

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA POLITÉCNICA

COLETÂNEA DE EXERCÍCIOS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

APOSTILA Nº 2

CINEMÁTICA DA PARTÍCULA FLUÍDA

Oswaldo Fernandes  
Prof. Assistente de  
Mecânica dos Fluidos  
EPUSP - 1995

**ATENÇÃO:** Esta apostila de exercícios é destinada aos alunos da Escola Politécnica da USP para uso exclusivo nas atividades didáticas realizadas nesta instituição de ensino. Está protegida pela Lei de Direito Autoral número 9610 de 19/02/1998, não podendo ser copiada, ou reproduzida por qualquer meio sem autorização escrita dos autores.

## CAPÍTULO II - CINEMÁTICA DA PARTÍCULA FLUIDA

### A - INTRODUÇÃO

Para melhor acompanhamento deste capítulo sobre a cinemática da partícula fluida, destacaremos, a seguir, os principais conceitos envolvidos (ver bibliografia no fim desta Introdução).

#### A.1 - Lei do movimento

É a expressão

$$P = P(A, t),$$

que relaciona as posições  $P$  e  $A$  que uma mesma partícula ocupa nos instantes  $t$  e  $t_0$ , respectivamente.

Para  $P(x_1, x_2, x_3)$  e  $A(a_1, a_2, a_3)$ , então:

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t) \quad i = 1, 2, 3.$$

#### A.2 - Métodos de descrição dos movimentos

- método de Lagrange - acompanha a partícula ao longo da trajetória, verificando, em cada instante, os valores das grandezas a ela associados.

$$G = G [ P(A, t), t ] = G_L(A, t) = G_L(a_1, a_2, a_3, t).$$

As variáveis  $(a_1, a_2, a_3, t)$  são ditas variáveis de Lagrange.

- método de Euler - verifica, em cada instante, os valores das grandezas associadas às partículas fluidas que, sucessivamente, passam por um ponto  $P(x_1, x_2, x_3)$  determinado.

$$G = G(P, t) = G(x_1, x_2, x_3, t)$$

As variáveis  $(x_1, x_2, x_3, t)$  são ditas variáveis de Euler.

## A.3 - Movimento permanente e variável

- O movimento é permanente quando, para qualquer grandeza  $G$  associada a uma partícula fluida,

$$G(P, t) = G(P, t_0),$$

onde  $t_0$  é um instante de referência e  $t$  um instante qualquer; também:

$$\frac{\partial G(P, t)}{\partial t} = 0.$$

- o movimento é variável quando

$$G(P, t) \neq G(P, t_0);$$

neste caso

$$\frac{\partial G(P, t)}{\partial t} \neq 0.$$

## A.4 - Fórmulas de derivação

- em variáveis de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ G_L(a_1, a_2, a_3), t \right]_A = \text{cte};$$

- em variáveis de Euler

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)G,$$

onde  $G$  é uma grandeza escalar ou vetorial e  $\nabla$  (nabla) é o operador:

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

para o sistema de coordenadas cartesiano e

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

para o sistema de coordenadas cilíndrico.

$$\frac{dG}{dt} = \text{derivada total,}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \text{derivada local,}$$

$$(\vec{v} \times \nabla)G = \text{derivada convectiva ou de transporte.}$$

Se  $G$  é uma grandeza escalar,

$$(\vec{v} \times \nabla)G = \vec{v} \times \nabla G = \vec{v} \times \text{grad } G = v \frac{dG}{ds},$$

onde  $\frac{dG}{ds}$  é a derivada segundo a direção de versor  $\vec{s}$ , tomada segundo o arco elementar  $ds$  percorrido pela partícula fluida.

#### A.5 - Velocidade e aceleração

- velocidade

$$\vec{v}(P, t) = \frac{dP}{dt};$$

- aceleração

$$\vec{a}(P, t) = \frac{d\vec{v}(P, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) \vec{v}.$$

#### A.6 - Linhas do escoamento

- Trajetória é o lugar geométrico das posições ocupadas sucessivamente pelo centro de uma mesma partícula fluida em movimento; suas equações são obtidas resolvendo-se o sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1(x_1, x_2, x_3, t),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2(x_1, x_2, x_3, t),$$

$$\frac{dx_3}{dt} = v_3(x_1, x_2, x_3, t),$$

para coordenadas cartesianas, ou

$$\frac{dr}{dt} = v_r(r, \theta, z, t),$$

$$\frac{rd\theta}{dt} = v_\theta(r, \theta, z, t),$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z(r, \theta, z, t),$$

para coordenadas cilíndricas.

- Linha de corrente é a linha de escoamento em cujos pontos, para cada instante  $\bar{t}$ , o vetor velocidade das partículas fluidas lhe é tangente, isto é:

$$dP \wedge \vec{v}(P, \bar{t}) = 0$$

e, portanto, suas equações são obtidas a partir de

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, \bar{t})} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, \bar{t})} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, \bar{t})},$$

em coordenadas cartesianas, ou

$$\frac{dr}{v_r(r, \theta, z, \bar{t})} = \frac{rd\theta}{v_\theta(r, \theta, z, \bar{t})} = \frac{dz}{v_z(r, \theta, z, \bar{t})},$$

em coordenadas cilíndricas.

- Linha de emissão é o lugar geométrico das posições ocupadas pelos centros das partículas fluidas que, em instantes sucessivos, passaram por um ponto N, fixo, dito centro de emissão.

- Teorema - as trajetórias, linhas de corrente e linhas de emissão coincidem no movimento permanente, não coincidindo, em geral, em movimentos variáveis.

## A.7 - Movimento elementar da partícula fluida

$$\text{- Teorema: } \vec{v} = \vec{v} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_0 + \frac{1}{2} \text{ grad } \phi,$$

onde

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{ rot } \vec{v} = \text{vetor de rotação,}$$

$$\phi = \sum_{i,j=1}^3 d_{ij} da_i da_j,$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial a_j} + \frac{\partial v_j}{\partial a_i} \right).$$

$$\cdot \text{ Velocidade de dilatação linear} = \frac{\delta_i}{dt} = d_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial a_i}.$$

$$\cdot \text{ Velocidade de dilatação angular} = d_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d\theta_{ij}}{dt}.$$

$$\cdot \text{ Velocidade de dilatação cúbica} = \frac{\Delta}{dt} = \text{div } \vec{v} = \frac{1}{dv_0} \frac{d(dv_0)}{dt}.$$

## A.8 - Equação da continuidade na forma diferencial

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ div } \vec{v} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0.$$

A.9 - Bibliografia - Assy, Tufi Mamed - Mecânica dos Fluidos,  
 Livro I - Livro texto do Curso de Mecânica dos Fluidos - EPUSP; capítulo III.

## B - EXERCÍCIOS

Ex. 2.1 - Para o sistema de coordenadas cilíndricas demonstrar que

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \text{sen } \theta \vec{e}_y,$$

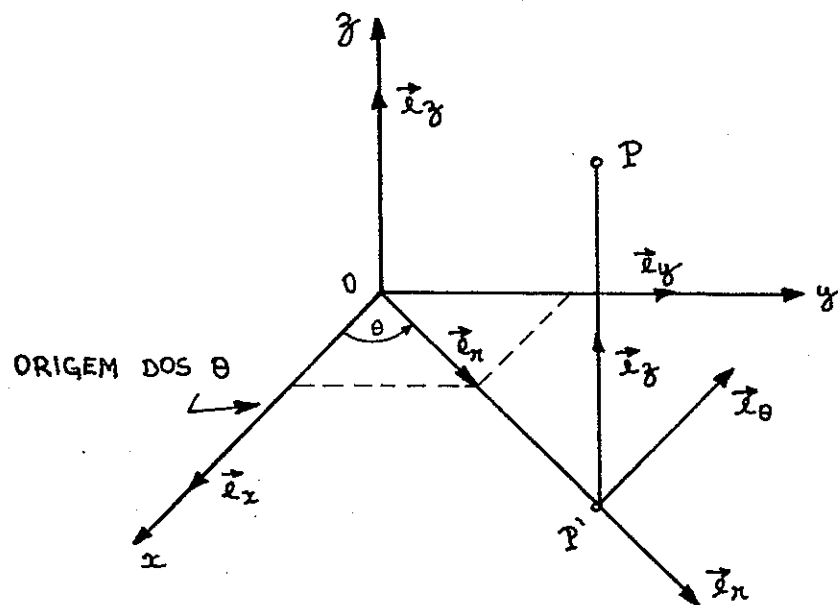
$$\vec{e}_\theta = -\text{sen } \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y.$$

Daí, demonstrar que

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_r}{dr} = 0,$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dr} = 0.$$

Solução:



Da figura,

$$\vec{e}_r = (\vec{e}_r \times \vec{e}_x) \vec{e}_x + (\vec{e}_r \times \vec{e}_y) \vec{e}_y.$$

Então:

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \text{sen } \theta \vec{e}_y.$$

Mas

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r;$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_x.$$

Derivando em relação a  $\theta$ ,

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y = \vec{e}_\theta,$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\sin \theta \vec{e}_y - \cos \theta \vec{e}_x = -\vec{e}_r.$$

Ex. 2.2 - Uma partícula A passa pela origem no instante  $t = 0$ , com a temperatura  $T_A = 273$  K e animada da velocidade  $v_A = 10$  m/s. Ao atingir o ponto de coordenadas medidas em metros ( $x = 0,1$ ;  $y = 0,1$ ;  $z = 0,141$ ) no instante  $t' > 0$ , com a temperatura  $T'_A = 285$  K, uma partícula B está passando pela origem no mesmo instante  $t'$  com a temperatura  $T'_B = 275$  K. Pedem-se: (a)-as derivadas local, convectiva e total da temperatura na origem e no instante  $t=0$ ; (b)-a derivada total da temperatura, em variáveis de Lagrange, no instante  $T = 0$  (Assy, Tufi Mamed).

Solução:

$$a) \text{ Derivada total } \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)T.$$

Considerando  $\vec{v} = v\vec{e}_s$ ,  $\vec{v} \times \nabla = v \frac{\partial}{\partial s}$  e teremos

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial s},$$

com  $\frac{\partial T}{\partial t}$  = derivada local e

$v \frac{\partial T}{\partial s}$  = derivada convectiva.

Determinêmo-las através das variações finitas conhecidas

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad \text{com } \Delta t = t' = \frac{\Delta s}{v}.$$



$$\text{Mas} \quad \Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = 0,2 \text{ m.}$$

$$\text{Daí,} \quad \Delta t = \frac{0,2}{10} = 0,02 \text{ s.}$$

Então,

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{275 - 273}{0,02} = 100 \text{ K/s} = \text{derivada local,}$$

$$v \frac{\partial T}{\partial s} \approx v \frac{\Delta T}{\Delta s} = 10 \times \frac{(285 - 275)}{0,2} = 500 \text{ K/s} = \text{derivada convectiva.}$$

A derivada total será

$$\frac{dT}{dt} \approx 100 + 500 = 600 \text{ K/s.}$$

b) Pelo método de Lagrange

$$\frac{dT}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(P, t') - T(P, t_0 = 0)}{\Delta t} \approx \frac{\Delta T}{\Delta t};$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{285 - 273}{0,02} = 600 \text{ K/s,}$$

obviamente o mesmo valor obtido em a).

Ex. 2.3 - Um campo escalar de pressões dado por

$$p = 3x^2y - 2y$$

está associado com o campo de velocidades

$$\vec{v} = (x - 2y^2) \vec{e}_x - (y - 2x^2) \vec{e}_y.$$

Calcular  $\frac{dp}{dt}$  em P (2, 0, 3).

Solução:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)p = (\vec{v} \times \nabla)p;$$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_P = (\vec{v} \times \nabla)_P p = (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y})_P p;$$

$$(\vec{v} \times \nabla)_P = 2 \frac{\partial}{\partial x} + 8 \frac{\partial}{\partial y} ;$$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_P = \left[ 2(6xy) + 8(3x^2 - 2) \right]_P ;$$

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_P = 80 .$$

Ex. 2.4 - O campo de velocidades num movimento é:

$$v_x = v_0 e^{-kx}$$

e o campo escalar da massa específica é

$$\rho = \rho_0 e^{-xt}$$

Calcular a expressão de  $\frac{d\rho}{dt}$  e seu valor particular para  $x = 0$  e  $t = 2$ .

$$\text{Resp.: } \frac{d\rho}{dt} = -\rho_0 e^{-xt} (v_0 t e^{-kx} + x).$$

$$\text{Para } x = 0 \text{ e } t = 2, \frac{d\rho}{dt} = -2\rho_0 v_0 .$$

Ex. 2.5 - Consideremos um movimento em que

$$\vec{v}(P, t) = (U_0 + at)\vec{e}_x + v_0 \vec{e}_y .$$

Demonstrar que as linhas de corrente no instante  $t_0$  são retas e que as trajetórias são parábolas. Qual a linha de emissão para um centro de emissão  $N(x_N, y_N, z_N)$ ?

Solução:

- Linhas de corrente para  $t = t_0$ :

Da equação das linhas de corrente

$$\vec{v} \wedge dP = 0 ,$$

$$\frac{dx}{v_x(x, y, t_0)} = \frac{dy}{v_y(x, y, t_0)} . \quad (a)$$

$$\text{Como } v_z = \frac{dz}{dt} = 0, \text{ obtemos } z = c_1. \quad (b)$$

$$\text{De (a), } \frac{dx}{u_0 + at_0} = \frac{dy}{v_0}.$$

$$\text{Integrando, } x = \frac{u_0 + at_0}{v_0} y + c_2. \quad (c)$$

As intersecções dos planos dados por (b) e (c) são as retas procuradas.

- Trajetórias

Sabemos que

$$\frac{dx}{dt} = v_x = u_0 + at,$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0,$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Integrando,

$$x = u_0 t + \frac{at^2}{2} + k_1,$$

$$y = v_0 t + k_2,$$

$$z = k_3.$$

Para  $t = 0$ ,  $P \equiv A(x_0, y_0, z_0)$ . Daí:

$$x = x_0 + u_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (d)$$

$$y = y_0 + v_0 t, \quad (e)$$

$$z = z_0. \quad (f)$$

São as equações paramétricas de uma parábola. Para cada ponto A teremos uma trajetória diferente.

Linhas de emissão no instante  $\bar{t}$

As partículas, que para  $t = 0$  se encontram nos pontos  $A(x_0, y_0, z_0)$ , passarão sucessivamente por  $N(x_N, y_N, z_N)$  nos instantes  $\tau$ , tais que

$$0 \leq \tau \leq \bar{t}.$$

De (d),

$$x_0 = x_N - u_0 \tau - \frac{a\tau^2}{2}.$$

De (e),

$$y_0 = y_N - v_0 \tau.$$

De (f),

$$z_0 = z_N.$$

Conhecidos  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$ , em função do fato de que as partículas devam passar por N nos instantes  $\tau$ , calculemos  $(x, y, z)$  no instante  $\bar{t}$ .

$$x = x_N + u_0(\bar{t} - \tau) + \frac{a}{2}(\bar{t}^2 - \tau^2);$$

$$y = y_N + v_0(\bar{t} - \tau);$$

$$z = z_0 = z_N.$$

São as equações paramétricas da linha de emissão onde  $\bar{t}$  é fixado e  $\tau$  é variável entre 0 e  $\bar{t}$  (linha de emissão no instante  $\bar{t}$ ).

Ex. 2.6 - No campo de velocidades:

$$v_x = 4y \quad v_y = 2x \quad v_z = 0$$

- calcular as acelerações local e convectiva e total no ponto  $P_1(2,1,0)$ ;
- calcular as componentes da aceleração paralela e normal ao vetor velocidade no ponto  $P_1(2,1,0)$ ;
- determinar a linha de corrente que passa em  $P_1(2,1,0)$ .

Solução:

- Aceleração:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla)\vec{v}$ . (1)

- A primeira parcela,  $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0$ , é a aceleração local. A segunda parcela,  $(\vec{v} \times \nabla)\vec{v}$ , é a aceleração convectiva e vale:

$$(\vec{v} \times \nabla)\vec{v} = (4y \frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial y})(4y \vec{e}_x + 2x \vec{e}_y) = 8(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y).$$

Em  $P_1(2,1,0)$ :

$$[(\vec{v} \times \nabla)\vec{v}]_{P_1} = 16\vec{e}_x + 8\vec{e}_y.$$

De (1), a aceleração total é

$$\vec{a}(P_1) = 16\vec{e}_x + 8\vec{e}_y \quad \text{e} \quad a(P_1) = \sqrt{16^2 + 8^2} = 8\sqrt{5}.$$

- A componente de  $\vec{a}(P_1)$  paralela a  $\vec{v}(P_1)$  é

$$a_p = \vec{a}(P_1) \cdot \frac{\vec{v}(P_1)}{v(P_1)}.$$

Mas

$$\vec{v}(P_1) = 4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y \quad \text{e} \quad v(P_1) = 4\sqrt{2}.$$

Dai:

$$a_p = \frac{(16\vec{e}_x + 8\vec{e}_y) \cdot 4(\vec{e}_x + \vec{e}_y)}{4\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}.$$

- A componente de  $\vec{a}(P_1)$  normal a  $\vec{v}$  será  $a_n$ , tal que:

$$a^2 = a_p^2 + a_n^2.$$

Então:

$$a_n^2 = a^2 - a_p^2 = 320 - 288 = 32,$$

$$a_n = 4\sqrt{2}.$$

- As linhas de corrente são obtidas de:

$$\frac{dx}{4y} = \frac{dy}{2x} \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Daí:

$$z = c_1.$$

e

$$xdx = 2ydy.$$

Integrando,

$$\frac{x^2}{2} = y^2 + c_2.$$

Para o ponto  $P_1(2,1,0)$ ,  $c_2 = 1$  e  $c_1 = 0$ .

Então a linha de corrente que passa por  $P_1$  terá equações

$$x^2 = 2(y^2 + 1); z = 0$$

NOTA: As trajetórias e linhas de emissão, por ser permanente o escoamento, coincidem com as linhas de corrente que passam por  $P_0$  e  $N$ , respectivamente.

Ex. 2.7 - Dado o campo de velocidades:

$$v_x = \alpha x, \quad v_y = \beta y, \quad v_z = 0,$$

determinar as trajetórias, linhas de corrente e as linhas de emissão no instante  $T$  para o centro de emissão  $N(x_N, y_N, z_N)$ .

Resp.: . Trajetórias

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{\alpha t}, & \text{ou } x &= x_0 \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \\ y &= y_0 e^{\beta t}, & z &= z_0. \\ z &= z_0. & z &= z_0. \end{aligned}$$

. Linhas de corrente  $x = c_1 y^{\alpha/\beta}, z = c_2.$

. Linhas de emissão

$$\begin{aligned} x &= x_N e^{\alpha(T - \tau)}, \\ y &= y_N e^{\beta(T - \tau)}, & \text{ou: } x &= x_N \left(\frac{y}{y_N}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \\ z &= z_0 = z_N. & z &= z_N. \end{aligned}$$

Nota: as linhas de corrente coincidem com as trajetórias e as linhas de emissão (movimento permanente).

Ex. 2.8 - Para o campo de velocidades:

$$v_x = v_0 \frac{x}{k},$$

$$v_y = v_0 \frac{y}{k},$$

$$v_z = 0,$$

- a - Mostrar que a aceleração é radial.  
 b - Se  $k = 2m$ , qual o valor de  $v_0$  para aceleração total em  $P(1,1,0)$  de  $4\sqrt{2} \text{ m/s}^2$ ?  
 c - Determinar as linhas de corrente e as trajetórias.

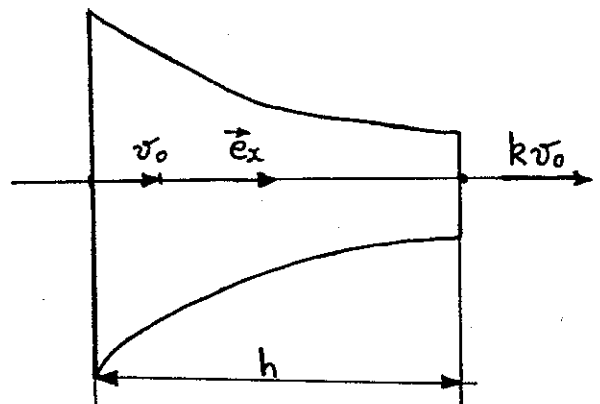
Resp.: a)  $\vec{a} = \frac{v_0^2 r}{k^2} \vec{e}_r$  ,      b)  $v_0 = 4 \text{ m/s}$ .

c) Linhas de corrente  $xy^{-1} = c_1$ ,  $z = c_2$ .  
 Trajetórias coincidem com as linhas de corrente.

Ex. 2.9 - O escoamento através de um bocal convergente é dado por  $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$ ,

onde  $v_x$  varia linearmente de  $v_0$  na entrada a  $kv_0$  na saída.

- 1 - Calcular a velocidade e a aceleração.  
 2 - Se  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  e  $h = 1 \text{ m}$ , qual o valor da aceleração na entrada e na saída do bocal?



Resp.:

1)  $\vec{v} = v_0 \left[ \frac{(k-1)x}{h} + 1 \right] \vec{e}_x$  e  $\vec{a} = \frac{v_0^2}{h^2} (k-1) \left[ (k-1)x+h \right] \vec{e}_x$ .

2)  $a_e = 4(k-1) \text{ m/s}^2$  e  $a_s = 4k(k-1) \text{ m/s}^2$ .

Ex. 2.10 - Num bocal cônico o campo de velocidades pode ser escrito na forma:

$$v_x = v_0 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{-2},$$

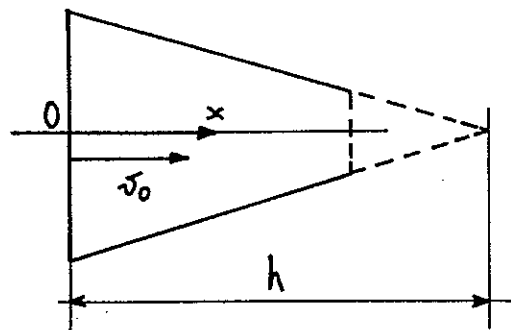
onde  $v_0$  = velocidade na entrada.

Determinar a expressão da a celeração e seu valor na entrada do bocal e na seção  $x = h/2$ .

Dados:

$$v_0 = 2 \text{ m/s e } h = 4 \text{ m.}$$

$$\text{Resp.: } a = 2 \frac{v_0^2}{h} \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{-5}, \quad a_0 = 2 \text{ m/s}^2, \quad a_1 = 64 \text{ m/s}^2.$$



Ex. 2.11 - Para o campo de velocidades:

$$\vec{v} = (x^2 - 2y^2 + x) \vec{e}_x - (xy^2 + y) \vec{e}_y,$$

Calcular em  $P(2,2,0)$ :

- 1 - aceleração  $\vec{a}$ ,
- 2 - componente da velocidade para  $\theta = 45^\circ$ .

Solução

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) \vec{v} = (\vec{v} \times \nabla) \vec{v},$$

uma vez que o movimento é permanente.

$$1 - \vec{a}(P) = (\vec{v} \times \nabla)_P \vec{v}, \text{ onde } P = P(2,2,0).$$

$$(\vec{v} \times \nabla)_P = (2^2 - 2 \cdot 2^2 + 2) \frac{\partial}{\partial x} - (2 \cdot 2^2 + 2) \frac{\partial}{\partial y} = -2 \frac{\partial}{\partial x} - 10 \frac{\partial}{\partial y}.$$

$$\vec{a}(P) = -2 \frac{\partial}{\partial x} + 10 \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 - 2y^2 + x) \vec{e}_x - (xy^2 + y) \vec{e}_y],$$

$$\vec{a}(P) = [(-4x + 40y - 2) \vec{e}_x + (2y^2 + 20yx + 10) \vec{e}_y]_{Y_P} = 70 \vec{e}_x + 98 \vec{e}_y.$$



$$2- \vec{v}(P) = -2 \vec{e}_x - 10 \vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_{45} = \cos 45^\circ \vec{e}_x + \sin 45^\circ \vec{e}_y \text{ com } |\vec{e}_{45}| = \sqrt{\cos^2 45 + \sin^2 45} = 1.$$

$$\vec{e}_{45} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_x + \vec{e}_y).$$

$$v_{45} = \vec{v} \cdot \vec{e}_{45} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-2 - 10) = -6\sqrt{2}.$$

Ex. 2.12 - Sendo dado:

$$\vec{v} = 3x \vec{e}_x + 6y \vec{e}_y + 4t \vec{e}_z,$$

- calcular a velocidade e a aceleração no ponto  $P_1(3, 1, 2)$ , no instante  $t = 10$ ;
- obter as linhas de corrente no instante  $t = 3/2$  e ponto  $P_1$  e as trajetórias para  $A(1, 1, 2)$ ;
- calcular a linha de emissão para o centro de emissão  $N(1, 2, 1)$  e instante  $\bar{t} = 2$ .

Solução

$$\begin{aligned} \text{- Velocidade: } \vec{v}(P_1, 10) &= 3 \cdot 3 \vec{e}_x + 6 \cdot 1 \vec{e}_y + 4 \cdot 10 \vec{e}_z = \\ &= 9 \vec{e}_x + 6 \vec{e}_y + 40 \vec{e}_z. \end{aligned}$$

$$v(P_1, 10) = \sqrt{9^2 + 6^2 + 40^2} = \sqrt{1717} \text{ m/s} = 41,4 \text{ m/s}.$$

$$\text{- aceleração: } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) \vec{v},$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 4 \vec{e}_z,$$

$(\vec{v} \times \nabla)$  no ponto  $P_1$  e instante  $t$  vale:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \nabla &= (9 \vec{e}_x + 6 \vec{e}_y + 4t \vec{e}_z) \times \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \\ &= \left( 9 \frac{\partial}{\partial x} + 6 \frac{\partial}{\partial y} + 4t \frac{\partial}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

$$(\vec{v} \times \nabla) \vec{v} = \left( 9 \frac{\partial}{\partial x} + 6 \frac{\partial}{\partial y} + 4t \frac{\partial}{\partial z} \right) (3x \vec{e}_x + 6y \vec{e}_y + 4t \vec{e}_z) =$$

$$= 27 \vec{e}_x + 36 \vec{e}_y.$$

$$\vec{a} = 27 \vec{e}_x + 36 \vec{e}_y + 4 \vec{e}_z, \text{ para qualquer } t.$$

- Linha de corrente

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{6y} = \frac{dz}{4t};$$

$$2 \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}; \ln \frac{x^2}{c_1} = \ln y \quad \therefore \quad x^2 = c_1 y;$$

$$\frac{dy}{y} = 1,5 \frac{dz}{t} \quad \therefore \quad \ln \frac{y}{c_2} = \frac{1,5}{t} z, \text{ pois } t = \text{constante};$$

$$y = c_2 e^{\frac{1,5}{t} z}.$$

$$y = C_2 +$$

No instante  $t = 3/2$ :

$$x^2 = c_1 y,$$

$$y = c_2 e^z.$$

A linha de corrente que passa por  $P_1(3,1,2)$  terá por equações:

$$3^2 = c_1 \cdot 1 \quad \therefore \quad c_1 = 9;$$

$$1 = c_2 e^2 \quad \therefore \quad c_2 = e^{-2}.$$

Daí:

$$x^2 = 9y,$$

$$y = e^{(z-2)}.$$

## - Trajetórias

$$\frac{dx}{dt} = 3x \quad \therefore \quad \ln \frac{x}{k_1} = 3t; \quad x = x_0 e^{3t};$$

$$\frac{dy}{dt} = 6y \quad \therefore \quad \ln \frac{y}{k_2} = 6t; \quad y = y_0 e^{6t};$$

$$\frac{dz}{dt} = 4t \quad \therefore \quad z = 2t^2 + k_3; \quad z = z_0 + 2t^2;$$

pois, para  $t = 0$ , temos o ponto

$$A(x_0, y_0, z_0) \equiv A(1, 1, 2).$$

Dai

$$x = e^{3t}; \quad y = e^{6t}, \quad \text{ou} \quad x^2 = y \quad \text{e} \quad z = 2(1 + t^2).$$

## - Linha de emissão

Para a determinação da linha de emissão no instante  $\bar{t}$  devem-se considerar as partículas que passam sucessivamente por

$$N(x_N, y_N, z_N) \equiv N(1, 2, 1),$$

nos instantes  $\zeta$ , tais que

$$0 \leq \zeta \leq \bar{t}.$$

Calculando-se os valores das coordenadas  $x_0, y_0$ , e  $z_0$  dos pontos A em que se acham essas partículas no instante  $t = 0$ , a partir das equações das trajetórias, temos:

$$\begin{aligned} x_N &= x_0 e^{3\zeta} & ; & & x_0 &= x_N e^{-3\zeta}; \\ y_N &= y_0 e^{6\zeta} & ; & & y_0 &= y_N e^{-6\zeta}; \\ z_N &= z_0 + 2\zeta^2 & ; & & z_0 &= z_N - 2\zeta^2. \end{aligned}$$

Substituindo, nas equações das respectivas trajetórias, os particulares valores de  $x_0, y_0$  e  $z_0$  obtidos, temos as equações paramétricas (parâmetro  $\zeta$ ) da linha de emissão

$$\left. \begin{aligned} x &= x_N e^{3(\bar{t}-\zeta)}, \\ y &= y_N e^{6(\bar{t}-\zeta)}, \\ z &= z_N + 2(t^{-2}-\zeta^2), \end{aligned} \right| \text{ou } x^2 = \frac{x_N^2}{y_N} y.$$

Para  $\bar{t} = 2$  e  $N(1, 2, 1)$

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{3(2-\zeta)}, \\ y &= 2e^{6(2-\zeta)}, \\ z &= 9 - 2\zeta^2, \end{aligned} \right| \text{ou } 2x^2 = y.$$

Nota : Comparar as equações obtidas para as 3 linha de escoamento e tirar conclusões.

Ex. 2.13 - Calcular a velocidade e a aceleração, em variáveis de Lagrange e de Euler, no instante  $t = 10$  s e no ponto  $P(x = 3, y = 1,8, z = 0)$  no caso do item a) e no instante  $t = 0,1$  s e no ponto  $P(x = 1, y = 2, z = 5)$  no caso do item b):

$$\text{a) } \vec{v} = 6x \vec{e}_x + 6y \vec{e}_y - 7t \vec{e}_z;$$

$$\text{b) } \vec{v} = 10x^2 \vec{e}_x - 20xy \vec{e}_y + 100t \vec{e}_z.$$

Sugestão: Calcular inicialmente as trajetórias para poder passar das variáveis de Euler às de Lagrange.

Resp.: a)  $\vec{v} = 6x \vec{e}_x + 6y \vec{e}_y - 7t \vec{e}_z$  - Euler.

Trajetoória:  $x = x_0 e^{6t}$ ;  $y = y_0 e^{6t}$ ;  $z = z_0 - 3,5 t^2$ .

$$\vec{v} = 6x_0 e^{6t} \vec{e}_x + 6y_0 e^{6t} \vec{e}_y - 7t \vec{e}_z - \text{Lagrange.}$$

No ponto  $P(3; 1,8; 0)$  e  $t = 10$  teremos:

$$\vec{v} = 18\vec{e}_x + 10,8\vec{e}_y - 70\vec{e}_z,$$

$$\vec{a} = 36x \vec{e}_x + 36y \vec{e}_y - 7\vec{e}_z - \text{Euler,}$$

$$\vec{a} = 36x_0 e^{6t} \vec{e}_x + 36y_0 e^{6t} \vec{e}_y - 7\vec{e}_z - \text{Lagrange.}$$

No ponto  $P(3; 1,8; 0)$  e  $t = 10$ ,

$$\vec{a} = 108\vec{e}_x + 64,8\vec{e}_y - 7\vec{e}_z.$$

$$b) \vec{v} = 10x^2 \vec{e}_x - 20xy \vec{e}_y + 100 t \vec{e}_z - \text{Euler.}$$

$$\text{Trajetória: } x = x_0 (1 - 10x_0 t)^{-1},$$

$$y = y_0 (1 - 10x_0 t)^2,$$

$$z = z_0 + 50 t^2.$$

$$\vec{v} = \frac{10x_0^2 \vec{e}_x}{(1-10x_0 t)^2} - 20 x_0 y_0 (1-10x_0 t) \vec{e}_y + 100 t \vec{e}_z - \text{Lagrange.}$$

Em  $P(1, 2, 5)$  e  $t = 0,1$  s,

$$\vec{v} = 10 \vec{e}_x - 40 \vec{e}_y + 10 \vec{e}_z,$$

$$\vec{a} = 200 |x^3 \vec{e}_x + x^2 y \vec{e}_y + 0,5 \vec{e}_z| - \text{Euler-}$$

$$= 200 \left( \frac{x_0}{1 - 10x_0 t} \right)^3 \vec{e}_x + x_0^2 y_0 \vec{e}_y + 0,5 \vec{e}_z - \text{Lagrange.}$$

Em  $P(1, 2, 5)$  e  $t = 0,1$  s,

$$\vec{a} = 200 \vec{e}_x + 2 \vec{e}_y + 0,5 \vec{e}_z.$$

Ex. 2.14 - Dado o escoamento cujo campo de velocidade é

$$v_x = \frac{x}{t}, \quad v_y = \frac{y}{t}, \quad v_z = 0, \quad t \neq 0,$$

determinar:

- equação da linha de corrente que passa pelo ponto  $P_1(2,1,2)$ ;
- equação da trajetória que passa em  $P_1$ , no instante  $t = 1$ ;
- aceleração num instante  $t$  qualquer, em  $P_1$ .

Solução:

a - equação das linhas de corrente  $\vec{v} \wedge dP = 0$ , ou seja,

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

Sendo  $v_z = \frac{dz}{dt} = 0$ ,  $dz = 0 \quad \therefore \quad z = c_1$

De  $\frac{dx}{x/t} = \frac{dy}{y/t}$  obtém-se, para qualquer  $t$ ,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \text{e} \quad \ln \frac{x}{c_2} = \ln y$$

ou seja:

$$x = c_2 y.$$

As equações  $z = c_1$  (planos),

$$x = c_2 y \text{ (planos),}$$

definem as linha de correntes: retas oriundas das interseções dos planos.

Linha de corrente particular que passa por  $P_1(2,1,2)$ :  
- os valores de  $c_1$  e  $c_2$  se obtém pela substituição de  $x = 2$ ,  $y = 1$  e  $z = 2$  nas equações, a saber:

$$c_1 = 2,$$

$$2 = c_2 \cdot 1 \quad \text{e} \quad c_2 = 2.$$

Daí, a equação da linha de corrente por  $P_1$ :

$$x = 2y,$$

$$z = 2.$$

b) Equação da trajetória

Obtém-se da integração de

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t},$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Daí:

$$\ln \frac{x}{k_1} = \ln t \quad \therefore \quad x = k_1 t;$$

$$\ln \frac{y}{k_2} = \ln t \quad \therefore \quad y = k_2 t,$$

$$z = k_3.$$

São as equações paramétricas da Trajetória.

Para  $t = 1$  e  $x = 2$ ,  $y = 1$  e  $z = 2$ .

$$k_1 = 2,$$

$$k_2 = 1,$$

$$k_3 = 2,$$

$$\text{e} \quad x = 2t, \quad y = t \quad \text{e} \quad z = 2;$$

$$\text{ou} \quad x = 2y \quad \text{e} \quad z = 2.$$

E assim, apesar do movimento ser variável, as linhas de corrente coincidem com as trajetórias.

c) Aceleração

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) \vec{v}.$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{x}{t^2} \vec{e}_x - \frac{y}{t^2} \vec{e}_y,$$

$$(\vec{v} \times \nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} - v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{x}{t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{t} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$(\vec{v} \times \nabla) \vec{v} = \frac{x}{t^2} \vec{e}_x + \frac{y}{t^2} \vec{e}_y.$$

$$\text{Daí} \quad \vec{a} = 0.$$

Ex. 2.15 - Um jato de fluido incompressível, simétrico em relação ao eixo  $Oz$ , é dirigido contra uma parede de dimensões infinitas, criando-se o campo das velocidades

$$\begin{aligned}v_x &= m(t)x, \\v_y &= m(t)y, \\v_z &= -2m(t)z.\end{aligned}$$

Determinar as linhas de corrente, as trajetórias e as linhas de emissão.

Solução: Verifiquemos inicialmente a viabilidade do movimento ser o de um fluido incompressível.

Para fluido incompressível, a velocidade de dilatação cúbica é nula. Logo:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

O movimento é viável, pois

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\&= m(t) + m(t) - 2m(t) = 0.\end{aligned}$$

- Linhas de corrente

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

$$\frac{dx}{m(t)x} = \frac{dy}{m(t)y} = \frac{dz}{-2m(t)z},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = -\frac{dz}{2z}, \text{ para } m(t) \neq 0.$$

Integrando,

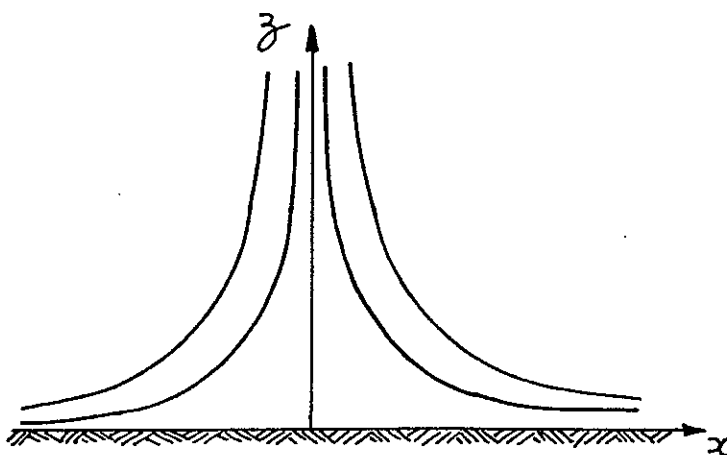
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \text{ obtêm-se } x = c_1 y,$$

e

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{2z}, \text{ obtêm-se } x^2 z = c_2.$$

As linhas de corrente são intersecções de planos passando pelo eixo  $Oz$  com hiperbolóides cúbicos - são assíntotas aos eixos-  $Ox$  e  $Oz$ .





O ponto  $0(0, 0, 0)$  é ponto de estagnação, uma vez que aí

$$\vec{v} = 0.$$

- Trajetórias e linhas de emissão

Embora  $m(t)$  seja função do tempo, as equações da linha de corrente não contêm  $m$ . As linhas de emissão e trajetórias coincidem com as linhas de corrente. O tempo influi apenas no valor numérico da velocidade, mas não na sua direção.

De fato:

Trajetoórias

$$\frac{dx}{dt} = m(t)x, \quad \frac{dx}{x} = m(t)dt,$$

$$\frac{dy}{dt} = m(t)y, \quad \frac{dy}{y} = m(t)dt,$$

$$\frac{dz}{dt} = -2m(t)z, \quad -\frac{dz}{2z} = m(t)dt.$$

Dai:

$$\frac{dy}{x} = \frac{dy}{y},$$

$$\frac{dy}{x} = \frac{dz}{-2z}.$$

e voltamos às equações das linhas de corrente.

Nota: Fazer desenvolvimento análogo para as linhas de emissão.

Ex. 2.16- Determinar a equação da linha de corrente que passa por  $P_0(1, 1, 1)$  e a equação da trajetória que no instante  $t = 0$  passa por esse mesmo ponto, no movimento cujo campo de velocidades é

$$\vec{v} = -x \vec{e}_x + 2y \vec{e}_y + (2-z) \vec{e}_z.$$

Resp.:

Linha de corrente  $x^2 y = 1, \quad x = 2 - z.$

Trajetoária  $x = e^{-t}, \quad y = e^{2t}, \quad z = 2 - e^{-t}.$

ou  $x^2 y = 1, \quad x = 2 - z.$

Ex. 2.17- Determinar para o campo de velocidades  $\vec{v} = (x/t) \vec{e}_x + y \vec{e}_y$  as linhas de corrente e de emissão e a trajetória, e traçá-las a partir do centro de emissão  $(x_N, y_N)$  em função do tempo. Para as aplicações numéricas são dados:

$$x_N = y_N = 0,1; \quad t = 0,5; \quad t = 1; \quad 0,2 < \tau < t; \quad 0 < x < 10.$$

Solução:

. Campo de velocidades

$$v_x = \frac{x}{t}; \quad v_y = y; \quad v_z = 0.$$

. Linhas de corrente

Aplicando a equação da linha de corrente,  $\vec{v} \wedge dP = 0$ , na forma

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y},$$

com  $v_z = 0$ , obtêm-se:

$$\frac{dz}{dt} = 0 \quad e \quad z = c_1;$$

$$\frac{t \, dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad e \quad \ln x^t = \ln \frac{y}{c_2};$$

pois  $t = \text{constante}$  para toda a massa fluida

Daí:

$$y = c_2 x^t,$$

$$z = c_1,$$

são as equações das linhas de corrente no instante  $t$ .

. Trajetórias

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}; \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t}; \quad \ln \frac{x}{k_1} = \ln t$$

$$e \quad x = k_1 t;$$

$$\frac{dy}{dt} = y; \quad \frac{dy}{y} = dt; \quad \ln \frac{y}{k_2} = t$$

$$e \quad y = k_2 e^t;$$

$$\frac{dz}{dt} = 0; \quad z = k_3.$$

Fazendo para  $t = t_0$   $x = x_0$ ,  $y = y_0$  e  $z = z_0$ ,

$$k_1 = \frac{x_0}{t_0} \quad e \quad x = \frac{x_0 t}{t_0},$$

$$k_2 = y_0 e^{-t_0} \quad e \quad y = y_0 e^{t-t_0},$$

$$k_3 = z_0 \quad e \quad z = z_0.$$

São as equações paramétricas da trajetória.

. Linhas de emissão no instante  $\bar{t}$

As partículas que para  $t=t_0$  estavam em A, passarão sucessivamente por N no intervalo

$$0 < \tau \leq \bar{t}$$

Das trajetórias obtemos para o instante  $\tau$

$$x_0 = \frac{t_0}{\tau} x_N; \quad y_0 = y_N e^{(t_0 - \tau)}; \quad z_0 = z_N.$$

Para o instante  $\bar{t}$  temos as linhas de emissão

$$x = x_N \frac{\bar{t}}{\tau},$$

$$y = y_N e^{\bar{t} - \tau},$$

$$z = z_N = z_0,$$

com  $\tau$  variando no intervalo  $0 < \tau \leq \bar{t}$ .

Aplicação numérica

$$x_N = y_N = 0,1; \quad \bar{t}_1 = 0,5; \quad \bar{t}_2 = 1;$$

$$0,2 < \tau < \bar{t} \quad e \quad 0 < x < 1.$$

Para  $\bar{t}_1 = 0,5$

$$x = \frac{0,05}{\tau}, \quad y = 0,1 e^{0,5 - \tau}, \quad z = z_0.$$

Para  $\bar{t}_2 = 1,0$

$$x = \frac{0,1}{\tau}, \quad y = 0,1 e^{1 - \tau}.$$

Ex. 2.18 - Sendo dado

$$\vec{v} = (6 + 2xy + t^2)\vec{e}_x - (xy + 10t)\vec{e}_y + 2t\vec{e}_z,$$

calcular a aceleração no ponto  $P(1, 0, 1)$ , no instante  $t = 1$ .

Resp.:  $\vec{a}(P, 1) = -18\vec{e}_x + 2\vec{e}_z.$

Ex. 2.19 - Dado o campo de velocidades

$$\vec{v} = 3x\vec{e}_x - 2y\vec{e}_y + (5t - 3z)\vec{e}_z,$$

achar a equação das linhas de corrente que passam por  $P_1(2, 1, 2)$  nos instantes  $t = 1$  e  $t = 1,6$ .

Resp.: Para  $t = 1$ :  $x^2 y^3 = 4$  e  $x(5 - 3z) = -2.$

Para  $t = 1,6$ :  $x^2 y^3 = 4$  e  $x(8 - 3z) = 4.$

Ex. 2.20 - Para o campo de velocidades

$$v_x = \frac{x}{1-t}, \quad v_y = \frac{y}{1+t}, \quad v_z = 0,$$

calcular:

- 1 - linhas de corrente para  $t = 0$  e  $t \rightarrow \infty$ ;
- 2 - trajetórias;
- 3 - linha de emissão que passa por  $(x_0, y_0, z_0)$  em  $t = 0$ .

1 - Linha de corrente

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

Como  $v_z = \frac{dz}{dt} = 0$ ,  $z = c_1.$

$$\frac{(1-t)dx}{x} = \frac{(1+t)dy}{y}.$$

Integrando,

$$\ln \frac{x}{c_2} = \frac{1+t}{1-t} \ln y$$

e

$$x = c_2 y^{\frac{1+t}{1-t}}.$$

Para  $t = 0$ ,

$$z = c_1, \quad x = c_2 y.$$

Para  $t \rightarrow \infty$ ,

$$z = c_1, \quad x = c_2 \lim_{t \rightarrow \infty} y^{\frac{\frac{1}{t} + 1}{\frac{1}{t} - 1}} \quad \text{e} \quad xy = c_2.$$

## 2-Trajatórias

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{1-t};$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{y}{1+t};$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Integrando e considerando  $P \equiv P_0(x_0, y_0, z_0)$  para  $t = 0$ ,

$$\ln \frac{x}{k_1} = -\ln(1-t) \quad \therefore x = k_1(1-t)^{-1} = x_0(1-t)^{-1};$$

$$\ln \frac{y}{k_2} = \ln(1+t) \quad \therefore y = k_2(1+t) = y_0(1+t);$$

$$z = k_3.$$

Eliminando  $t$ , que vale  $1 - \frac{x_0}{x}$ ,

$$y = y_0 \left( 2 - \frac{x}{x_0} \right) \quad \text{e} \quad z = z_0.$$

3 - Linha de emissão para  $t = \bar{t}$

Seja  $N(x_N, y_N, z_N)$  o centro de emissão, os valores das  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  correspondentes às trajetórias das partículas que passam sucessivamente por  $N$  entre os instantes  $t=0$  e  $t = \bar{t}$ , não obtidos a partir das equações paramétricas da trajetória e valem, para  $0 \leq \tau \leq \bar{t}$ :

$$x_0 = x_N(1 - \tau); \quad y_0 = \frac{y_N}{(1 + \tau)}; \quad z_0 = z_N.$$

As equações da linha de emissão para  $t = \bar{t}$  serão, portanto:

$$x = x_N \left( \frac{1 - \tau}{1 - \bar{t}} \right), \quad y = y_N \left( \frac{1 + \bar{t}}{1 + \tau} \right), \quad z = z_N.$$

Para  $\bar{t} = 0$  e  $N \equiv P_0(x_0, y_0, z_0)$ ,

$$x = x_0(1 - \tau), \quad y = \frac{y_0}{1 + \tau}, \quad z = z_0.$$

Eliminando  $\tau$  e sabendo-se que

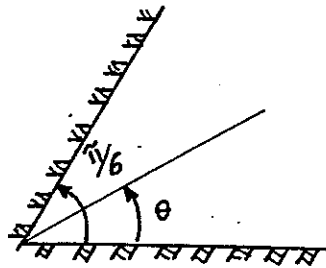
$$\tau = 1 - \frac{x}{x_0},$$

então

$$y = y_0 \left( 2 - \frac{x}{x_0} \right)^{-1} \quad \text{e} \quad z = z_0.$$

Ex. 2.21 - Um fluido escoar em movimento meridiano entre duas placas planas  $0 < \theta < \pi/6$ , com um campo de velocidades dados por  $v_r = (1 - t)/r$ ,  $v_\theta = v_z = 0$ . Pedem-se: (a) - Lei de movimento; (b) - o l. g das posições das partículas no instante  $t = 0,5$  inicialmente distribuídas sobre a circunferência  $r_0 = 1$ ; (c) - a equação das seções de escoamento;

(d) - as acelerações total, local e convectiva em variáveis de Euler; (e) - as superfícies de nível  $v = Cte$ ; (f) - os diagramas de velocidade numa seção de escoamento para  $t = 0$  e  $t = 0,5$ ; (g) - a expressão da aceleração total em variáveis de Lagrange em função dos resultados obtidos em (a) e (d). (Assy, Tufi Mamed).



Solução:

Campo de velocidades dado no sistema cilíndrico de coordenadas:

$$v_r = \frac{1-t}{r},$$

$$v_\theta = v_z = 0.$$

a) Lei do movimento:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{1-t}{r}, \text{ donde } rdr = (1-t)dt.$$

$$\text{Integrando, } \frac{r^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} = t - \frac{t^2}{2},$$

onde  $r_0$  é o valor de  $r$  para  $t = 0$ .

$$\text{Daí: } r^2 = r_0^2 + 2t - t^2.$$

$$\text{Ainda } v_\theta = \frac{rd\theta}{dt} = 0, \text{ donde } \theta = \theta_0 = cte;$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0, \text{ donde } z = z_0 = cte.$$



Dai:

$$r^2 = r_0^2 + 2t - t^2,$$

$$\theta = \theta_0 \quad e \quad z = z_0.$$

As trajetórias são retas que passam pela origem. A posição da partícula, sobre elas, é dada por  $r = r(t)$ .

- b) Lugar geométrico das posições das partículas no instante  $t = 0,5$ , se  $r_0 = 1$ :

$$r^2 = 1 + 2 \cdot 0,5 - 0,25 = 1,75 \quad e \quad r = 1,32,$$

isto é, superfície cilíndrica de  $r = 1,32$ .

- c) Equação das seções de escoamento

Como  $\vec{v} = v_r \vec{e}_r$ , as seções de escoamento serão normais a  $\vec{e}_r$  em cada ponto. São superfícies cilíndricas de  $r = \text{cte}$ .

- d) Aceleração em variáveis de Euler ( $r, \theta, z, t$ )

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) \vec{v}.$$

. Aceleração local:  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ ,

onde  $\vec{v} = \frac{1-t}{r} \vec{e}_r$ ;

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \frac{\vec{e}_r}{r}$$

- . Aceleração convectiva

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times \nabla) \vec{v} &= \left( \frac{1-t}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{1-t}{r} \vec{e}_r \right) = \\ &= \left( \frac{1-t}{r} \right)^2 \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} - \frac{(1-t)^2}{r^3} \vec{e}_r = - \frac{(1-t)^2}{r^3} \vec{e}_r. \end{aligned}$$

. Aceleração total

$$\vec{a} = - \left( \frac{1}{r} + \frac{(1-t)^2}{r^3} \right) \vec{e}_r .$$

e) Superfície  $v = \text{cte}$ .

$$v = v_r = \frac{1-t}{r} = \text{cte} = \frac{1}{k} ,$$

$r = k(1-t)$ , superfície cilíndrica para cada  $t$ .

f) Velocidades para  $t = 0$  e  $t = 0,5$

$$\text{Para } t = 0 , \quad v = \frac{\vec{e}_r}{r} \text{ para cada } r .$$

$$\text{Para } t = 0,5 , \quad v = \frac{\vec{e}_r}{2r} \text{ para cada } r .$$

g) Aceleração em variáveis de Lagrange ( $r_0, \theta_0, z_0, t$ )

$$\vec{a} = \frac{r_0^2 + 1}{(r_0^2 + 2t - t^2)^{3/2}} \vec{e}_r \text{ a partir de (a) e (d) .}$$

Resp.:

$$\text{a) } r^2 = r_0 + 2t - t^2 , \quad \theta = \theta_0 , \quad z = z_0 .$$

$$\text{b) } r_1 = 1,32 \text{ (superfície cilíndrica).}$$

$$\text{c) } r = \text{cte} .$$

$$\text{d) } \vec{a}_{\text{local}} = \frac{-\vec{e}_r}{r} , \quad \vec{a}_{\text{convect}} = - \frac{(1-t)^2}{r^3} \vec{e}_r ;$$

$$\vec{a} = -\vec{e}_r \left( \frac{1}{r} + \frac{(1-t)^2}{r^3} \right) .$$

$$\text{e) } r = k(1-t) = r_0(1-t) .$$

$$f) t = 0 \quad \therefore \quad v_r = \frac{1}{r} \text{ para cada } r = \text{cte.}$$

$$t = 0,5 \quad \therefore \quad v_r = \frac{1}{2r} \text{ para cada } r = \text{cte.}$$

$$g) \vec{a} = - \frac{\vec{e}_r (r_0^2 + 1)}{(r_0^2 + 2t - t^2)^{3/2}}.$$

Ex. 2.22 - No movimento representado, em coordenadas cilíndricas, pelo campo de velocidades

$$\vec{v} = - \frac{4}{r} \vec{e}_r + \frac{2}{r} \vec{e}_\theta,$$

determinar as linhas de corrente e as trajetórias.

Solução:

- Linhas de corrente

De

$$\vec{v} \wedge dP = 0,$$

obtém-se

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{rd\theta}{v_\theta} = \frac{dz}{v_z}.$$

Como  $v_r = \frac{dz}{dt} = 0$ , tem-se  $z = c_1$ .

Também,

$$\frac{dr}{-4/r} = \frac{rd\theta}{2/r}.$$

Para  $r \neq 0$ ,

$$\frac{dr}{r} = -2 d\theta.$$

Integrando,

$$\ln \frac{r}{c_2} = -2\theta \quad \text{e} \quad r = c_2 e^{-2\theta}.$$

- Trajetórias

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{-4}{r} \quad \therefore \quad r dr = -4 dt;$$

$$\frac{r^2}{2} = -4t + k_1 \quad \text{e} \quad r^2 = 2k_1 - 8t;$$

$$v_\theta = \frac{rd\theta}{dt} = \frac{2}{r} \quad \therefore \quad d\theta = \frac{2dt}{r^2} = \frac{2dt}{2k_1 - 8t} = \frac{dt}{k_1 - 4t};$$

$$\theta = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{k_1 - 4t}{k_2}\right) = -\frac{1}{4} \ln\frac{r^2}{2k_2} = -\frac{1}{2} \ln\frac{r}{\sqrt{2k_2}};$$

$$r = \sqrt{2k_2} e^{-2\theta}.$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \quad \therefore \quad z = k_3.$$

Comparando com as linhas de corrente, vemos que as trajetórias coincidem com elas, o que era de se esperar, pois o movimento é permanente. Constatar o mesmo para as linhas de emissão.

Ex. 2.23 - Obter as linhas de corrente para o campo de velocidades

$$v_r = -\frac{3}{2} v_0 r^{1/2} \cos \frac{3\theta}{2}, \quad v_\theta = \frac{5}{2} v_0 r^{3/2} \sin \frac{3\theta}{2}, \quad v_z = 0.$$

(Assy, Tufi Mamed)

Solução:

Linhas de corrente

Equação no sistema de coordenadas cilíndricas:

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{rd\theta}{v_\theta} = \frac{dz}{v_z}.$$

Como  $v_z = \frac{dz}{dt} = 0$ :  $z = c_1$ .

Também:

$$-\frac{dr}{\frac{3}{2} v_0 r^{1/2} \cos \frac{3\theta}{2}} = \frac{rd\theta}{\frac{5}{2} v_0 r^{3/2} \sin \frac{3\theta}{2}},$$

$$-\frac{5}{3} \frac{dr}{r} = \frac{d\theta \cos 3\theta/2}{\sin 3\theta/2} = \frac{2}{3} \frac{d(\sin 3\theta/2)}{\sin 3\theta/2}.$$

Integrando:

$$-\frac{5}{2} \ln r = \ln \frac{\sin 3\theta/2}{c_2};$$

$$\sin \frac{3\theta}{2} = c_2 e^{-\frac{5r}{2}}.$$

As linhas de corrente são, portanto:

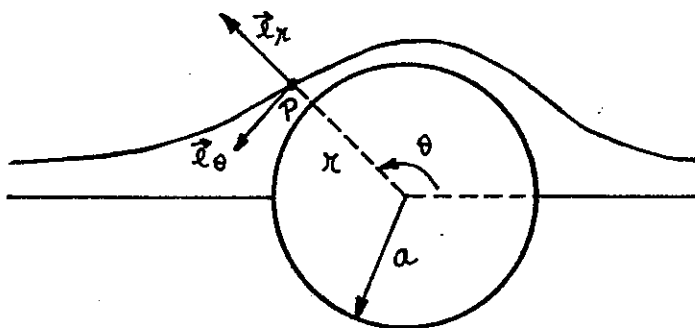
$$z = c_1,$$

$$\theta = \frac{2}{3} \arcsin \left( c_2 e^{-\frac{5r}{2}} \right).$$

Ex. 2.24: O escoamento em torno de um cilindro é dado pelo campo de velocidades:

$$\vec{v} = v_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \vec{e}_r - v_0 \sin \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \vec{e}_\theta.$$

Achar a aceleração no bordo,  $r = a$ , do cilindro.



Solução:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) \vec{v};$$

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z \text{ com } v_z = 0;$$

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\vec{v} \times \nabla = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Para  $r = a$ , bordo do cilindro:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = -2v_0 \sin\theta,$$

$$(\vec{v} \times \nabla)_a = -\frac{2v_0 \sin\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$\vec{a} = -\frac{2v_0 \sin\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta),$$

$$\vec{a} = -\frac{2v_0 \sin\theta}{a} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + v_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + v_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} \right]_{r=a},$$

$$\vec{a} = -\frac{2v_0 \sin\theta}{a} \left[ -2v_0 \cos\theta \vec{e}_\theta - 2v_0 \sin\theta (-\vec{e}_r) \right],$$

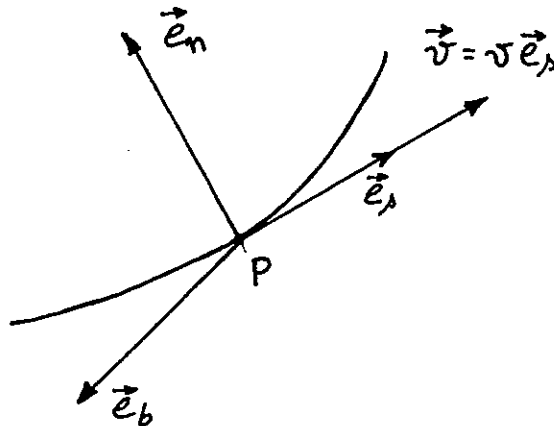
pois  $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r$  (veja-se Ex. 2.1);

$$\vec{a} = -\frac{4v_0^2}{a} \sin\theta (\sin\theta \vec{e}_r - \cos\theta \vec{e}_\theta).$$

Ex. 2.25 - Determinar a expressão das componentes da aceleração no sistema intrínseco de origem fixa num ponto P dado e  $\vec{e}_s$  dirigido segundo a tangente à linha de corrente que passa por P no instante  $t_0$ . Confirmar o resultado obtido pelo emprego do sistema cilíndrico com origem no centro da curvatu-

ra do arco da linha de corrente que contém o ponto P no instante  $t_0$  (Assy, Tufi Mamed).

Solução:



Definamos o sistema intrínseco de coordenadas. É constituído pelos versores;

a)  $\vec{e}_s = \frac{dP}{ds}$  da tangente à linha de corrente;

b)  $\vec{e}_n = R \frac{d\vec{e}_s}{ds}$ , onde  $R =$  raio de curvatura da linha de corrente

no ponto e instante considerados  $\frac{1}{\left| \frac{d\vec{e}_s}{ds} \right|}$ ;

c)  $\vec{e}_b = \vec{e}_s \wedge \vec{e}_n$  = versor da binormal.

Expressão da velocidade:  $\vec{v} = v \vec{e}_s$ .

Expressão da aceleração:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ .

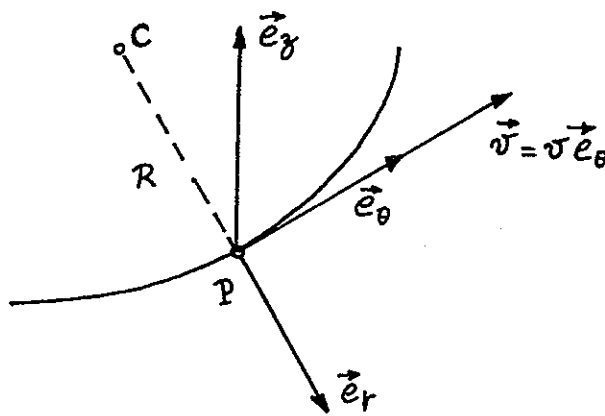
$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) \vec{v} \quad \text{com} \quad \nabla = \vec{e}_s \frac{\partial}{\partial s} + \vec{e}_n \frac{\partial}{\partial n} + \vec{e}_b \frac{\partial}{\partial b};$$

$$(\vec{v} \times \nabla) \vec{v} = v \frac{\partial}{\partial s};$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial s} (v \vec{e}_s) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_s + v^2 \frac{\partial}{\partial s} \vec{e}_s;$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n.$$

Usando-se o sistema cilíndrico com origem no centro de curvatura do arco da linha de corrente que contém o ponto P no instante  $t_0$ :



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \times \nabla) \vec{v},$$

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\vec{v} \times \nabla = \frac{v}{R} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{v}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \vec{e}_\theta) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{v^2}{R} \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{v}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \vec{e}_\theta.$$

Como  $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r$  (ver exercício 2.1),

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{v^2}{R} \vec{e}_r + v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_\theta \quad (ds = r d\theta),$$

expressão igual à anterior com

$$\vec{e}_s = \vec{e}_\theta \quad \text{e} \quad \vec{e}_n = -\vec{e}_r.$$

**Ex. 2.26** - Um líquido escoo ao longo de um canal, de fundo inclinado de um ângulo  $\theta$  em relação à horizontal, animado do seguinte campo de velocidades:  $v_x = v_0 [1 - (1 - y/h)^2]$ ,  $v_y = v_z = 0$ . O eixo  $0x$  está orientado no sentido do escoamento, que é descendente, e contido no fundo do canal. O eixo  $0y$  é normal ao fundo do canal.  $v_0$  é a velocidade na superfície livre paralela ao fundo do canal e distante desse fundo de  $y = h$ . Pedem-se: (a) Traçar o diagrama de velocidades numa seção de escoamento (Sugestão: Traçar  $(v_x/v_0) = f(y/h)$ ); (b) Achar as acelerações total, local e convectiva sendo dados  $v_0 = kt$  e  $h = m t^2$ , onde  $k$  e  $m$  são números dados. (Assy, Tufi Mamed).

Resp.: a)  $\frac{v_x}{v_0} = 1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2$ .



$$b) \vec{a}_{\text{convectiva}} = (\vec{v} \times \nabla) \vec{v} = 0 \quad (\partial v_x / \partial x = 0).$$

$$\vec{a}_{\text{local}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \left( \frac{3ky^2}{h^2} - \frac{2ky}{h} \right) \vec{e}_x = \vec{a}_{\text{total}}.$$

Ex. 2.27 - Determinar a lei do movimento plano que se realiza com o seguinte campo de velocidades  $v_x = A(x+y) + Bt$ ,  $v_y = C(x+y) + Dt$ , onde  $A, B, C, D$ , são números dados. Traçar no plano  $(x, y)$  o deslocamento da partícula desde o instante  $t_0 = 0$  até o instante  $t = 1,0$ , com ponto inicial em  $(x_0 = 1,0, y_0 = 1,0)$  e particularizando as constantes para  $A = 2, B = 3, C = 1, D = 1/2$  (Assy, Tufi Mamed).

Solução:

Campo de velocidades

$$v_x = A(x + y) + Bt = 2(x + y) + 3t,$$

$$v_y = C(x + y) + Dt = x + y + t/2,$$

$$A(x_0, y_0) \equiv A(1, 1).$$

$$\frac{dx}{dt} = 2(x + y) + 3t \quad (\alpha);$$

$$\frac{dy}{dt} = (x + y) + t/2 \quad (\beta);$$

$$(\alpha) - 2(\beta): \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dy}{dt} = 2t;$$

$$x - 2y = t^2 + c_1.$$

$$\text{Em } (\beta) \frac{dy}{dt} = 3y + t^2 + t/2 + c_1,$$

$$\dot{y} - 3y = t^2 + t/2 + c_1.$$

Solução da equação homogênea  $\dot{v} - 3v = 0$ :

$$v = ke^{3t}.$$

Solução particular  $v = e^{3t}$ .

Fazendo  $y = uv$ ,

$$u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt} - 3uv = t^2 + t/2 + c_1,$$

$$v \frac{du}{dt} + u \left( \frac{dv}{dt} - 3v \right) = t^2 + t/2 + c_1,$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{t^2 + t/2 + c_1}{e^{3t}},$$

$$u = -\frac{e^{-3t}}{3} \left[ t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{9} \right] - \frac{e^{-3t}}{6} \left[ t + \frac{1}{3} \right] - \frac{c_1 e^{-3t}}{3} +$$

$$+ c_2 = -\frac{e^{-3t}}{3} \left[ t^2 + \frac{7}{6}t + \frac{7}{18} + c_1 \right] + c_2,$$

$$y = uv = -\frac{1}{3} \left[ t^2 + \frac{7}{6}t + \frac{7}{18} + c_1 \right] + c_2 e^{+3t},$$

$$x = -\frac{2}{3} \left[ t^2 + \frac{7}{6}t + \frac{7}{18} + c_1 \right] + t^2 + c_1 + 2c_2 e^{3t},$$

$$x = \frac{t^2}{3} - \frac{7}{9}t - \frac{7}{27} + \frac{c_1}{3} + 2c_2 e^{3t}.$$

Para  $x_0 = 1$  e  $y_0 = 1$ ,  $t = 0$ ,

$$\therefore \begin{cases} 1 = -\frac{7}{54} - \frac{c_1}{3} + c_2, \\ 3c_2 = 2 + \frac{21}{54} \therefore c_2 = \frac{43}{54}, \\ 1 = -\frac{7}{27} + \frac{c_1}{3} + 2c_2, \\ c_1 = -1. \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{3} \left( t^2 + \frac{7}{6} t \right) + \frac{11}{54} + \frac{43}{54} e^{3t},$$

$$x = \frac{t^2}{3} - \frac{7}{9} t - \frac{16}{27} + \frac{43}{27} e^{3t}.$$

Equações paramétricas do movimento.

Ex. 2.28 - Um escoamento no interior de um conduto cilíndrico de seção circular se realiza com um diagrama de velocidade que é paraboloide de revolução com o vértice no eixo do conduto. Determinar:

- as velocidades de dilatação linear e angular,
- o vetor turbilhão em cada ponto,
- a velocidade de dilatação cúbica.

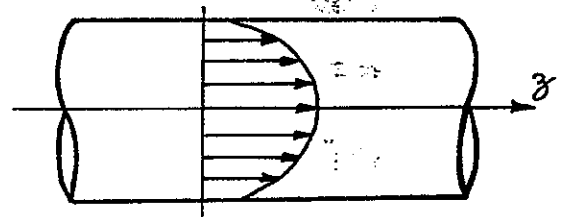
Solução:

- Campo de velocidades

Pelos dados do problema,

$$v_r = v_\theta = 0,$$

$$v_z = v_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$



- Velocidade de dilatação linear e angular

Sistema cartesiano:

$$d_{11} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad d_{22} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad d_{33} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

$$d_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = 0,$$

$$d_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y},$$

$$d_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\text{Sendo } r^2 = x^2 + y^2, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}.$$

Daí:

$$d_{23} = -\frac{v_{\max} y}{R^2} \quad \text{e} \quad d_{13} = -\frac{v_{\max} x}{R^2},$$

ou, com  $y = R \operatorname{sen} \theta$  e  $x = R \operatorname{cos} \theta$ ,

$$d_{23} = -\frac{v_{\max} \operatorname{sen} \theta}{R} \quad \text{e} \quad d_{13} = -\frac{v_{\max} \operatorname{cos} \theta}{R}.$$

Então: • Velocidades de dilatação linear  $d_{ii} = 0$ .

• Velocidade de dilatação angular:

$$d_{12} = 0, \quad d_{13} = -\frac{v_{\max} \operatorname{cos} \theta}{R}, \quad d_{23} = -\frac{v_{\max} \operatorname{sen} \theta}{R}.$$

- Vetor turbilhão  $\vec{\Omega}$

$$\text{Por definição } \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla \wedge \vec{v};$$

$$\vec{\Omega} = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r} \vec{e}_\theta = r \frac{v_{\max}}{R^2} \vec{e}_\theta.$$

- Velocidade de dilatação cúbica

$$\text{É o } \operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \left( \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot v_z \vec{e}_z = 0.$$

Ex. 2.29 - Um escoamento plano entre 2 placas planas fixas, paralelas, distantes de  $2h$ , se realiza com um campo de velocidades dado por:

$$v_x = v_0 \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right), \quad v_y = v_z = 0,$$

com eixo das ordenadas normal às placas e de origem num ponto

distante de  $h$  de cada uma das placas. Pedem-se:

- velocidades de dilatação linear, angular e cúbica;
- variação, entre os instantes  $t = 0$  e  $t = 1$ , da seção de uma partícula inicialmente quadrada, de lado  $a$ , e centro no ponto  $y = 0$ ;
- eixos principais de deformação.

Solução:

- Velocidades de dilatação linear:

$$d_{11} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad d_{22} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad d_{33} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

- Velocidades de dilatação angular:

$$d_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = - \frac{v_0 y}{h^2},$$

$$d_{13} = d_{23} = 0.$$

- Velocidade de dilatação cúbica:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\Delta}{dt} = \sum_{i=1}^3 d_{ii} = 0.$$

- Variação da partícula entre  $t = 0$  e  $t = 1$ .

. Deslocamento do centro C:

$$C'C = v_x dt = v_0 \left[ 1 - \frac{y^2}{h^2} \right] dt = v_0 dt \quad (\text{pois } y_C = 0),$$

$$C'C = v_0 \quad \text{para } dt = \Delta t = 1 - 0 = 1.$$

. Deformação do ângulo reto B'CA:

$$d\theta_{1,2} = - 2d_{12} dt,$$

$$d\theta_{1,2} = \frac{2v_0 y}{h^2} dt \equiv \frac{2v_0 y}{h^2} = 0 \quad (\text{para } y_C = 0).$$

. Rotação em bloco da partícula

É a rotação da diagonal CD, que passa para a posição C'D':

$$d\alpha = \Omega dt.$$

Valor de  $\Omega$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{e}_y & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} v_x \vec{e}_z = \frac{v_{0y}}{h^2} \vec{e}_z = 0 \quad (\text{pois } y_C = 0)$$

Daí  $d\alpha = 0$ .

. Função de deformação:

$$\theta = 2d_{12}da_1da_2 = -\frac{2v_{0y}}{h^2} x'y' = 0 \quad (y_C = 0).$$

Portanto a partícula de centro  $y_C = 0$  sofre apenas translação e no instante  $t = 1$  terá se deslocado de  $\overline{CC'} = v_0$ .

Para  $y_C = 0$ , quaisquer eixos são eixos principais.

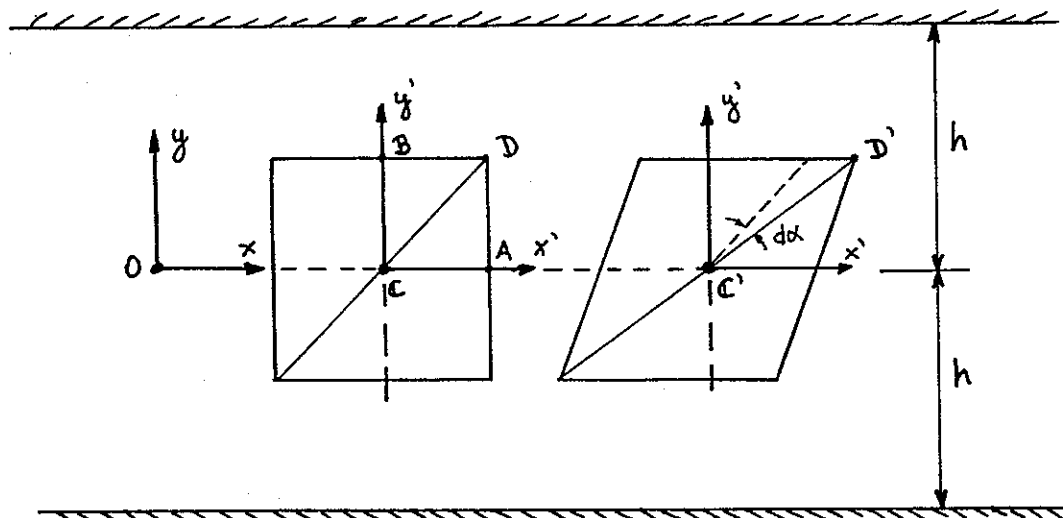


Figura Ex. 2.29

**Ex. 2.30:** Verificar a equação da continuidade para fluidos incompressíveis animados dos seguintes campos de velocidades e interpretar os resultados obtidos

$$a) v_x = k(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2; v_y = 2kxy/(x^2 + y^2)^2; v_z = 0;$$

$$b) v_r = v_z = 0, v_\theta = A/r \quad (r > 0);$$

$$c) v_x = Ay^2 + by + C, v_y = v_z = 0;$$

$$d) v_x = kx/f(x,y,z), v_y = ky/f(x,y,z), v_z = kz/f(x,y,z),$$

$$\text{onde} \quad f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2};$$

$$e) v_r = k\left(\frac{1}{r^2} - 1\right)\cos\theta, v_\theta = k\left(\frac{1}{r^2} + 1\right)\sin\theta, v_z = 0 \quad (r > 0).$$

**Solução:**

Para que os campos de velocidade dados sejam referentes a fluidos incompressíveis devemos ter, para cada um deles,  $\text{div } \vec{v} = 0$ . Assim:

$$a) \text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{2kx(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{2kx(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = 0,$$

$$b) \text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

$$c) \text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

$$d) \text{div } \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \equiv 3 \frac{k}{f} - \frac{3kx^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{3ky^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{3kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0,$$

$$e) \text{div } \vec{v} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{k}{r} \left(\frac{1}{r^2} - 1\right)\cos\theta - \frac{2k\cos\theta}{r^3} + \frac{k}{r} \left(\frac{1}{r^2} + 1\right)\sin\theta = 0.$$

Para os casos a) a e) a equação da continuidade é verificada.

Ex. 2.31- Determinar as possíveis relações entre  $a(t)$ ,  $b(t)$  e  $c(t)$  para que o escoamento de um fluido incompressível seja fisicamente possível com o campo de velocidade dado por:

$$v_x = ax, \quad v_y = by, \quad v_z = cz.$$

Resp.:  $a + b + c = 0$ .

Por exemplo  $c = 0$  e  $a = -b$ .

Ex. 2.32- Sendo  $v_x = 4x - 6y$ ,

$$v_y = ky + f(x),$$

determinar  $k$  e  $f(x)$  para que este campo de velocidade represente um movimento irrotacional de um fluido incompressível. Sabe-se que  $f(0) = 0$ .

Resp.:  $k = -4$ ,  $f(x) = -6x$ .

Ex. 2.33- Sendo  $v_x = x^2 + z^2 + 5$ ,

$$v_y = y^2 + z^2,$$

determinar a forma mais simples da componente  $v_z$  que satisfaz a equação da continuidade para um fluido incompressível.

Resp.:  $v_z = -2z(x + y)$ .

Ex. 2.34- Dadas as componentes das velocidades de dois escoamentos de fluidos incompressíveis:

$$A \quad \begin{cases} v_x = x^2 - y, \\ v_y = x^3 - 2xy, \end{cases} \quad B \quad \begin{cases} v_x = y^3 - 3x^2y, \\ v_y = 3xy^2 - x^3, \end{cases}$$

pede-se:

a) verificar se os dois escoamentos são possíveis,



- b) verificar se os mesmos são rotacionais ou irrotacionais,  
 c) no movimento rotacional determinar o LG dos pontos tais que:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{e}_z .$$

- Resp.: a) ambos possíveis, b) A é rotacional,  
 c)  $3x^2 - 2y = 0$ . B é irrotacional,

Ex. 2.35 - Um fluido escoar em condições tais que sua massa específica  $\rho$  é função apenas do tempo. Dado o campo de velocidades:

$$v_x = 4x \quad , \quad v_y = -2y \quad ,$$

pede-se:

- a) a expressão de  $\rho(t)$  para que o escoamento seja possível,  
 b) a equação das linhas de corrente.

Solução: Calculando o  $\text{div } \vec{v}$  obtemos:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 4 - 2 = 2 \neq 0 .$$

O fluido não pode ser incompressível. Será compressível com

$$\rho = \rho(t) ,$$

conforme expresso no enunciado do problema.

Para que o movimento do fluido compressível seja possível devemos ter satisfeita a equação da continuidade, a saber:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ div } v = 0 .$$

Dai:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot 2 = 0 ,$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -2 dt .$$

Integrando,

$$\ln \frac{\rho}{k} = -2t \quad \text{e} \quad \rho = ke^{-2t}.$$

Equação da linha de corrente

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

De  $v_z = 0$  obtem-se  $\frac{dz}{dt} = 0$  e  $z = c_1$ .

De  $\frac{dx}{4x} = \frac{dy}{-2y}$  obtém-se  $xy^2 = c_2$ .

Equação das linhas de corrente:  $xy^2 = c_2,$   
 $z = c_1.$

Ex. 2.36 - Dado o campo de velocidades de um fluido perfeito incompressível, determinar  $f(y,t)$  para que o escoamento seja possível.

$$v_x = 2x^3(2-t) - 6x \ln f(y,t),$$

$$v_y = -6x^2y(2-t) + 2y^3(2-t).$$

Solução:

Para ser possível o escoamento o campo de velocidades deve satisfazer à equação da continuidade para fluidos incompressíveis, isto é:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Daí:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 6x^2(2-t) - 6 \ln f - 6x^2(2-t) + 6y^2(2-t) = 0 \quad \text{e}$$

$$\ln f(y,t) = y^2(2-t).$$

Daí:

$$f(y,t) = e^{y^2(2-t)}.$$