Notas de Aula - Micro 1

Prof Gabriel Madeira

FEA-USP

Primeiro Semestre de 2017

Espaço de Escolhas

Conjunto das alternativas de escolha concebíveis. Exemplos:

- Políticos em uma eleição.
- Alternativas no menu de um restaurante.
- Conjunto de cestas de consumo concebíveis
  - Normalmente, no caso de N bens, utilizamos o espaço $\mathbb{R}_+^N \equiv \{(x_1, ..., x_N) : x_n \geq 0 \forall n\}$. Neste caso, cada elemento do conjunto de escolha é chamado de cesta. O n-ésimo elemento de uma cesta representa o consumo do n-ésimo bem.
  - Em alguns casos, pouco usuais, supõe-se que os bens são indivisíveis.
  - Em outros, admite-se a possibilidade de consumo negativo (exemplo, ativos financeiros).

Relções de Preferências dos Consumidores

- Compara-se pares de alternativas duas a duas. Usa-se o símbolo $\succeq$ para se expressar relações de preferência.
- Dados x e y pertencentes ao espaço de escolhas, temos:
  - $x \succeq y$ denota a seguinte relação: "x é (fracamente) preferido a y". Pode-se interpretar esta relação como "x é ao menos tão desejável quanto y".
  - $x \succ y$ denota que vale $x \succeq y$, mas não vale $y \succeq x$. Isso pode ser lido como: "x é estritamente preferido a y".
  - $x \sim y$ denota que vale $x \succeq y$, e também vale $y \succeq x$. Isso pode ser lido como: "x é indiferente a y".

Propriedades de Preferências

- Preferências transitivas: quando dadas três alternativas quaisquer no espaço de escolha, x, y e z, se $x \succeq y$ e $y \succeq z$, então $x \succeq z$.
- Preferências completas: quando para qualquer par x e y no espaço de escolha, vale $x \succeq y$ ou $y \succeq x$ (ou ambos).
- Preferências contínuas: Se $A \succ B$ qualquer cesta suficientemente próxima de A também deve ser preferida a B.

Contra Exemplo - Preferências Completas

Suponha a seguinte regra: o aluno x é melhor que o aluno y se as notas de x em português e matemática são melhoresue as de y.

Considere as seguintes notas:

Aluno	matemática	redação
x	9	10
y	10	7
z	4	8

Contra Exemplo - Preferências Completas

Suponha a seguinte regra: o aluno x é melhor que o aluno y se as notas de x em português e matemática são melhoresue as de y.
Considere as seguintes notas:

Aluno	matemática	redação
x	9	10
y	10	7
z	4	8

- Vale $x \succ z$.
- Não vale $x \succeq y$ nem $y \succeq x$.
- Não vale $y \succeq z$ nem $z \succeq y$.

Contra Exemplo - Preferências Transitivas

Escolha Social por Votação - paradoxo de Condorcet. Suponha que haja 3 alternativas, (A, B e C) de política e 3 indivíduos. O ranqueamento das alternativas é dado por:

Ordem de Preferência	Joaquim	Manoel	Pedro
1a opção	A	B	C
2a opção	B	C	A
3a opção	C	A	B

Contra Exemplo - Preferências Transitivas

Escolha Social por Votação - paradoxo de Condorcet. Suponha que haja 3 alternativas, (A, B e C) de política e 3 indivíduos. O ranqueamento das alternativas é dado por:

Ordem de Preferência	Joaquim	Manoel	Pedro
1a opção	A	B	C
2a opção	B	C	A
3a opção	C	A	B

- Considere a seguinte regra de decisão: dadas 2 políticas, x e y, $x \succeq y$ se x recebe mais votos (ou o mesmo número de votos) que y em uma disputa entre as duas alternativas.
- Por esta regra, $A \succeq B$, $B \succeq C$ mas não vale $A \succeq C$. Não há transitividade.

Contra-Exemplo de Preferências Contínuas

- Preferências lexicográficas (semelhantes às de um dicionário ou de ranqueamento olímpico por medalhas).
  - Preferências lexicográfica em $\mathbb{R}^2_+$: $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$ se $x_1 > y_1$ ou $x_1 = y_1$ e $x_2 > y_2$.
  - Intuitivamente, o primeiro bem é que define o ranqueamento. O segundo só é relevante no caso de empate no primeiro.
- $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \succ (0,1)\ \forall n$, mas $(0,0) \prec (0,1)$, sendo que $(0,0) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, 0\right)$.$\Rightarrow$ Não vale continuidade.

Curvas de indiferença

- Definição: Curva de Indiferença (ou conjunto de indiferença): é um conjunto de alternativas indiferentes entre si.
  - Ou seja, dados quaisquer pares x e y em uma curva de indiferença, vale $x \sim y$.
- Mapa de indiferença: conjunto de todas as curvas de indiferença no espaço de escolha.

Preferências bem-comportadas no $\mathbb{R}^N_+$.

- Monotonicidade: As preferências são fortemente monótonas se dados quaisquer pares $y \equiv (y_1, y_2, ..., y_N)$ e $x \equiv (x_1, x_2, ..., x_N)$ tais que, se $x_n \geq y_n$ para qualquer $n \in \{1, ..., N\}$ e $x \neq y$, então $x \succ y$. São fracamente monótonas se sempre que $x_n > y_n$ para qualquer n, $x \succ y$. Em palavras, se o consumo de todos os bens é maior na cesta x do que na cesta y, então x é preferido a y.
- Convexidade: As preferências são convexas se, dados quaisquer pares y e x, com $y \sim x$, e dado $\alpha \in (0, 1)$, então$\alpha y + (1 - \alpha)x \succeq x$ e $\alpha y + (1 - \alpha)x \succeq y$. Se essas últimas duas relações valem com $\succ$, então preferências são estritamente convexas.
- Valendo estas duas propriedades curvas de indiferença são convexas.
- Contra-exemplo: cerveja e vinho em uma festa.

Exemplos de Preferências

Mapa de indiferenças e ordenamento entre curvas caracterizam completamente preferências racionais (definidas como preferências completas e transitivas). Seguem alguns exemplos (as figuras estão no cap 3 do Varian).

- Substitutos perfeitos: curvas de indiferença são retas negativamente inclinadas. Vale convexidade fraca e monotonicidade forte.
- Complementares perfeitos: curvas de indiferença com quina e formato em L. Valem convexidade fraca e monotonicidade fraca.
- Um bem neutro: curvas de indiferença paralelas a um dos eixos. Valem convexidade fraca e monotonicidade fraca.
- Preferências saciadas: um dos pontos é preferido a todos os demais. Curvas de indiferença são concentricas em torno deste ponto. Não vale monotonicidade.
- Preferências com males (um bem indesejável). Curvas de indiferença positivamente inclinadas.

Taxa Marginal de Substituição

Definição: TMS é a inclinação da curva de indiferença. Intuitivamente, a taxa marginal de substituição de um bem x pelo bem y é quantas unidades de y deve-se acrescentar (marginalmente) dada o aumento de uma unidade de x para que se mantenha indiferença.

- Formalmente, é a derivada de um bem em relação ao outro ao longo de uma curva de indiferença (mantendo-se os demais constantes, caso haja outros bens).
- Normalmente (com monotonicidade forte) trata-se de um número negativo. Pode ser positivo no caso de males.
- Pode depender do ponto em que se está no mapa de preferências. De fato, pode variar ao longo de uma curva de indiferença.
- TMS pode não ser definida em alguns pontos. Alguns pontos da curvas de indiferença são não deriváveis.

Taxa Marginal de Substituição

Exemplos:

- Substitutos perfeitos: TMSs são constantes no mapa de indiferença.
- Complementares perfeitos: TMS não existe na quina, é infinita acima da quina ou zero à direita da quina.
- Bem neutro: TMS é zero ou infinita (dependendo do eixo do bem neutro).
- Preferências saciadas: TMSs podem ser negativas, positivas, nulas ou infinitas.
- Preferências com males: TMSs são positivas (caso um bem seja um "mal" e o outro não).

Função Utilidade

Suponha que haja uma relação de preferências definida sobre os elementos de $\mathbb{R}_+^N$. Uma função u com domínio $\mathbb{R}_+^N$ e contra-domínio $\mathbb{R}$ (ou seja, $u : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}$) é uma função utilidade representando estas preferências caso $u(x) \geq u(y)$ se e somente se $x \succeq y$.

- Note que uma função utilidade só existirá caso as preferências sejam racionais (completas e transitivas).
- Resultado teórico (teorema). Preferências racionais e contínuas podem ser representadas por uma função utilidade contínua.

Qualquer relação de preferências que satisfaça as hipóteses do teorema pode ser representada por uma função utilidade. Nos exemplos acima temos:

- Substitutos perfeitos: $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$.
- Complementares perfeitos: $u(x_1, x_2) = \min(ax_1, bx_2)$.
- Um bem neutro: $u(x_1, x_2) = x_1$.
- Preferências saciadas. Exemplo: $u(x_1, x_2) = -(1 - x_1)^2 - (1 - x_2)^2$. Note que funções utilidade podem assumir valores negativos. Isso não impede que elas representem preferências. No caso presente, o maior valor possível é zero, e a cesta $(1, 1)$ é preferida a todas demais cestas.
- Preferências sobre males: Exemplo: $u(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

Utilidade, como um número, tem alguma interpretação?

- Utilidade ordinal: Para caracterizar preferências, o que importa é a ordenação entre alternativas. Utilidade não tem uma interpretação. De fato, se u é uma utilidade representando certas preferências, qualquer transformação crescente de u também é uma função utilidade.
- Utilidade cardinal: Em alguns casos, utilidade tem uma interpretação clara. Por exemplo quando ela é medida em valores monetários. Neste caso não apenas a ordenação entre alternativas, mas a distância entre elas é relevante.

Cada função utilidade expressa completamente as relações de preferência. Questão: dadas preferências existe uma única função utilidade que as expressa? Resposta: não.

- Transformação monótona (ou crescente). Suponha que $g(y)$ ($g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) seja uma função crescente (ou seja, se $y_1 > y_2$ então $g(y_1) > g(y_2)$). Então $h(x) \equiv g(f(x))$ é uma transformação monótona ou crescente de $f(x)$.
- Resultado trivial: se $u(x)$ (com $x \in \mathbb{R}_+^N$) é uma função utilidade representando certas preferências e $h(x)$ é uma transformação monotona de $u(x)$, então $h(x)$ também é uma função utilidade representando as mesmas preferências.
- Corolário: cada relação de preferências pode ser representada por infinitas funções utilidade.

Exemplo: Suponha, por conveniência técnica, que o espaço de escolha seja $\mathbb{R}^2_{++} \equiv \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Considere a seguinte função utilidade (Cobb-Douglas): $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$.

- A função $v(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_1$ também é uma função utilidade representando as mesmas preferências (utilidade log).
- Com efeito $v(x_1, x_2) = ln\left(x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}\right)$, sendo que ln(.) é uma função crescente.
- Note que, se por alguma razão, a cardinalidade da utilidade é importante, esta transformação pode não ser desejável.
- Note que a função Cobb-Douglas poderia ser definida em $\mathbb{R}^2_{+}$ nos casos em que $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. Já a função utilidade log não pode ser definida nestes casos.

Função Utilidade

Definição: Considere como espaço de escolhas o espaço das cestas em $\mathbb{R}_+^N$. Considere uma função utilidade $u(x_1, ..., x_N)$ representando as preferências definidas neste espaço. A utilidade marginal do bem n é simplesmente $\frac{\partial u(x_1,...,x_N)}{\partial x_n} \equiv u_n(x_1, ..., x_N)$.

- Diz-se que a utilidade marginal de n é decrescente se $\frac{\partial^2 u(x_1,...,x_N)}{\partial^2 x_n} < 0$.
- Evidentemente este conceito refere-se a uma função utilidade particular (e não a preferências).

Taxas marginais de substituição a partir da utilidade.

- Taxa marginal de substituição é a inclinação das curcas de indiferença.
- Curvas de indiferença são definidas por $u(x_1, ..., x_N) = \bar{u}$.
- Regra de derivação de função implícita: se $g(y, z) = 0$ define implicitamente y como função de z, então $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{g_z}{g_y}$.
- No caso , ao longo de uma dada curva de indiferença, $TMS_{x_1, x_2} \equiv \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{u(x)=\bar{u}} = -\frac{u_1(x_1, ..., x_N)}{u_2(x_2, ..., x_N)}$.
- Em palavras: a Taxa Marginal de Substituição é o negativo da razão entre as utilidades marginais.

Definição: preferências quasilineares.

- Preferências são quasilineares quando são expressas pela seguinte função utilidade: $u(x_1, x_2) = x_1 + v(x_2)$
- Curvas de indiferença são paralelas.
- TMS depende apenas de x_2

Definição: Preferências homotéticas.

- Preferências são homotéticas quando são expressas por uma função utilidade homogênea de grau 1.
- $u(x) \equiv u(x_1,...,x_N)$ é homogênea de grau 1 se para qualquer $\lambda > 0$, $u(\lambda x) = u(\lambda x_1,...,\lambda x_n) = \lambda u(x_1,...,x_N)$.
- Implicação: ao longo de uma reta saída da orígem, taxas marginais de substituição são constantes.
- Definição equivalente: se $x \succeq y$ então $\lambda x \succeq \lambda y$ para qualquer $\lambda > 0$.

Derivação do formato das curvas de indiferença. Usa-se a regra da função implícita.

- Ao longo de uma curva de indiferenças temos: $u(x_1, ..., x_N) = \bar{u}$ para algum $\bar{u}$.
- Essa relação descreve implicitamente x_j como função de x_h dadas as quantidades consumidas dos demais bens .
- Na curva de indiferença temos $\left.\frac{dx_j}{d\partial x_h}\right|_{indif} = -\frac{u_h(x_1,...,x_N)}{u_j(x_1,...,x_N)} \equiv TMS(x_1, ..., x_N)$.
- Para determinarmos o formato das curvas, devemos observar o sinal de $\left.\frac{d^2 x_j}{d^2 x_h}\right|_{indif} = \frac{dTMS(x_1,...,x_h,...,x_j(x_h),...,x_N)}{dx_h} =$

$$\frac{\partial TMS(x_{1,} ..., x_h, ..., x_j(x_h), ..., x_N)}{\partial x_h} +$$

$$\frac{\partial \left(TMS(x_{1,} ..., x_h, ..., x_j(x_h), ..., x_N) \right)}{\partial x_j} \left.\frac{dx_j}{dx_h}\right|_{indif}$$

No caso de 2 bens ($N = 2$) chega-se a:

$$\left.\frac{d^2x_2}{d^2x_1}\right|_{indif} = -\frac{u_{11}}{u_2} + 2u_{21}\frac{u_1}{u_2^2} - \frac{u_1^2}{u_2^3}u_{22}.$$

Se $\left.\frac{d^2x_2}{d^2x_1}\right|_{indif} > 0$, as curvas de indiferença são convexas.
Se $\left.\frac{d^2x_2}{d^2x_1}\right|_{indif} < 0$ são côncavas. Multiplicando-se a expressão acima por u_2^3 é fácil verificar que as curvas de indiferença são convexas caso valha:

$$u_2^2 u_{11} - 2u_{21}u_1u_2 + u_1^2 u_{22} < 0.$$

Exemplo (Exercício): $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, com $\alpha \in (0,1)$.

- $\frac{dTMS}{dx_1} = -\frac{\alpha (x_2/x_1)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(x_2/x_1)^{-\alpha}} = -\frac{x_2}{x_1}\frac{\alpha}{1-\alpha} = \left.\frac{d^2 x_2}{d^2 x_1}\right|_{indif} =$ $\left[\frac{\partial\left(-\frac{x_2}{x_1}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(-\frac{x_2}{x_1}\right)}{\partial x_2}\left(-\frac{x_2}{x_1}\right)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right]\frac{\alpha}{1-\alpha} = \left[\frac{x_2}{x_1^2} + \frac{1}{x_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right]\frac{\alpha}{1-\alpha}$
- Curvas de indiferença são convexas.

Função Utilidade

Medida de curvatura de curvas de indiferença (ou seja, de quanto os bens são substitutos):

- Elasticidade de substituição: variação percentual de $\frac{x_1}{x_2}$ dado o aumento de 1% na $TMS_{1,2}$ (taxa marginal de substituição de 1 por 2).
- Formalmente a elasticidade de substituição é $\varepsilon_S \equiv \frac{\frac{d(x_1/z_2)}{x_1/x_2}}{\frac{d(u_2/u_1)}{u_2/u_1}}$.
- Pode se usar: $d\ln(x_1/x_2) = \frac{d(x_1/x_2)}{x_1/x_2}$ e $d\ln(u_2/u_1) = \frac{d(u_2/u_1)}{u_2/u_1}$ para obter-se $\varepsilon_S \equiv \frac{d\ln(x_1/x_2)}{d\ln(u_2/u_1)}$.

Exemplo de elasticidade de substituição: utilidade Cobb-Douglas$\left(u(x_1,x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}\right)$.

- $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{x_1}{x_2} \Longrightarrow \ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = \ln\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) + \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$
$\Longrightarrow \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left(\frac{u_2}{u_1}\right) - \ln\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$.
- Assim temos que: $\varepsilon_S \equiv \frac{d\ln(x_1/x_2)}{d\ln(u_2/u_1)} = 1$.
- Elasticidade de substituição da utiidade Cobb-Douglas é 1. Isso terá implicações importantes mais adiante.

Restrição Orçamentária

Requer que as cestas consumidas por um dado consumidor sejam factíveis dado seus recursos e os preços de mercado.
Considere:

- m: recursos disponíveis para consumo (renda ou riqueza).
- x_n : consumo de bem n.
- p_n : preço do bem n.
- Neste caso, normalmente, a restrição orçamentária requer que $\sum_{n=1}^{N} p_n x_n \leq m$.

Restrição Orçamentária

Conjunto orçamentário. Conjunto das cestas que satisfazem as seguintes condições:

- 1. São parte do conjunto de escolhas.
- 2. Satisfazem a restrição orçamentária.
- Conjunto orçamentário é: $\left\{(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}_+^N : \sum_{n=1}^N p_n x_n \leq m\right\}$.

Caso com 2 bens:

- Conjunto orçamentário: x_1 e x_2 não negativos tais que $p_1x_1 + p_2x_2 \leq m$.
- Pode-se definir a reta orçamentária como: x_1 e x_2 não negativos tais que $p_1x_1 + p_2x_2 = m$.
- Trata-se de uma reta de inclinação $\frac{p_1}{p_2}$, que liga os pontos $\left(0, \frac{m}{p_2}\right)$ e $\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$.

Mudanças de m e p_1 ou p_2.

- m : deslocamento paralelo da reta orçamentária.
- p_1 ou p_2: reta orçamentária se desloca ao longo de um único eixo.

Casos especiais:

- Racionamento: conjunto orçamentário é limitado para o bem racionado.
- Imposto sobre consumo excedente: reta orçamentária tem uma quebra.
- Cupons de alimentação. 2 casos: cupons com desconto versus cupons gratuítos.

Escolha

Problema de escolha do consumidor:

- Escolher, no conjunto orçamentário, uma cesta preferida a todas as demais.
- Caso preferências possam ser expressas por uma função utilidade $u(x)$ (sendo $x \equiv (x_1, ..., x_N)$), o problema é encontrar uma cesta que maximiza a utilidade no conjunto orçamentário.
- Formalmente, o problema é:

$$\max_x u(x)$$

sujeito às restrições:

$$x \in \mathbb{R}_+^N$$

e

$$\sum_{n=1}^{N} p_n x_n = m.$$

Exemplos:

- Complementares perfeitos: $u(x_1, x_2) = \min_{x_1, x_2}(ax_1, bx_2)$.
- No ótimo, necessariamente devemos ter $ax_1 = bx_2$. Isso pode ser visto graficamente, mas é óbvio que se um for maior que o outro estará havendo desperdício de recursos.
- Por outro lado, há monotonicidade fraca, então toda renda deve ser consumida (ou seja, $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$).
- Substituindo, temos:$p_1 x_1 + p_2 x_1 \frac{a}{b} = m \Longrightarrow x_1 = \frac{m}{p_1 + \frac{a}{b} p_2}$.

Exemplos:

- Substitutos perfeitos: $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. É fácil observar graficamente que há 3 soluções possíveis.
- 1-) Consome-se todos os recursos no bem 1 (se $a/b > p_1/p_2$). Neste caso, a solução é $\left((x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{m}{p_1}, 0\right)\right)$.
- 2-) Consome-se todos os recursos no bem 2 (se $a/b < p_1/p_2$). Neste caso, a solução é $\left((x_1^*, x_2^*) = \left(0, \frac{m}{p_2}\right)\right)$.
- 3-) Todos os pontos da reta orçamentária são solução do problema, se $\frac{a}{b} = \frac{p_1}{p_2}$.

Utilidade Cobb-Douglas ($u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$): Caso mais comum, usa-se o método de Lagrange.

- Vale monotonicidade, então restrição orçamentária vale com igualdade.
- Se $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$, a utilidade é zero. Se ambos forem positivos ela é positiva. Portanto as condições de canto $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ nunca são ativas. Elas podem ser ignoradas.
- Resultado geral se $\lim_{x_n \to 0} \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = \infty \forall n$(condições de Inada), então pode-se ignorar as restrições do tipo $x_n \geq 0$.
- No caso Cobb-Douglas $\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = \alpha \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha}$ e $\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = (1-\alpha)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}$. Valem as condições de Inada.

Escolha

Passos para a solução em casos em que as condições de canto são não ativas:

- Montar o Lagrangeano.
- Obter as condições de primeira ordem.
- Fazer as substituições necessárias para obter a cesta maximizadora x^*.

Escolha

No exemplo Cobb-Douglas:

- $\mathscr{L} = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} + \lambda \left(m - p_1 x_1 - p_2 x_2 \right).$
- Condições de primeira ordem :

$$x_1 : \alpha \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{1-\alpha} = \lambda p_1 \tag{1}$$

$$x_2 : (1-\alpha) \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\alpha} = \lambda p_2 \tag{2}$$

$$\lambda : m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \tag{3}$$

- Dividindo (1) por (2) e rearranjando temos $x_2 p_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha} x_1 p_1$. Substituindo em (3) obtemos $x_1 = \frac{\alpha m}{P_1}$.

Escolha

Caso geral com condição de canto não ativa:

- $\mathscr{L} = u(x_1, x_2) + \lambda\,(m - p_1x_1 - p_2x_2)$.
- Condições de primeira ordem :

$$x_1 : u_1(x_1, x_2) = \lambda p_1 \tag{4}$$

$$x_2 : u_2(x_1, x_2) = \lambda p_2 \tag{5}$$

$$\lambda : m = p_1x_1 + p_2x_2 \tag{6}$$

- Dividindo (4) por (5) temos $\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$. Intuitivamente, temos que a escolha ótima se dá no ponto em que curva de indiferença tangencia reta orçamentária.

Formalmente, no caso de substitutos perfeitos, temos um problema de Kuhn-Tucker, com o seguinte lagrangeano:

$$\mathscr{L} = ax_1 + bx_2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \mu(m - p_1 x_1 - p_2 x_2),$$

sendo λ_1 o multiplicador de Lagrange associado à restrição $x_1 \geq 0$, λ_2 o multiplicador de Lagrange associado à restrição $x_2 \geq 0$ e μ o multiplicador de Lagrange associado à restrição $m \geq p_1 x_1 - p_2 x_2$.

- No caso 1 temos $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_1 = 0$, no caso 2 temos $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 = 0$, no caso 3 temos $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
- Como há monotonicidade (forte), em todos casos a restrição orçamentária é ativa, ou seja, sempre vale $\mu > 0$.
- Note-se que, apear das condições de Kuhn-Tucker caracterizarem a solução do problema, a solução pode ser mais facilmente inferida simplesmente por um argumento gráfico. Não é necessário, em casos simples como este recorrer-se a Kuhn-Tucker.

Caso especial em que solução pode ser interior ou não: Utilidade quaselinear. Exemplo, $u(x_1,x_2) = x_1 + \ln(x_2)$. Supondo condição interior temos:

- $\mathscr{L} = x_1 + \ln(x_2) + \lambda\,(m - p_1x_1 - p_2x_2)\,.$
- Condições de primeira ordem :

$$x_1 : 1 = \lambda p_1 \tag{7}$$

$$x_2 : \frac{1}{x_2} = \lambda p_2 \tag{8}$$

$$\lambda : m = p_1x_1 + p_2x_2 \tag{9}$$

- Dividindo (7) por (8) temos $x_2 = \frac{p_1}{p_2}$. Pela restrição orçamentária temos: $x_1 = \frac{m - p_1}{p_1}$. Se $p_1 > m$, temos que a condição $x_1 \geq 0$ não é atendida. Neste caso, a condição de canto será ativa, e a solução terá $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{m}{p_2}$.
- Em geral, quando a solução usando as condições de primeira ordem entregar um consumo negativo, a condição de canto associada a este bem será ativa.

Escolha

- Com solução interior: $-TMS = \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2} \implies \frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2}$. Uma unidade monetária gasta com o bem 1 trás o mesmo benefício que uma unidade gasta com o bem 2.
- Em caso de solução de canto, com $x_1 = 0$ temos que $\frac{u_1}{p1} \leq \frac{u_2}{p_2}$. Caso contrário, seria possível aumentar o bem-estar aumentando o consumo do bem 1.
- No caso geral, temos $\frac{u_j}{u_k} = \frac{p_j}{p_k}$ sempre que os consumos dos bens j e k são ambos positivos.
- Com solução de canto temos, na solução de Kuhn-Tucker $u_j + \mu_j = \lambda p_j$ para algum j, sendo μ_j o multiplicador de Lagrange associado à restrição $x_j \geq 0$. Isso gerará:

$$\frac{u_j}{u_k} + \frac{\mu_j}{u_k} = \frac{p_j}{p_k} \implies \frac{u_j}{u_k} \leq \frac{p_j}{p_k}.$$

Intuição para a solução Cobb-Douglas:

- Uma mudança no preço relativo induz (pelo problema de otimização) uma mudança idêntca na TMS (com sinal negativo).
- Isso requer uma mudança da razão entre os consumos x_1 e x_2.
- Como a elasticidade de substituição é 1, $\frac{x_2}{x_1}$ crescerá na mesma proporção que $\frac{u_1}{u_2}$ (e portanto que $\frac{p_1}{p_2}$).
- Intuitivamente, dado o aumento do preço relativo de um bem, a quantiade (relativa) consumida diminuirá na mesma proporção. O gasto total com o bem, como fração da renda, se manterá inalterado.

Escolha

Formalmente, partindo de uma situação inicial com p e x, e definindo os preços e quantidades após a mudança como p' e x', temos que :

- Se $\frac{p_1'}{p_2'} = \kappa \frac{p_1}{p_2}$, então $\frac{x_2'}{x_1'} = \kappa \frac{x_2}{x_1} \Longrightarrow \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{1}{\kappa} \frac{x_1}{x_2}$.
- Assim temos que $\frac{p_1' x_1'}{p_2' x_2'} = \kappa \frac{p_1}{p_2} \frac{1}{\kappa} \frac{x_1}{x_2} = \frac{p_1 x_1}{p_2 x_2}$. Participação dos gastos com cada bem se manterá constante.
- Se elasticidade de substituição for menor que 1, aumento de preço relativo gera aumento de gasto com o bem.
- Se a elasticidade de substituição for maior que 1 aumento do preço relativo gera diminuição de gasto com o bem.

Escolha

Outro exemplo CES (constant elasticity of substitution):

$$u(x_1, x_2) = [a(x_1)^r + b(x_2)^r]^{\frac{1}{r}}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{a}{b}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-r} \implies$$

$$\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{1}{1-r}\ln\left(\frac{u_1}{u_2}\right) - \frac{1}{1-r}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

- Elasticidade de substituição é $\frac{1}{1-r}$.

Digressão: Teorema do envelope.
Considere o problema:

$$v(y) = \max_x g(x,y)$$

sujeito a:

$$h(x,y) = 0.$$

Neste caso, x é uma variável de escolha e y é tomado como dado (muitas vezes y é chamado de parâmetro).

- Neste caso, o lagrangeano é $\mathscr{L}(x,y) = g(x,y) + \lambda h(x,y)$. Suponha que o valor de x que resolve o problema seja x^*.
- O teorema do envelope determina que $v'(y) \equiv \frac{dv(y)}{dy} = \frac{\partial \mathscr{L}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x^*,y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial h(x^*,y)}{\partial y}$.

Escolha

Aplicação para o problema do consumidor:

$$v(p,m) = \max_{x} u(x)$$

sujeito a:

$$\sum_{n=1}^{N} p_n x_n = m,$$

sendo $x \equiv (x_1, ..., x_N)$ e $p = (p_1, ..., p_N)$.

- Pelo teorema do envelope temos que:

$$\frac{dv(p,m)}{dm} = \lambda; \frac{dv(p,m)}{dp_n} = -\lambda x_n^*.$$

Escolha

v(p,m) é chamada de função utilidade indireta.

- Trata-se de uma função crescente de m e decrescente de p_n.
- $\frac{dv(p,m)}{dm} = \lambda$ apresenta uma interpretação para o multiplicador. Pode-se interpretá-lo como a "utilidade marginal da renda". O multiplicador λconverte unidades de renda em unidades de utilidade.
- Isso permite interpretar $u_n = \lambda p_n$. O benefício marginal de uma unidade a mais é igual ao seu "custo marginal" (ambos medidos em unidades de utilidade).
- Interpretação: $\frac{dv(p,m)}{dp_n} = -\lambda x_n^*$ a perda de utilidade de um aumento do preço do bem n em uma unidade, é proporcional ao número de unidades que se consome deste bem. Na verdade, localmente, a perda é igual à que se teria "perdendo-se" x_n^* unidades monetárias.

Importante notarmos que:

- Para chegar-se à utilidade indireta, basta resolver o problema e substituir as escolhas ótimas (demandas) na função utilidade.
- Utilidade indireta não depende apenas de preferências, mas da própria função utilidade. Ou seja, cardinalidade é relevante.
- Ao resolvermos o problema do consumidor, por vezes pode ser conveniente adotarmos uma transformação monótona. A solução x será a mesma, mas a utilidade indireta será afetada por esta trasformação.
- Caso parta-se de $u(x)$ e, por conveniência, use-se outa função utilidade w(x)=g(u(x)), ao resolver-se a o problema do consumidor chegará-se a $\tilde{v}(p,m)$. Para chegar a uma utilidade indireta $v(p,m)$que refira-se a $u(x)$, pode-se usar $v(p,m) = g^{-1}(\tilde{v}(p,m))$, sendo que g^{-1} é a função inversa de g.

Escolha

Exemplo: Cobb-Douglas, $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$.

- Já vimos que a solução é $x_1 = \alpha m/p_1$ e $x_2 = (1-\alpha)m/p_2$.
- Substituindo-se na função utilidade temos $v(p,m) = (\alpha m/p_1)^{\alpha} \left((1-\alpha)m/p_2\right)^{1-\alpha}$.
- Se tivessemos feito a transformação ln, chegaríamos a:$\tilde{v}(p,m) = \alpha \ln(\alpha m/p_1) + (1-\alpha)\ln((1-\alpha)m/p_2)$.
- Note-se que $v(p,m) = e^{\tilde{v}(p,m)}$.

Escolha

Dualidade: quando resolve-se o problema de maximização de utilidade dada a renda, implicitamente resolve-se um problema minimização de dispêndio dada utilidade.

- Isto pode facilmente ser observado graficamente no caso de 2 bens.
- Problema de minimização de dispêndio pode ser formulado como:

$$e(p, \bar{u}) = \min_{x} x_1 p_1 + \ldots + x_N p_N,$$

sujeito

$$u(x_1, x_2) \geq \bar{u},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

- Normalmente (com monotonicidade), $u(x_1, x_2) = \bar{u}$. Em muitos casos, as restrições $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ não são ativas.

Escolha

$e(p,\bar{u})$ é chamada de função dispêndio. No caso de solução interior temos o Lagrangeano: $\mathscr{L} = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(\bar{u} - u(x_1,x_2))$.
Propriedades da função dispêncio:

- $\frac{de(p,\bar{u})}{dp_n} = x_n^*$ (pelo teorema do envelope). Dispêndio cresce com preços (a não ser no caso de consumo zero).
- $\frac{de(p,\bar{u})}{d\bar{u}} = \lambda$ (pelo teorema do envelope). Note que pelas C.P.O's temos: $p_1 = \lambda u_1(x_1,x_2)$ e $p_2 = \lambda u_2(x_1,x_2)$, o que implica que $\lambda > 0$. Assim temos que dispêndio cresce com $\bar{u}$. Para aumentar a utilidade é necessário aumentar o dispêndio.
- $\frac{d^2e(p,\bar{u})}{d^2p_n} \leq 0$. Isso pode ser visto graficamente. Se o consumo fosse mantido constante o dispendio aumentaria em x_n^*. Caso mude-se a escolha de x^* em função de mudanças de p seria para diminuir dispêdio.
- Homogeneidade: $e(\lambda p,\bar{u}) = \lambda e(p,\bar{u})$. Escolha ótima de x não responde a mudanças em λ.

Aplicação: índice de custo de vida. Função dispêndio.

- Índice de preços Laspeyres (com pesos baseados no consumo inicial) são localmente, para pequenas variações de preços, acurados. Isso pois $\frac{de(p,\bar{u})}{dp_n} = x_n^*$.
- No caso geral, com variações maiores de preço, Laspeyres superstima custo de vida. Não leva em conta substituições.

Escolha

Exemplo: Cobb-Douglas.

- CPOs: $(x_1): p_1 = \lambda\alpha\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha}$; $(x_2): p_2 = \lambda(1-\alpha)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}$; (λ): $x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} = \bar{u} \Longrightarrow x_2 = \bar{u}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha}$.
- Dividindo (x_1) por (x_2) temos $\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Longrightarrow$ $p_1x_1 = p_2x_2\frac{\alpha}{1-\alpha}$. Além disso $x_2 = \bar{u}\left(\frac{p_1}{p_2}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}$
- O gasto (função minimizada) é $p_1x_1 + p_2x_2 = \frac{p_2x_2}{1-\alpha}$.
- Substituindo x_2 encontrado acima, o gasto é $\frac{p_2}{1-\alpha}\bar{u}\left(\frac{p_1}{p_2}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\bar{u}p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha} = \bar{u}\left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$, sendo α o share de consumo.

Escolha

- Alguns índices de preços, (ex. IPC Fipe) seguem esta fórmula.
- Caso elasticidade de substituição seja maior que 1 (e portanto shares caem com preço) esta formula superestima aumento de nível de preço.
- Caso elasticidade de substituição seja menor que 1 (e portanto shares aumentam com preço) esta formula subestima aumento de nível de preço.

Escolha

É fácil verificar (por exemplo, graficamente) que valem as seguintes igualdades:

- $e(p, v(p, m)) = m$.
- $v(p, e(p, u)) = u$.
- Estas igualdades podem ser utilizadas para resolver o problema de minimização de custo quando se sabe a solução do de utilidade e vice-versa

Exemplo:

- Vimos que $v(p,m) = (\alpha m/p_1)^{\alpha}((1-\alpha)m/p_2)^{1-\alpha}$.
- Usando $v(p,e(p,u)) = u$, temos $u = (\alpha e(p,u)/p_1)^{\alpha}((1-\alpha)e(p,u)/p_2)^{1-\alpha} \Longrightarrow e(p,u) = u\left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$

Comentário: Princípio Lump-Sum.

- Aumento de renda é sempre mais eficiente que subsídio.
- Alocação resultante de subsídio sempre é factível com uma transferência de montante igual ao valor total do subsídio.
- Argumento pode ser feito graficamente.

Demandas Marshallianas. São os componentes do vetor:

$$x(p,m) = \arg\max_{x} u(x)$$

sujeito às restrições:

$$x \in \mathbb{R}_{+}^{N}$$

e

$$\sum_{n=1}^{N} p_n x_n = m.$$

- O vetor $x(p,m)$ é composto pelas demandas $x_1(p_1,...,p_N,m),...,x_N(p_1,...,p_N,m)$.
- Claramente demandas satisfazem a seguinte propriedade de homogeneidade: $x_n(\lambda p_1,...,\lambda p_N,\lambda m) = x_n(p_1,...,p_N,m)$,.

Mudanças de renda (3 casos):

- Bens normais: $\frac{dx_n(p_1,\ldots,p_N,m)}{dm} > 0$.
- Bens inferiores: $\frac{dx_n(p_1,\ldots,p_N,m)}{dm} < 0$.
- Bens neutros à renda: $\frac{dx_n(p_1,\ldots,p_N,m)}{dm} = 0$.

Mudanças de preço. Deve-se considerar 2 efeitos:

- Efeito renda (depende de o bem ser normal ou inferior)
- Efeito substituição.
- Efeito total é indeterminado.
- Paradoxo de Giffen. Aumentos no preço de um bem podem levar a aumento do seu consumo se este bem for inferior. Efeito renda compensa efeito substituição.

Curva de demanda (Marshalliana) individual:

- Expressa variações na demanda marshalliana de um bem em resposta à variação do seu preço.
- Mudanças nos demais condicionantes da demanda geram delocamentos na curva de demanda marshalliana.

Demandas, Efeito Renda e Substituição

Demandas Hiscksianas (ou demandas compensadas) são os elementos do seguinte vetor:

$$x^c(p, \bar{u}) = \arg\min_x x_1 p_1 + \ldots + x_N p_N,$$

sujeito

$$u(x_1, x_2) \geq \bar{u},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

- O vetor $x^c(p, u)$ é composto pelas demandas $x_1^c(p_1, \ldots, p_N, u), \ldots, x_N^c(p_1, \ldots, p_N, u)$.
- Demanda compensada por um bem sempre diminui com um aumento de seu preço.

Curva de demanda compensada individual:

- Expressa variações na demanda compensada de um bem em resposta à variação do seu preço.
- Curva de demanda compensada é sempre negativamente inclinada.
- Mudanças nos demais condicionantes da demanda geram delocamentos na curva de demanda compensada.

Relação entre duas curvas:

- Se os bens são normais, curva de demanda compensada é mais íngreme que a de demanda marshalliana.
- Se os bens são substitutos, curva de demanda compensada é menos íngreme que a de demanda marshaliana.
- Se os bens são neutros à renda as duas curvas coincidem.

Relações entre demandas Marshaliana e Hicksiana:

- $x_1^c(p_1, p_2, U) = x_1(p_1, p_2, e(p_1, p2, u))$.
- $x_1(p_1, p_2, m) = x_1^c(p_1, p_2, v(p_1, p2, m))$.

Efeitos renda e substituição: tratamento formal.
sabemos que:

$$x_1^c(p_1, p_2, U) = x_1(p_1, p_2, e(p_1, p2, u)).$$

Derivando em relação a p_1 temos que:

$$\frac{\partial x_1^c}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1}{\partial m}\frac{\partial e}{\partial p_1}.$$

- Rearranjando e usando o fato de que $\frac{\partial e}{\partial p_1} = x_1^c(p_1, p_2, u)$ temos:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1^c}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1}{\partial m}x_1^c.$$

- O primeiro termo do lado direito é o chamado efeito substituição, e o segundo é o efeito renda.

Mas $\frac{\partial x_1^c}{\partial p_1} \leq 0$. Trata-se da lei de demanda compensada. Definindo $px = \sum_{n=1}^{N} p_n x_n$ (produto interno) temos:

$$[x^c(p_1, p_2, u) - x^c(\bar{p}_1, p_2, u)]\,[p - \bar{p}] =$$

$$[px^c(p_1, p_2, u) - px^c(\bar{p}_1, p_2, u) + \bar{p}x^c(\bar{p}_1, p_2, u) - \bar{p}x^c(p_1, p_2, u)],$$

pois, como x_1^c é escolhido para minimizar dispêndio, temos que:

$$px^c(p_1, p_2, u) - px^c(\bar{p}_1, p_2, u) \leq 0$$

e

$$\bar{p}x^c(\bar{p}_1, p_2, u) - \bar{p}x^c(p_1, p_2, u) \leq 0.$$

Para o caso em que $\bar{p}_2 = p_2$ isso implica em:
$[x_1^c(p_1, p_2, u) - x_1^c(\bar{p}_1, p_2, u)]\,[p_1 - \bar{p}_1] \leq 0.$

No caso geral temos:

$$x_n^c(p_1, ..., p_N, U) = x_n(p_1, ..., p_N, e(p_1, ..., p_N, U)).$$

Derivando em relação a p_1 temos que:

$$\frac{\partial x_n^c}{\partial p_k} = \frac{\partial x_n}{\partial p_k} + \frac{\partial x_n}{\partial m}\frac{\partial e}{\partial p_k} =$$

$$= \frac{\partial x_n}{\partial p_k} + \frac{\partial x_n}{\partial m}x_k^c = \frac{\partial x_n}{\partial p_k} + \frac{\partial x_n}{\partial m}x_k$$

Isso permite que se obtenha as derivadas das demandas compensadas a partit de observáveis

Por outro lado, sabemos (teorema do envelope) que:

$$\frac{\partial e}{\partial p_n} = x_n^c(p, u).$$

Isso implica que:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial p_k \partial p_n} = \frac{\partial x_n^c}{\partial p_k}.$$

Portanto, a matrizNXN com coluna j e linha k dada por $\frac{\partial x_n^c}{\partial p_k}$ é simétrica (pois é uma derivada segunda) e negativa semidefinida (pois a função $e(p, u)$ é côncava em p.

Elasticidades: importantes pois independem das unidades de medida.

- Elasticidade preço da demanda por n: $e_{x_n,p_n} = \frac{\triangle x_n / x_n}{\triangle p_n / p_n} = \frac{\triangle x_n}{\triangle p_n}\frac{p_n}{x_n} = \frac{\partial x_n}{\partial p_n}\frac{p_n}{x_n}$.
- Elasticidade renda da demanda por n: $e_{x_n,m} = \frac{\triangle x_n / x_n}{\triangle m / m} = \frac{\triangle x_n}{\triangle m}\frac{m}{x_n} = \frac{\partial x_n}{m}\frac{m}{x_n}$.
- Elasticidade cruzada demanda por n pelo preço de k: $e_{x_n,p_k} = \frac{\triangle x_n / x_n}{\triangle p_k / p_k} = \frac{\triangle x_n}{\triangle p_k}\frac{p_k}{x_n} = \frac{\partial x_n}{\partial p_k}\frac{p_k}{x_n}$.

Relação entre elasticidade da demanda e resposta de share do consumo a mudanças de preços.

$$\frac{\partial (p_n x_n)}{\partial p_n} = p_n \frac{\partial x_n}{\partial p_n} + x_n = x_n(e_{x_n, p_n} + 1).$$

Resultado depende da elasticidade-preço ser maior ou menor que 1 em termos absolutos.

Homogeneidade da função demanda gera:

$$0 = p_{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + p_{x_2}\frac{\partial x_1}{\partial p_2} + m\frac{\partial x_1}{\partial m} \implies$$

$$e_{x_1,p_1} + e_{x_1,p_2} + e_{x_1,m} = 0$$

Restrição orçamentária gera:

$$1 = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial m} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial m} \Longrightarrow$$

$$1 = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial m} \frac{m x_1}{m x_1} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial m} \frac{m x_2}{m x_2} \Longrightarrow$$

$$s_1 e_{x_1,m} + s_2 e_{x_2,m} = 1,$$

sendo s_n a participação do bem n na renda. Isso implica que não é possível todos os bens terem elasticidades-renda maior ou menor que 1.

Outro resultado: Diferenciando a restrição orçamentária em relação a p_1 temos:

$$0 = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + x_1 + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \Longrightarrow$$

$$0 = \frac{x_1}{m} \frac{p_1}{x_1} \frac{\partial x_1}{\partial p_1} p_1 + \frac{x_1}{m} p_1 + \frac{x_2}{m} \frac{p_2}{x_2} \frac{\partial x_2}{\partial p_1} p_1 \Longrightarrow$$

$$s_1 e_{x_1,p_1} + s_2 e_{x_2,p_1} = -s_1 .$$

Efeito das mudanças de um preço são restritos pela restrição orçamentária.

Como avaliar a mudança de bem-estar se o preço do bem 1 muda de p_1 para $\bar{p}_1$?

- A utilidade mudaria de U para $\bar{U}$.
- Uma medida da perda de bem estar é o quanto deve-se gastar a mais após a mudança para conservar o nível de bem-estar original.
- Isto é igual a $e(\bar{p}_1, p_2, U) - e(p_1, p_2, U)$, e é chamado de Variação Compensada.
- Sabemos que $x_1^c(p_1, p_2, U) = \frac{\partial e(p_1, p_2, U)}{\partial p_1}$ $\Longrightarrow e(\bar{p}_1, p_2, U) - e(p_1, p_2, U) = \int_{p_1}^{\bar{p}_1} x_1^c(p, p_2, U)dp$.

A área sobre a demanda compensada constitui uma boa medida da perda de bem-estar. Na prática, é muito comum observarmos apenas a demanda marshaliana. A áreas sob a demanda marshaliana é uma boa aproximação da variação de bem-estar quando:

- Demanda não é muito sensível à renda.
- Variações de preço não são muito grandes.
- Esta aproximação, dada por esta área sob a demanda marshaliana é chamada de excedente do consumidor.

Bens substitutos e complementares:

- Substitutos brutos: $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0$.
- Complementares brutos: $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < 0$.
- É possível que $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0$ mas $\frac{\partial x_j}{\partial p_i} \leq 0$. Resultado paradoxal deve-se a efeitos renda.
- Isto ocorre, por exemplo, quando $u(x_1, x_2) = lnx_1 + x_2$.

Definição mais consistente usando demanda compensada:

- Substitutos líquidos: $\frac{\partial x_i^c}{\partial p_j} > 0$.
- Complementares líquidos: $\frac{\partial x_i^c}{\partial p_j} < 0$.
- Neste caso vale $\frac{\partial x_i^c}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j^c}{\partial p_i}$. Isso pode ser visto pelo faro de que $x_i^c(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}$ (Lema de Shephard) e portanto $\frac{\partial x_i^c(p,u)}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_i \partial p_j}$.

Já vimos que $x_n^c(p_1,...,p_N,u) = x_n^c(\lambda p_1,...,\lambda p_N,u)$. Derivando em relação a λ avaliado no ponto $\lambda = 1$ temos:

$$p_1 \frac{\partial x_1^c}{\partial p_1} + ... + p_N \frac{\partial x_1^c}{\partial p_N} = 0.$$

Isso implica que um bem deve ser substituto líquido de ao menos um outro bem.

- Implicação: no caso de 2 bens eles sempre serão substitutos líquidos um do outro.

Modelo hedônico. Bens são definidos por suas características. Por exemplo a_1 e a_2, podem ser características produzidas pelos bens x, y e z, de acordo com:

$$a_1 = a_x^1 x + a_y^1 y + a_z^1 z$$

$$a_2 = a_x^2 x + a_y^2 y + a_z^2 z$$

Conjunto orçamentário é dado pelas combinações das cestas que se obtém gastando todos os recursos com x, y e z.

Bens compostos:
Por vezes é conveniente tratar um conjunto de bens (por exemplo: $x_2, ..., x_N$) como se fossem um único, um bem composto.

- Define-se um dos bens como se fosse o gasto com todos os bens que geram o bem composto. Assim, o bem composto y é definido como $y = x_2 p_2 + ... + p_N x_N$.
- Sob a hipótese que os preços dos componentes do bem composto variam proporcionalmente (hipótese muito forte) pode-se tratar y como se fosse um único bem.
- Assim teremos os preços dos bens 2 a N sempre iguais a $tp_1, ..., tp_N$, sendo p_1 a p_N constantes.
- Neste este caso pode-se trabalhar com uma utilidade $u(x_1, y)$ e uma restrição orçamentária $m = p_1 x_1 + ty$.

Conjunto de bens, por exemplo, x, y e z são usados para produzir algo domesticamente, por exemplo os bens a_1 e a_2.

- Há uma "função de produção" para a_1 e a_2, $a_1 = f_1(x, y, z)$ e $a_2 = f_2(x, y, z)$.
- A utilidade é formulada como $u(a_1, a_2)$.
- A restrição orçamentária é $p_x x + p_y y + p_z z = m$.
- Solução gera preço-sombra entre bens domésticos.

Escolha Sob Incerteza

Muitas vezes, agentes fazem escolhas sujeitas a riscos. A questão fundamental de escolha sob incerteza é como são feitas as escolhas sobre diferentes alternativas arriscadas.
Grosso modos incerteza é modelada de 3 maneiras distintas:

- O conjunto de eventos possíveis é desconhecido (Knight).
- O conjunto dos eventos é conhecido mas suas probabilidades são desconhecidas (Savage).
- O conjunto de eventos e suas probabilidades são conhecidos (abordagem clássica, Von-Neumann e Morgenstern)

Preliminares:

- Variáveis aleatórias: Expressa numericamente as realizações possíveis de um evento aleatório. Se x é uma variaável aleatória, ela pode assumir diversos valores $x_1, x_2, ..., x_I$ (suporte da distrinbuição).
- Função de densidade de probabilidade, $f(x_i)$: expressa as probabilidades de cada um dos possíveis eventos. No contexto de ecolha sob incerteza, é muitas vezes chamada de loteria.
- Valor esperado de uma variável aleatória: O valor de uma varável aleatória que deve ocorrer em "média". No caso de suporte discreto $E(x) = \sum_{i=1}^{I} x_i f(x_i)$. No caso de suporte contínuo $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$.
- Variância: Medida da dispersão da variável aleatória. No caso discreto $Var(x) \equiv \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{I} f(x_i) [x_i - E(x)]^2$. No caso contínuo, $Var(x) \equiv \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(x)]^2 f(x) dx$
- Desvio padrão: é a raiz quadrada da variância: $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$.

- Loteria justa: loteria cuja esperança é igual a zero.
- Questão: indivíduos escolhem estão sempre dispostos a jogar uma loteria de valor positivo?
- Paradoxo de St. Petersburg: Suponha $x_i = 2^i$ e $f(x_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i$. $E(x) = 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4} + 8\frac{1}{8} + ... = 1 + 1 + 1 + ... = \infty$. No entanto, poucas pessoas aceitariam pagar um valor muito alto por isso.
- Solução proposta: utilidade esperada.

Utilidade na forma de Utilidade Esperada: Suponha que x seja uma variável aleatória que assume valores $x_1, x_2, ..., x_I$ (ou em um contínuo), com probabilidades dadas pela densidade $f(x)$.

- Uma utilidade sobre a loteria tem a forma de utilidade esperada se:

$$U(f(x)) = E(u(x)|f(x)) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, u(x_i)\,.$$

para alguma função $u(x)$(no caso contínuo teríamos $U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) u(x) dx$).

- Esta formula permite comparar diferentes distribuições de probabilidade para a variável x.
- Note-se que $u(x)$ (chamada de índice de Utilidade Von Newman - Morgenstern) , pode ser interpretado como a utilidade de se ter o evento x com certeza.

Teorema da Utilidade esperada (Von-Newmann e Morgenstern).

- Hipótese Fundamental (Axioma de Independência): Dadas três loterias, L, L' e L'', se $L' \succeq L''$ e $p \in (0,1)$, então uma loteria (composta) que jogue L com probabilidade p e L' com probabilidade $(1-p)$ é preferível preferível a uma outra loteria que jogue L com probabilidade p e L'' com probabilidade $(1-p)$.
- O teorema determina que dada qualquer preferência que satisfaça o axioma de independência e mais algumas (poucas) hipóteses técnicas, pode ser expresso na forma de utilidade esperada.

Desigualdade de Jensen. Se $u(x)$ é estritamente côncava, $E(u(x)) < u(E(x))$. Neste caso, indivíduos preferem receber um certo valor $\bar{x}$ com certeza do que uma loteria que em média gera $\bar{x}$.

- Neste caso, aversão a risco está associado à concavidade de $u(x)$.
- $u(x)$ côncava: há aversão a risco.
- $u(x)$ convexa: há amor ao risco.
- $u(x)$ linear: há neutralidade a risco.

- Note-se que não é qualquer utilidade sobre loterias que expressa as preferências que tem o formato de Utilidade Esperada. O teorema afirma que ao menos uma satisfazem o teorema.
- Dado um índice de utilidade Von Newman - Morgenstern $u(x)$, não é qualquer transformação crescente de $u(x)$ que gera preferências idênticas no formato de utilidade esperada.
- Transformações no índice chamadas afins, do tipo $\tilde{u}(x) = \alpha + \beta u(x)$, com $\beta > 0$ mantém o nesmo ordenamento de preferências e o formato de utilidade esperada.

Exemplo: seguro.
Suponha que haja uma probabilidade $\frac{5}{8}$ de chuva e $\frac{3}{8}$ de tempo bom. Sob chuva, a produção de um agricultor é 1, e sob bom tempo é 9. O índice de utilidade Von Newman-Morgenstern deste agricultor é $u(x) = x^{0.5}$.

- Uma seguradora se oferece a, por um preço p, ficar com o risco e oferecer ao indivíduo o valor esperado do produto (no caso $E(x) = \frac{5}{8}1 + \frac{3}{8}9 = 4$).
- A utilidade sem o seguro é: $U(u(x)) = \frac{5}{8}u(1) + \frac{3}{8}u(9) = \frac{5}{8}1 + \frac{3}{8}3 = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$.
- A utilidade de se comprar o seguro é $U(4-p)$. O agricultor aceita pagar qualquer preço até $(4-p)^{0.5} = \frac{7}{4} \Longrightarrow p = 4 - \frac{49}{16} = \frac{15}{16}$.
- Este preço máximo é chamado de prêmio de risco.

Medidas de aversão a risco:

- Devem ser medidas locais ao longo da função $u(x)$, ou seja, diferentes para valores diferentes de x.
- Devem refletir o prêmio de risco que se está disposto a pagar (para se livrar da incerteza) dada uma loteria local.

Considere como única fonte de incerteza uma variável aleatória com suporte próximo de zero, ε , sendo $E(\varepsilon) = 0$, $Var(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2$. Seja x um valor fixo de consumo, e p um prêmio de risco associado a esta loteria. Então devemos ter:

$$u(x-p) = E\left[u(x+\varepsilon)\right].$$

- Usando uma expansão de Taylor de segunda ordem temos:

$$u(x) - u'(x)p + u''(x)\frac{p^2}{2} = E\left[u(x) + u'(x)\varepsilon + u''(x)\frac{\varepsilon^2}{2} + resto\right].$$

$$\Longrightarrow u'(x)p \simeq u''(x)\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} \Longrightarrow p \simeq -\frac{u''(x)}{u'(x)}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}.$$

- O termo $RA(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$, chamado de coeficiente de aversão absoluta a risco, é uma medida do grau de aversão a risco dos indivíduos.

Índice de utilidade VNM em que $RA(x)$é constante (não depende de x):

$$u(x) = -e^{-\gamma x}$$

- $u'(x) = \gamma e^{-\gamma x}$.
- $u''(x) = -\gamma^2 e^{-\gamma x}$.
- $-\frac{u''(x)}{u'(x)} = \gamma$.

Questão: é razoável supor que coeficiente de aversão absoluta a risco seja constante? Resposta: não, normalmente aversão absoluta a risco decresce com a renda. Outra medida de aversão a risco:

- Outra medida de aversão a risco: $-x\frac{u''(x)}{u'(x)}$
- Expanção de Taylor de segunda ordem sobre:$u(x(1-p)) = E(u(x(1+\varepsilon)))$.
- Resulta em $p \simeq -\frac{xu''(x)}{u'(x)}\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{2}$.
- O termo $RR(x) - \frac{xu''(x)}{u'(x)}$ é o chamado coeficiente de aversão relativa a risco.
- Note que se $RR(x)$ é constante, $RA(x)$ decresce com x.

Índice de utilidade VNM em que $RR(x)$é constante (não depende de x):

$$u(x) = \frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}.$$

- $u'(x) = x^{-\rho}$.
- $u''(x) = -\rho x^{-(\rho+1)}$.
- $-x\frac{u''(x)}{u'(x)} = \rho$.

Outra opção seria o agente comprar um ativo que paga 1 unidade de consumo em caso de chuva. Assim, comprando q unidades, no caso de chuva o emissor do ativo paga q ao agricultor. Para comprar q unidades do bem de consumo, deve-se desembolsar um valor pq (ou seja, p e o preço do ativo).
Assim o consumo do agricultor será:

- $1+q(1-p)$ no caso de chuva.
- $9-pq$ no caso de bom tempo.
- O agente resoverá

$$\max_q \Pr(sol)u(9-pq)+\Pr(chuva)u(1+q(1-p)),$$

sendo que $\Pr(sol)=1-\Pr(chuva)$.

Condição de primeira ordem sobre o problema acima gerará:

$$(1-\Pr(chuva))\,pu'(9-pq)=\Pr(chuva)(1-p)u'(1+q(1-p))$$

- Se $u''(x)<0$ e $p=\Pr(chuva)$ temos que $u'(9-pq)=u'(1+q(1-p))\Longrightarrow 9-pq=1+q(1-p)\Longrightarrow q=8$. O consumo será constante.
- O preço $p=\Pr(chuva)$ é o chamado "preço justo" do ativo. O ganho do vendedor (p) é igual ao seu custo esperado $(1.\Pr(chuva))$.
- Se $p>\Pr(chuva)$, então $u'(9-pq)<u'(1+q(1-p))\Longrightarrow$ consumo sob chuva é menor que consumo sob bom tempo (Seguro imperfeito).
- Se $p<\Pr(chuva)$, então $u'(9-pq)>u'(1+q(1-p))\Longrightarrow$ consumo sob chuva é maior que consumo sob bom tempo (Sobre seguro).

Bens contingentes: Agentes podem comprar uma unidade de consumo sob sol ou chuva. O consumo sob sol é denotado x_s e sob chuva x_c. Antes de o clima se manifestar, negocia-se direitos de consumo sob sol e chuva. Consumo sob sol é vendido a um preço p_s e consumo sob chuva a p_c. Um consumidor tem uma renda m e sua utilidade Von Newman-Morgenstern é $u(x)$.

- O problema do consumidor é:

$$\max_{x_s, x_c} \Pr(chuva)u(x_c) + (1 - \Pr(chuva))u(x_s)$$

sujeito a

$$p_s x_s + p_c x_x = m.$$

- As condições de primeira ordem são $Pr(chuva)u'(x_c) = \lambda p_c$ e $(1 - Pr(chuva))u'(x_s) = \lambda p_s$.
- Se $Pr(chuva) = p_c$ e $(1 - Pr(chuva)) = p_s$ (os preços são justos) temos que$u'(x_c) = u'(x_s) \Longrightarrow x_c = x_s$. Isso pode ser visto graficamente.

Escolha de portfolio: Suponha que a renda deva ser dividida entre um ativo arriscado e um ativo sem risco. O retorno do ativo sem risco é uma constante, r^f. O do ativo com risco é uma variável aleatória r^r. Uma fração α da renda m será investida no ativo arriscado, e uma fração $(1-\alpha)$ no ativo sem risco.

- A utilidade do indivíduo é $U(\alpha) = E\left[u\left(m(1+r^f)(1-\alpha)+m(1+r^r)\alpha\right)\right]$.
- A derivada da utilidade em relação a α é: $U'(\alpha) = E\left[\left(m(1+r^r)-m(1+r^f)\right)u'\left(m(1+r^f)(1-\alpha)+m(1+r^r)\alpha\right)\right]$.
- Em torno de $\alpha = 0$ temos: $U'(0) = m\left(E(r^r)-r^f\right)u'\left(m(1+r^f)\right)$.
- Há um valor positivo investido no ativo arriscado se e somente se $E(r^r) > r^f$.
- No entanto, não necessariamente todo o gasto serrá no ativo arriscado.

Valor da informação: Partindo-se do exemplo anterior. Suponhamos que haja 2 estados da natureza, um em que $r^r = \bar{r}$, sendo $r^f < \bar{r}$ e outro em que $r^r = \underline{r}$, sendo $\underline{r} < r^f$. Caso se obtenha (possivelmente a um custo) informações sobre o estado da natureza, isso levará à escolha do ativo com risco no primeiro caso e sem risco no segundo caso. Com certeza haverá um ganho de bem-estar.

- Isso também vale quando não se observa o estado, mas um "sinal" sinal sobre ele. Por exemplo, podemos ter que a probabilidade de valor alto de r^r é π^1 caso a metereologia preveja sol e π^2 caso ela preveja chuva, sendo $\pi^1 < \pi^2$. Caso não se observe previsões metereológica, sabe-se que a probabilidade de previsão de sol é p e a de chuva é $(1-p)$.
- Podemos definir

$$U_1(\alpha) = u\left(m(1+r^f)(1-\alpha)+m(1+\bar{r})\alpha\right)\pi_1 + u\left(m(1+r^f)(1-\alpha)+m(1+\underline{r})\alpha\right)(1-\pi_1).$$
$$U_2(\alpha) = u\left(m(1+r^f)(1-\alpha)+m(1+\bar{r})\alpha\right)\pi_2 + u\left(m(1+r^f)(1-\alpha)+m(1+\underline{r})\alpha\right)(1-\pi_2).$$

- A utilidade observando as a metereologia será $U_{info} = \max_{\alpha_1,\alpha_2} pU_1(\alpha_1)+(1-p)U_2(\alpha_2)$ e a sem a observação será $U_{NOinfo} = \max_\alpha pU_1(\alpha)+(1-p)U_2(\alpha)$.
- Certamente é preferível ter informação.

Discussão: Choques agregados versus choques idiossinseguro e lei dos grandes números.

- Na ausência de choques agregados, problemas informacionais e com competição perfeita, há seguro perfeito.
- É impossível proteger-se contra choques agregados.

Escolha Intertemporal

Consumo em múltiplos períodos pode ser tratado como consumo de múltiplos bens. Suponha que um indivíduo consuma ao longo de T períodos. O consumo no período t é denotado por c_t.

- Preferências: tipicamente são expressas por uma função utilidade do tipo:

$$U(c_1,...,c_T) = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t).$$

- O parâmetro β normalmente é chamado de taxa de desconto intertemporal. Normalmente supõe-se que $\beta \in (0,1)$.
- Em geral supõe-se que $u'(c) > 0$ e $u''(c) < 0$. Isso garante que curvas de indiferença entre consumos em instantes diferentes são convexas.
- Há outras formulações possíveis, mas esta formulação usualmente é utilizada por conveniência operacional.

- Normalmente supõe-se que indivíduos dispõem de uma dotação a cada período do tempo. A dotação no período t é denotada por y_t.
- Usualmente supõe-se que indivíduo tem acesso a um mercado de crédito. Se o indivíduo toma emprestado (empresta) um montante B em um instante t, ele paga (recebe) $(1+r)B$ no instante $t+1$. Caso ele deva pagar, o pagamento pode ser feito com a contração de uma nova dívida.
- É comum usar a notação B_t para denotar a dívida (poupança) existente ao se iniciar o período t.
- Temos então que $B_{t+1} = (1+r)[c_t - y_t + B_t]$
- No último período a dívida deve ser paga: $B_T + c_T - y_T = 0$. No primeiro período, não há dívida, portanto $B_1 = 0$.

- Usando $B_T = (1+r)[c_{T-1} - y_{T-1} + B_{T-1}]$, temos $0 = (1+r)[c_{T-1} - y_{T-1} + B_{T-1}] + c_T - y_T \Longrightarrow -B_{T-1} = c_{T-1} - y_{T-1} + \frac{c_T - y_T}{1+r}$.
- Usando $B_{T-1} = (1+r)[c_{T-2} - y_{T-2} + B_{T-2}]$ temos $0 = (1+r)[c_{T-2} - y_{T-2} + B_{T-2}] + c_{T-1} - y_{T-1} + \frac{c_T - y_T}{1+r} \Longrightarrow -B_{T-2} = c_{T-2} - y_{T-2} + \frac{c_{T-1} - y_{T-1}}{1+r} + \frac{c_T - y_T}{(1+r)^2}$.
- Procedendo-se sucessivamente desta forma chega-se a: $-B_1 = 0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t - y_t}{(1+r)^{t-1}}$.
- A chamada restrição orçamentária intertemporal é $\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^{t-1}} = \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{(1+r)^{t-1}}$, ou seja, a soma dos valores presentes dos consumos é igual à soma dos valores presentes das rendas.

O problema de otimização intertemporal do consumidor é:

$$\max_{c_1,\ldots,c_2} \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_T),$$

$$s.a.$$

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^{t-1}} = \sum_{t=1}^{T} \frac{y_t}{(1+r)^{t-1}}$$

Note-se que este modelo é igual a um modelo de escolha convencional, em que vende-se dotações de bens para que se possa comprar (possivelmente outros) bens. Para isso, basta definir o preço do consumo no período t como $p_t = \left(\frac{1}{1+r}\right)^{t-1}$.

Usando esta definição, tirando-se a condição de primeira ordem em relação a c_t e c_{t+1} temos:
$c_t : \beta^{t-1} u'(c_t) = \lambda \frac{1}{(1+r)^{t-1}}$.
$c_{t+1} : \beta^{t} u'(c_{t+1}) = \lambda \frac{1}{(1+r)^{t}}$.
O que implica em:

$$u'(c_t) = \beta(1+r)u'(c_{t+1}).$$

Se $\beta(1+r) = 1$ o consumo é constante. Se $\beta(1+r) > 1$ o consumo é crescente, se $\beta(1+r) < 1$ o consumo é decrescente. Note-se que a trajetória de y_t não é relevante para definir a esta relação. Na prática é apenas o valor presente das rendas que é importante.

Exemplo: $u(c) = \ln(c)$.

- $\frac{1}{c_t} = \beta(1+r)\frac{1}{c_{t+1}} \Longrightarrow \frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta(1+r)$.
- Considere o caso em que $\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{t-1} y_t = m$.
- Temos que $\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{t-1} c_t = m$.
- Mas procedendo-se iteradamente sabe-se que $c_t = ((1+r)\beta)^{t-1} c_1$.

Escolha Intertemporal

- Portanto temos que:
  $m = \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{1+r}\right)^{t-1} ((1+r)\beta)^{t-1} c_1 = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} c_1.$
- Mas $\sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} - \sum_{t=T+1}^{\infty} \beta^{t-1} = \frac{1-\beta^T}{1-\beta}.$
- Portanto $c_1 = m\frac{1-\beta}{1-\beta^T}$, $c_t = ((1+r)\beta)^{t-1} \frac{1-\beta}{1-\beta^T} m.$

Inconsistência dinâmica: suponha que $U(c_1, ..., c_N) = u(c_1) + \beta_1 u(c_2) + ... + \beta_{T-1} u(c_T)$ mas que β_t não tenha a forma $\beta_t = \beta^t$ para algum β. Então a decisão sobre $(c_1, ..., c_N)$ no primeiro período pode não coincidir com a decisão sequencial estes objetos.

Exemplo: disconto hiperbólico com 3 periodos. Suponha:

- Utilidade instantânea $u(c)$. Desconta-se um período à frente por $\beta_1 = 0.6$ e dois períodos à frente por $\beta_2 = 0.4 > (\beta_1)^2$.
- $y_1 = 100$, $y_2 = y_3 = 0$.
- $r = 0 \Longrightarrow (1 + r) = 1$

Suponha que o indivíduo possa escolher c_1, c_2 e c_3 no primeiro período. Como o "preço" do consumo em todos os períodos é 1, ele resolverá:

$$\max_{c_1, c_2, c_3} \ln(c_1) + 0.6 \ln(c_2) + 0.4 \ln(c_3)$$

s.a.

$$c_1 + c_2 + c_3 = 100.$$

- Seu consumo será $c_1 = 50,\ c_2 = 30,\ c_3 = 20.$

Suponha agora que sua escolha seja feita sequencialmente. O indivíduo sabe que, no segundo período, suas preferências serão caracterizadas por:

$$U(c_2, c_3) = \ln(c_2) + 0.6\ln(c_3).$$

- Se houver um valor S deixado de poupança no período 2, o agente escolherá $c_2 = \frac{5}{8}S$ e $c_3 = \frac{3}{8}S$.
- Antecipando isso, o agente no primeiro período resolve: $\max_S \ln(100 - S) + 0.6\ln\left(\frac{5}{8}S\right) + 0.4\ln\left(\frac{3}{8}S\right)$
- O agente consumirá 50 no período 1, 31.25 no período 2 e 18.75 no período 3.
- Ele conseguirá atingir a escolha anterior (preferível no primeiro período) caso consiga encontrar um ativo que pague no período seguinte e outro (ilíquido) que pague apenas em 2 períodos.

Aplicações:

- Suavização do consumo.
- Ciclo de vida.
- Expectativas e comportamento de poupança ou endividamento.

Função de produção: equação que relaciona o uso de insumos à produção de um certo bem.
Exemplos de insumos: Capital, Trabalho, Matérias primas, terra, ...

$$q = f(k, l, m, \ldots).$$

- Produtos Marginais (físicos): f_k(do capital), f_l (do trabalho).
- Hipótese usual: produtos marginais decrescentes, ou seja, $f_{kk} < 0$ e $f_{ll} < 0$.
- Produtos Médios: $\frac{f(k,l,\ldots)}{k}$ (produto médio do capital) e $\frac{f(k,l,\ldots)}{l}$ (produto médio do trabalho)

Isoquantas: combinações de fatores que geram um dado nível de produção. Conceito semelhante a curvas de indiferença.

- Taxa marginal de substituição técnica: é a inclinação de uma isoquanta. Formalmente:

$$TMST(\text{l por k}) = \left.\frac{-dk}{dl}\right|_{q=\bar{q}}$$

- Usando-se $dq = f_k dk + f_l dl$ chegamos a:

$$TMST(\text{l por k}) = \frac{f_l}{f_k}.$$

Formato das isoquantas:

$$\frac{\partial TMST}{\partial l} = \frac{\partial \left(\frac{f_l}{f_k} \right)}{\partial l} =$$

$$= \frac{f_{ll} f_k + f_{lk} \frac{dk}{dl} f_k - f_{kl} f_l - f_{kk} \frac{dk}{dl} f_l}{f_k^2}$$

$$= \frac{f_{ll} f_k^2 - 2 f_{kl} f_l f_k + f_{kk} f_l^2}{f_k^3}$$

- Com produtos marginais decrescentes, caso f_{lk} não seja muito negativo, isoquantas são convexas.

Retornos de escala:

- Decrescentes: $f(\lambda k, \lambda l) < \lambda f(k, l)$ sempre que $\lambda > 1$.
- Crescentes: $f(\lambda k, \lambda l) > \lambda f(k, l)$ sempre que $\lambda > 1$.
- Constantes: $f(\lambda k, \lambda l) = \lambda f(k, l)$. Neste caso funções de produção são homogêneas de grau 1.
- Note que função de produção pode ser homotética sob retornos decrescentes ou crescentes de escala. Basta ela ser uma transformação crescente (côncava ou convexa) de uma função homogênea de grau 1.

Elasticidade de substituição:

- Trata-se de uma medida da curvatura das isoquantas:

$$\sigma = \frac{d(k/l)}{d(TMST)}\frac{TMST}{(k/l)} == \frac{\partial \ln(k/l)}{\partial \ln(TMST)} = \frac{\partial \ln(k/l)}{\partial \ln(f_l/f_k)}.$$

Funções de Produção

Exemplos de função de produção:

- Linear: $f(k,l) = ak + bl. \Longrightarrow \sigma = \infty.$
- Proporções fixas: $f(k,l) = \min(ak, bl).\ \Longrightarrow \sigma = 0.$
- Cobb-Douglas: $f(k,l) = k^a l^b.\ \Longrightarrow \sigma = 1.$
- CES: $f(k,l) = [k^\rho + l^\rho]^{\frac{\gamma}{\rho}}. \Longrightarrow \sigma = \frac{1}{1-\rho}.$
- Note-se que retornos de escala dependerão de $a+b$ na Cobb-Douglas e de γna CES.

Progresso técnico:

$$q = A(t)f(k,l).$$

A(t) representaos demais fatores que influenciam a produção, incluindo progresso técnico.

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dA}{dt}f(k,l) + A(t)f_k\frac{d_k}{dt} + A(t)f_l\frac{dl}{dt}.$$

Dividindo por q :

$$\frac{dq}{dt}\frac{1}{q} = \frac{dA}{dt}\frac{1}{A} + \frac{1}{f(k,l)}f_k\frac{d_k}{dt} + \frac{1}{f(k,l)}f_l\frac{dl}{dt} \Longrightarrow$$

$$\frac{dq}{dt}\frac{1}{q} = \frac{dA}{dt}\frac{1}{A} + \frac{k}{f(k,l)}f_k\frac{d_k}{dt}\frac{1}{k} + \frac{l}{f(k,l)}f_l\frac{dl}{dt}\frac{1}{l}.$$

Definindo a taxa de crescimento como $G_x = \frac{dx}{dt}\frac{1}{x}$ temos:

$$G_q = G_A + \frac{k}{f(k,l)} f_k G_k + \frac{l}{f(k,l)} f_l G_l \Longrightarrow$$

$$G_q = G_A + \xi_k G_k + \xi_l G_l,$$

sendo ξ_j a elasticidade da função de produção em relação ao fator j. G_A é uma medida do progresso tecnológico, o chamado resíduo de Sollow, que pode ser medido empiricamente.

Definição econômica de custos - O valor pago ao insumo para mantê-lo no presente emprego, ou seja, a remuneração que o insumo receberia no melhor uso alternativo.

- Custo de trabalho. Valor pago em salários.
- Custo de Capital. Preço de aluguel do capital
- Custo de talento empresarial. Idealmente não deve ser computado como lucro, mas como remuneração de fator produtivo.

Funções Custo

Supõe-se que firmas contratam fatores em mercado competitivo. w é o preço do trabalho e r éo preço do capital.

- O custo total é dado por:$CT = rk + wl$, sendo k o uso de capital e l o de trabalho.
- A receita total é dada por: $RT = pq = pf(k, l)$, sendo p o preço do bem sendo produzido.
- O lucro total é dado por $\pi = RT - CT = pf(k, l) - rk - wl$.

Para uma firma maximizar lucros, ela certamente terá que minimizar custos dada a quantidade produzida.

- O problema de minimização de custos é:

$$\min rk + wl$$

s.a.

$$f(k,l) = \bar{q}.$$

- $\mathscr{L} = rk + wl + \lambda(\bar{q} - f(k,l)).$
- C.P.O.s - (k): $r = \lambda f_k$,(l): $w = \lambda f_l$

Implicações das C.P.Os:

- $\frac{f_l}{w} = \frac{f_k}{r}$. Marginalmente, uma unidade monetária gasta em capital deve render o mesmo que uma unidade monetária gasta em trabalho.
- $\frac{w}{r} = \frac{f_l}{f_k}$. Graficamente, isoquantas tangenciam isocustos (sendo estas os locus de custos constantes).
- Graficamente, pode-se traçar as conbinações de uso de insumos conforme a produção se expande. Trata-se do chamado "caminho de expansão da firma".
- É possível que uso de insumos diminua com produção. Neste caso, temos "insumos inferiores".

Funções Custo

A função determina o custo mínimo para atingir um certo nível de produção dados os preços dos insumos, ou seja:

$$C(r, w, q) = \min rk + wl$$

s.a.

$$q = f(k, l).$$

Definições:

- Custo Médio: $CMe(r, w, q) = \frac{C(r,w,q)}{q}$.
- Custo Marginal: $CMg(r, w, q) = \frac{\partial C(r,w,q)}{\partial q}$.
- Em um gráfico, curva de custo marginal cruza a de custo médio em um ponto de mínimo da curva de custo médio.

Funções Custo

Resultado: com retornos constantes de escala $C(r,w,q) = qC(r,w,1)$. Exemplos:

- Leontief: $q = \min(ak, bl)$. $C(v,w,q) = \frac{q}{a}r + \frac{q}{b}w$. $CMe(v,w,q) = CMg(v,w,q) = \frac{1}{a}r + \frac{1}{b}w$.
- Cobb-Douglas: $C(v,w,q) = q^{1/(\alpha+\beta)}Bv^{\alpha/(\alpha+\beta)}w^{\beta/(\alpha+\beta)}$, sendo que $B = (\alpha+\beta)\alpha^{\alpha/(\alpha+\beta)}\beta^{\beta/(\alpha+\beta)}$.
- CES: $C(v,w,q) = q^{1/\gamma}\left(r^{1-\sigma} + w^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$, sendo $\sigma = 1/(1-\rho)$ a elasticidade de substituição.

Propriedades:

- Homogeneidade de grau um em relação a preços: $C(\lambda r, \lambda w, q) = \lambda C(r, w, q)$.
- Não decrescente em r, w e q.
- Côncava em relação aos preços de fatores.

Elasticidade de Substituição entre Insumos:

$$s_{kl} = \frac{\partial \ln(k/l)}{\partial \ln(w/r)}.$$

No caso geral temos:

$$s_{ij} = \frac{\partial \ln(x_i/x_j)}{\partial \ln(w_j/w_i)}.$$

Funções Custo

Progresso técnico. Com retornos constantes de escala temos, e progresso técnico (ou seja, em t a função de produção é $A(t)f(k,l)$), temos que com os fatores que produzem 1 no período inicial (supondo $A(1) = 1$), conseguimos produzir $A(t)$ em t. Assim temos:

$$C_t(k,l,A(t)q) = C_1(k,l,q) \Longrightarrow$$
$$A(t)C_t(k,l,q) = C_1(k,l,q) \Longrightarrow$$

$$C_t(k,l,q) = \frac{C_1(k,l,q)}{A(t)}.$$

- Função custo decresce com progresso técnico. Isso claramente vale também para custo fixo e custo marginal.

Demanda contingente de fatores: k e l que resolvem:

$$\min_{k,w} rk + wl$$

s.a.

$$f(k,l) = q.$$

- Estes valores são funções de r, w e q, e portanta são denotados por $k^c(r,w,q)$ e $l^c(r,w,q)$. Estas são as demandas contingentes de fatores.

Note-se que o Lagrangeano do problema de minimização de custos é:

$$\mathscr{L} = rk + wr + \lambda(q - f(k,l))$$

- Pelo teorema do envelope, $\frac{\partial C(r,w,q)}{\partial r} = k^c(r,w,q)$ e $\frac{\partial C(r,w,q)}{\partial w} = l^c(r,w,q)$. Este resultado é conhecido como Lema de Shephard.
- Elasticidade de substituição pode ser calculada a partir de $s_{ij} = \frac{\partial \ln\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{\partial \ln\left(\frac{w_j}{w_i}\right)} = \frac{\partial \ln\left(\frac{C_i}{C_j}\right)}{\partial \ln\left(\frac{w_j}{w_i}\right)}$.

Curto Prazo versus Longo Prazo.

- Curto prazo: supõe-se um dos fatores não se move (por exemplo, capital).
- Longo prazo: todos os fatores ajustam-se para otimização.

Funções Custo

Definições:

- Custo total de curto prazo:$SC(r, w, q, k)$(caso em que capital é o fator imóvel.)
- Custo médio de curto prazo:$SCMe = \frac{SC(r,w,q,k)}{q}$.
- Custo marginal de curto prazo: $SCMg = \frac{\partial SC(r,w,q,k)}{\partial q}$.

Curvas referentes ao curto prazo estão sempre acima das referentes ao longo prazo:

- Gráficos de custo total, custo médio e custo marginal revelam este padrão.

Maximização de Lucros

Hipóteses usuais para modelar o comportamento das firmas:

- Firmas comportam-se como um único tomador de decisões.
- Firmas maximizam lucros.

Receita total das firmas:

- $R(q) = p(q)q$. $p(q)$ é a demanda inversa. Normalmente supõe-se que $p'(q) \leq 0$. No caso de uma firma competitiva, $p'(q) = 0$.

Lucro da firma:

- $\pi(q) = p(q)q - C(q)$. $C(q)$ é a função custo, mas por simplicidade omite-se da notação o preço dos fatores, que não será o foco da análise aqui.

Maximização de lucros:

- Condição de primeira ordem: $\frac{\partial \pi(q)}{\partial q} = \frac{\partial R(q)}{\partial q} - \frac{\partial C(q)}{\partial q} = 0 \Longrightarrow$ Receita marginal igual a custo marginal.
- Condição de segunda ordem: $\frac{\partial^2 \pi(q)}{\partial^2 q} = \frac{\partial^2 R(q)}{\partial^2 q} - \frac{\partial^2 C(q)}{\partial^2 q} < 0.$

Receita marginal:$RMg(q) = \frac{dR(q)}{dq} = \frac{d[p(q)q]}{dq} = p + q\frac{dp}{dq}$.
Exemplo - no caso de demanda linear $q = a - bp$,
temos:$p = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}q$. $RMg(q) = \frac{dR(q)}{dq} = \frac{a}{b} - \frac{2}{b}q$.

Receita marginal e elasticidade da demanda:

$$RMg(q) = p + \frac{qdp(q)}{dq} = p\left(1 + \frac{q}{p}\frac{dp}{dq}\right) = p\left(1 + \frac{1}{e_{q,p}}\right),$$

sendo $e_{q,p}$ a elasticidade da demanda em relação a q. Assim temos:

- Se $e_{q,p} < -1 \implies RMg > 0$, se $e_{q,p} = -1 \implies RMg = 0$, se $e_{q,p} > -1 \implies RMg < 0$.
- Firmas operam em etapas em que $e_{q,p} < -1$, ou seja, valor absoluto da elasticidade da demanda é maior que 1. Se demanda for muito inelástica, redução da produção aumenta receita total.

No problema de maximização de lucros temos:
$CMg(q) = RMg(q) \Longrightarrow$

$$p = CMg(q)\left(1 - \frac{1}{|e_{q,p}|}\right)^{-1}.$$

- O termo $\left(1 - \frac{1}{|e_{q,p}|}\right)^{-1}$ é chamado de Markup. Quanto menor mais inelástica for a demanda (ou seja, quanto mais próximo de 1 for $|e_{q,p}|$), maior erá o markup. Lembre-se que no problema de otimização nunca teremos $|e_{q,p}| < 1$.
- Elasticidade da demanda é o ingrediente fundamental para definir discrepância entre preço e custo marginal.

Caso especial em que $p(q) = 0$. Preço igual a custo marginal.

- Se custo marginal for sempre crescente lucro será positivo.
- Se custo marginal for sempre decrescente não haverá solução para o problema de maximização de lucros (firmas gostariam de produzir "infinito").
- Se custo marginal for constante lucro será zero (há apenas remuneração do capital). Caso padrão em grande parte dos modelos competitivos.

Curto Prazo:

- Iguala-se custo marginal de curto prazo a receita marginal.
- produz-se apenas no caso de o preço ser maior que o custo médio variável (custo dos insumos que podem ser mobilizados no curto prazo).
- Pode haver produção com prejuízo no curto prazo, caso o Custo Médio de Curto Prazo seja maior que o preço, e o custo Médio Variável de Curto prazo menor do que o preço.

Função lucro: o lucro é dado por
$\pi = pq - C(q) = pf(k,l) - rk - wl$. A função lucro é caracterizada por:

$$\Pi(p,r,w) = \max_{k,l}\left[pf(k,l) - rk - wl\right].$$

- Note-se que estamos considerando aqui o caso competitivo, em que preços são dados e não dependem da quantidade produzida pela firma.

Propriedades da função lucro:

- Homogeneidade de grau um em relação a todos os preços.
- Crescente em p.
- Não crescentes em preços dos fatores, r e w.
- Convexa no preço dos produtos.

Demanda (não condicional) por fatores: valores de l e k que resolvem o problema

$$\Pi(p,r,w) = \max_{k,l} \left[pf(k,l) - rk - wl \right].$$

- São funções, $l(p,r,w)$ e $k(p,r,w)$ no caso de trabalho e capital como fatores.
- Não necessariamente são bem definidos como função. Pode haver multiplos pares (l,k) que resolvem o problema, por exemplo, quando há retornos constantes de escala e lucro zero, há várias (infinitas) soluções possíveis.

Suponha que haja solução $l(p, r, w)$ e $k(p, r, w)$. Então, pelo teorema do envelope,

- $\frac{\partial \Pi(p,r,w)}{\partial r} = -k(p, r, w)$.
- $\frac{\partial \Pi(p,r,w)}{\partial w} = -l(p, r, w)$.
- $\frac{\partial \Pi(p,r,w)}{\partial p} = f[k(p, r, w), l(p, r, w)]$.

Excedente do produtor:
Aquilo que é ganho pelos produtores em excesso sobre a ausência de produção. Ganho de bem-estar (do ponto de vista do produtor, no curto prazo) de um aumento de preços de p_1 para p_2 é:

$$\Pi(p_2, r, w) - \Pi(p_1, r, w) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial \Pi(p, r, w)}{\partial p} dp = \int_{p_1}^{p_2} q(p) dp.$$

Trata-se da área sob a curva de custo marginal de curto prazo. O excedente do produtor no curto prazo, então, é dado por:

$$\Pi(p_2, r, w) - \Pi(p_0, r, w) = \int_{p_0}^{p_2} q(p) dp,$$

sendo p_0 o preço mínimo que gera produção e p_1 o preó praticado.

Maximização de Lucros

Do problema de maximização de lucros temos:

- $p\frac{\partial f}{\partial k} = r$.
- $p\frac{\partial f}{\partial l} = w$.
- Remuneração do fator é igual ao seu produto marginal (em unidades monetárias).
- Com retornos marginais decrescentes e um fator, temos

Resposta da demanda a mudanças de preços dos fatores deve ser negativa se houver um único fator. Isso pode ser facilmente visto das condições de primeira ordem.

Efeito mais sutil no caso de vários fatores:

- Efeito substituição: fator com preço rebaixado deve ser mais usado.
- Efeito produção: produção aumenta. Se insumo for normal, aumenta o seu uso mais do que o estipulado pelo efeito substituição. Se o insumo for inferior, seu aumento pode ser (ao menos parcialmente) compensado pelo efeito negativo do aumento da produção.
- É possível uma queda no uso de fatores (análoga a bens de giffen).

Análise matemática:
Vale a seguinte identidade: $l(p,r,w) = l^c(v,w,q(p,v,w))$.
Assim temos:

$$\frac{\partial l(p,r,w)}{\partial w} = \frac{\partial l^c(r,w,q)}{\partial w} + \frac{\partial l^c(r,w,q)}{\partial q}\frac{\partial q(p,r,w)}{\partial w}.$$

Se o segundo termo tiver um sinal diferente do primeiro e for muito expressivo, pode -se compensar o efeito substituição.

Exemplo - maximização de lucros:
Cobb-Douglas:$f(k,l) = \left[k^{\alpha} l^{(1-\alpha)}\right]^{\gamma}$.

$$\prod(p,r,w) = \max_{k,l} p\left[k^{\alpha} l^{(1-\alpha)}\right]^{\gamma} - rk - wl$$

C.P.O.s:
$k: p\gamma\left[k^{\alpha} l^{(1-\alpha)}\right]^{\gamma-1} \alpha\left(\frac{l}{k}\right)^{(1-\alpha)} = r.$
$l: p\gamma\left[k^{\alpha} l^{(1-\alpha)}\right]^{\gamma-1} (1-\alpha)\left(\frac{k}{l}\right)^{\alpha} = w.$
$\Longrightarrow \frac{k}{l}\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{w}{r}. \Longrightarrow p\gamma\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w}{r} l\right)^{\alpha} l^{(1-\alpha)}\right]^{\gamma-1} \alpha\left(\frac{r}{w}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{(1-\alpha)} = r.$

- Se $\gamma = 1$ chegamos a $p = \frac{r}{\alpha}\left(\frac{r}{w}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{(1-\alpha)}$. Não há como definir k ou l, apenas uma relação $\frac{k}{l}$ e o preço. O preço é exatamente aquele que torna receita marginal igual ao custo médio.
- Se $\gamma > 1$, função Π não é convexa. Condição de segunda ordem não é atendida.
- Se $\gamma < 1$, vale $p\gamma\left[l\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w}{r}\right)^{\alpha}\right]^{\gamma-1}\alpha\left(\frac{r}{w}\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{(1-\alpha)} = r$. Isso permite determinar l.
- Procedimento análogo permite identificar k. Assim, a demanda (não condicional) por fatores é bem definida.

Outro exemplo: $f(k,l) = \min(k,l)^{\gamma}$. Claramente, na solução teremos $k = l$.

$\Longrightarrow$Temos que $\prod = pk^{\gamma} - (r+w)k$.

- Se $\gamma > 1$, temos que a condição de segunda ordem não é satisfeita. Lucro tende a infinito quando produção tende a infinito.
- Se $\gamma = 1$, c.p.o. implica em $p = r + w$. Não se pode determinar k, apenas o preço que permitirá lucro zero com produção positiva.
- Se $\gamma < 1$, c.p.o. gera $\gamma p k^{(\gamma-1)} = (r+w)$. Pode-se caracterizar as demandas de k e l como função dos preços.

Outro exemplo: $f(k, l) = (k + l)^{\gamma}$. Claramente, na solução, teremos que só se usará k se $r < w$, só se usará l se $r > w$ e a resposta é indeterminada se $r = w$.

No primeiro caso temos que $\Pi = pk^{\gamma} - rk$.

- Se $\gamma > 1$, temos que a condição de segunda ordem não é satisfeita. Lucro tende a infinito quando produção tende a infinito.
- Se $\gamma = 1$, c.p.o. implica em $p = r$. Não se pode determinar k, apenas o preço que permitirá lucro zero com produção positiva.
- Se $\gamma < 1$, c.p.o. gera $\gamma pk^{(\gamma-1)} = r$. Pode-se caracterizar as demandas de k como função de r. Neste caso (com $r < w$), a demanda por w será zero.

Casos com retornos constantes de escala. Solução só poderá ser atingida com caracterização da demanda. Solução dependerá de interação entre oferta e demanda.

- Oferta dependerá do comportamento otimizador de firmas. No caso competitivo, para cada firma decorrerá da relação $p = CMg(q)$.
- Demanda será determinada pelo comportamento otimizador dos clientes.
- Caracerização de equilíbrio parcial: apenas o mercado por um bem é analizado a cada instante.

Demanda Agregada:

$$X_n = \sum_{i=1}^{I} x_n^i(p, m^i)$$

- Curva de demanda: relação entre X_n e p_n.
- Deslocamento da curva de demanda. Mudanças de outros fatores que condicionam a demanda.
- Fatores que deslocam a curva de demanda: outros preços, renda e preferências.

Equilíbrio Parcial Competitivo

- Usa-se a notação

$$Q_D(p, p', m)$$

- Elasticidade preço da demanda:$e_{Q,p} = \frac{\partial Q_D}{\partial p} \frac{p}{Q_D}$.
- Elasticidade cruzada$= \frac{\partial Q_D}{\partial p'} \frac{p'}{Q_D}$.

- Elasticidade renda $= \frac{\partial Q_D}{\partial m}\frac{m}{Q_D}$. Ponto importante: não necessariamente a elasticidade renda está bem definida. Q_D pode depender de distribuição de renda entre indivíduos.
- Resultado teórico: pode-se agregar demanda quando utilidades indiretas tem a forma gorman:

$$v_i(p, w_i) = a_i(p) + b(p)w_i.$$

- Contra exemplo: um indivíduo tem preferências quasilineares e o outro Cobb-Douglas.

Oferta no curtíssimo prazo:

- No curtíssimo prazo, oferta não responde a preços. Não é possível mudar a quantidade produzida.
- Quantidade é fixada pela quantidade produzida e preço depende da demanda.

Equilíbrio Parcial Competitivo

Competição perfeita:

- Grande número de firmas produzindo um bem homogêneo.
- Firmas maximizam lucro.
- Firmas são tomadoras de preços.
- Preços são conhecidos por todos os participantes do mercado.
- Não há custos de transação (fazer trocas não implica em custos).

Oferta no curto prazo:

- No curto prazo, oferta é dada pela soma das ofertas de curto prazo individuais.
- Oferta agregada pode ser "quebrada" caso haja preços mínimos para as firmas:

$$Q_S(p, v, w) = \sum_{i=1}^{n} q_i(p, v, w).$$

- Elasticidade da oferta:

$$e_{S,p} = \frac{\partial Q_S}{\partial p} \frac{p}{Q_S}.$$

Fatores que deslocam a curva de oferta:

- Preços de insumos.
- Mudanças tecnológicas.
- Choques climáticos.
- Número de produtores.

Equilíbrio Parcial Competitivo

Preço de equilíbrio: p^* tal que $Q_D(p^*, p', m) = Q_S(p^*, v, w)$.

- Graficamente pode-se observar que resposta a choques na demanda e na oferta dependem das elasticidades-preço da oferta e da demanda.

Modelo matemático para estudar efeitos das elasticidades:

- $Q_S = S(p,\beta)$ e $Q_D = D(p,\alpha)$. Os parâmetros α e β são, respectivamente, deslocadores da oferta e da demanda.
- $dQ_D = D_p dp + D_\alpha d\alpha$. $dQ_S = S_p dp + S_\beta d\beta$.
- Usando $dQ_S = dQ_D$, temos que $D_p dp + D_\alpha d\alpha = dQ_S = S_p dp + S_\beta d\beta$.
- Caso apenas α mude, $\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{D\alpha}{S_p - D_p} \Rightarrow e_{p,\alpha} = \frac{e_{Q,\alpha}}{e_{S,p} - e_{D,p}}$.
- Caso apenas β mude, $\frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{D_\beta}{D_p - S_p} \Rightarrow e_{p,\beta} = \frac{e_{S,\beta}}{e_{D,p} - e_{S,p}}$.

Longo prazo:

- Admite-se a entrada de firmas.
- Caso firmas sejam idênticas, haverá entrada de firmas enquanto lucros forem positivos.
- Com firmas diferentes, há entrada de firmas enquanto "lucro marginal" for positivo.

Longo prazo. Formato da curva de oferta.

- Com firmas idênticas, se o setor for pequeno comparado com o total da economia, oferta será infinitamente elástica.
- Graficamente, a oferta estará no ponto do mínimo da curva de custo médio.
- No caso de setor ser grande, oferta de longo prazo pode ser positivamente ou negativamente inclinada.
- Com firmas heterogêneas oferta pode ser crescente.

Suponha o caso de demanda infinitamente elástica. No longo prazo, mudanças na demanda afetam o número de firmas:

$$n = \frac{Q}{q^*}.$$

$$n_1 - n_0 = \frac{Q_1 - Q_2}{q^*}.$$

Ainda no caso de demanda infinitamente elástica. Mudanças de custos afetam tanto os preços e portanto a quantidade total demandada quanto a quantidade de firmas

$$n_1 - n_0 = \frac{Q_1}{q_1^*} - \frac{Q_0}{q_0^*}.$$

Este padrão também pode ser observado no caso de firmas heterogêneas.

Excedente do produtor no longo prazo:
É dado pela área entre a curva de oferta e o eixo p, até o preço de equilíbrio. Este excedente reflete:

- Aumento de firmas com lucro positivo quando aumenta o preço, caso exista heterogeneidade entre firmas.
- Aumento do preço por firma, nas condições acima.
- Possível aumento da produção por firma.
- Aumento na remuneração de fatores.

Análise de bem-estar:

- Excedente do consumidor: área entre a curva de demanda e o eixo vertical, acima do nível de preços praticado.
- Excedente do produtor: área entre a curva de oferta e o eixo vertical, partindo do preço praticado.

Resultado fundamental:

- Excedente total é maximizado na quantidade de equilíbrio.
- Quantidade menor que a de equilíbrio: consumidor perde excedente, produtor pode ganhar.
- Soma do excedente total diminui.
- Intuição: benefício marginal igual a custo marginal.

Controle de preços:

- Há desequilíbrio: $Q(p) = \min\left[Q_d(p), Q_s(p)\right]$.
- Há alguma transferência de excedente do produtor para o consumidor.
- Consumidor pode ganhar ou perder.
- Produtor perde certamente, e há uma diminuição de excedente total.

Tributação distorsiva:

- Imposto "lump-sum": valor fixo, não distorce alocações.
- Imposto proporcional a quantidade consumida (ou produzida): há diferença entre os preços "observados" pelo produtor (P_s) ou pelo consumidor (P_D).
- $P_D = P_S + t$. O montante $P_D - P_S$ é a chamada "cunha fiscal".

Equilíbrio Parcial Competitivo

- Há uma perda de excedente, que pode ser vista graficamente.
- Esta perda de excedente decresce com a elasticidade da denmanda ou da oferta.
- Elasticidades são um ingrediente fundamental para determinar perda total de excedente dada tributação.

Formalmente:

$$P_D - P_S = t$$

$$dP_D - dP_S = dt \tag{10}$$

por outro lado:

$$dQ_S = dQ_D$$

$$D_P dP_D = S_P dP_S \tag{11}$$

De (10):

$$\Longrightarrow S_P dP_S = S_P\left(dP_D - dt\right)$$

Usando (11):

$$\Longrightarrow \frac{dP_D}{dt} = \frac{S_P}{S_P - D_P} = \frac{e_S}{e_S - e_D}.$$

Analogamente:

$$\frac{dP_S}{dt} = \frac{e_D}{e_S - e_D}.$$

Perda de bem-estar:
Aproximação linear gera:

$$DW = -0.5\,(dt)\,(dQ)\,.$$

Usando o fato de que:

$$dQ = e_D\, dP_D \frac{Q_0}{P_0}.$$

Este fato e o resultado derivado no slide anterior geram:

$$dQ = e_D \frac{e_S}{e_S - e_D} dt \frac{Q_0}{P_0},$$

$$\Longrightarrow DW = -0.5 \left(\frac{dt}{P_0}\right)^2 \frac{e_D\, e_S}{e_S - e_D} P_0\, Q_0\,.$$

Resultados de comércio internacional. Resultados podem ser observados graficamente.
Liberalização comercial

- Há ganhos agregados de excedente(área do triângulo sob as curvas até o preço internacional).
- Há perda de excedente pelo produtor e ganho pelo consumidor.

Tarifas:

- Eliminação de tarifas gera ganhos agragados de bem-estar.
- Há perda pelo produtor e pelo governo, mas ganho líquido pelo consumidor.