Modos Normais

	modo	comprimento de onda	frequência
	primeiro (fundamental)	$2L$	$\frac{v}{2L}$
	segundo	L	$\frac{v}{L}$
	terceiro	$\frac{2L}{3}$	$\frac{3v}{2L}$
	quarto	$\frac{L}{2}$	$\frac{2v}{L}$

Pelo princípio da superposição:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi vt}{L}+\delta_n\right) \qquad (1)$$

Para $t=t_0$

$$y\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (2)$$

$$B_n = b_n \cos\left(\frac{n\pi x t_0}{L}+\delta_0\right) \qquad (3)$$

Enunciado importante: A eq. (1) permite gerar qualquer forma espacial para o perfil da onda, descrita como $y(x)$ entre x=0 e L [sujeito ás condições de contorno $y(0)=y(L)=0$].

Para x=x_0 $$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}+\delta_n\right) \qquad (4)$$

$$C_n = b_n sen\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \qquad (5)$$

Podemos reescrever a Eq (4), em função dos coeficientes D_n e E_n

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)+\sum_{n=1}^{\infty} E_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \qquad (6)$$

Apesar de $0<t<\infty$

Temos: $$T_1=\frac{1}{f_1}=\frac{2L}{v}$$ $$y(t+T_1)=y(t)$$

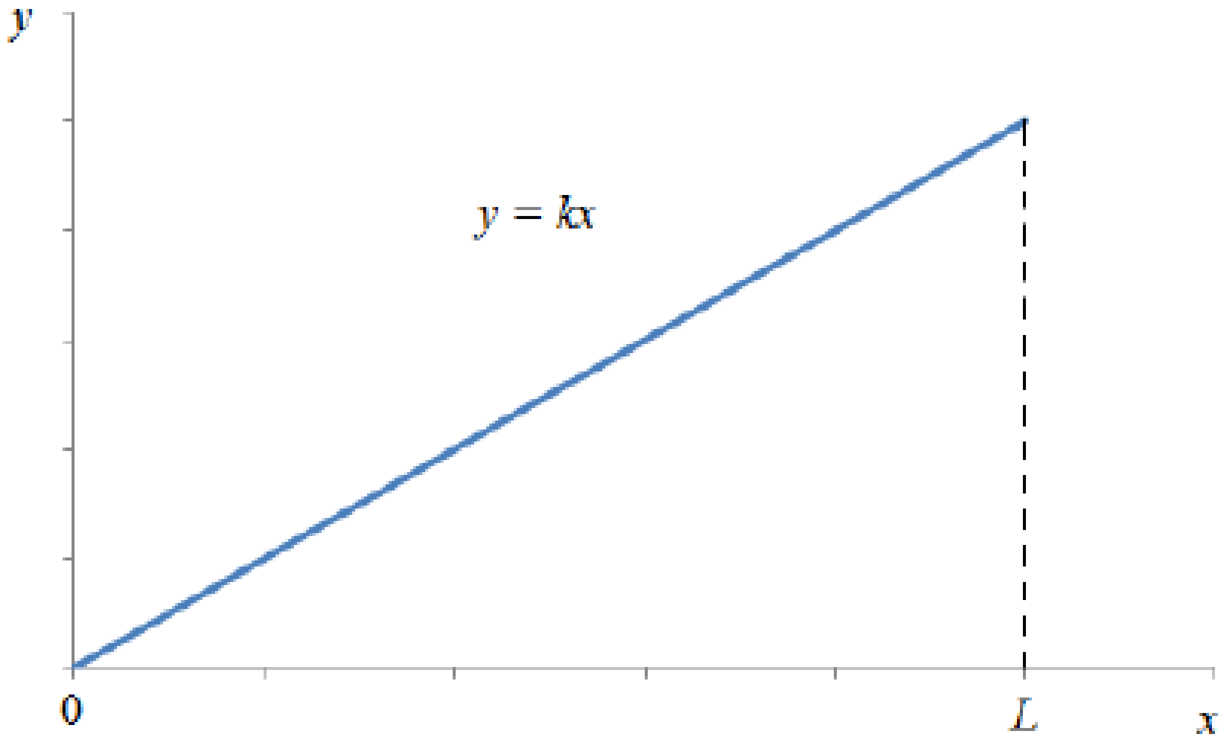
Através da análise de Fourier, pode-se mostrar que:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L y(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$D_n = \frac{v}{L}\int_0^{T_1} y(t)\cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)dt$$

$$E_n = \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} y(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)dt$$

Exemplo



$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L kx\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

$$n \text{ par}: B_n = -\frac{2kL}{\pi}$$

$$B_n = -\frac{2kL}{\pi}\frac{\cos n\pi}{n}.$$

$$n \text{ ímpar}: B_n = \frac{2kL}{\pi}.$$

A expansão em série de Fourier para $y(x) = kx$ é então:

$$y(x) = kx = \frac{2kL}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \frac{kl}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{2kL}{3\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\cdots$$