaz o equilíbrio e as condições de contorno em termos de forças de superfície, satisfaz a expressão do princípio dos trabalhos virtuais. Partindo-se da expressão do princípio dos trabalhos virtuais (B.19) e seguindo a demonstração acima da equação (B.19) para a equação (B.8), a menos de alguns detalhes que não serão discutidos neste texto, pode-se mostrar que o campo de tensões que satisfaz a expressão dos trabalhos virtuais (B.19) para todos os possíveis campos de deslocamentos virtuais satisfaz também as equações diferenciais de equilíbrio (5.1) e as condições de contorno de superfície (5.4).

Logo, a equivalência entre satisfazer o equilíbrio e o princípio dos trabalhos virtuais fica estabelecida.