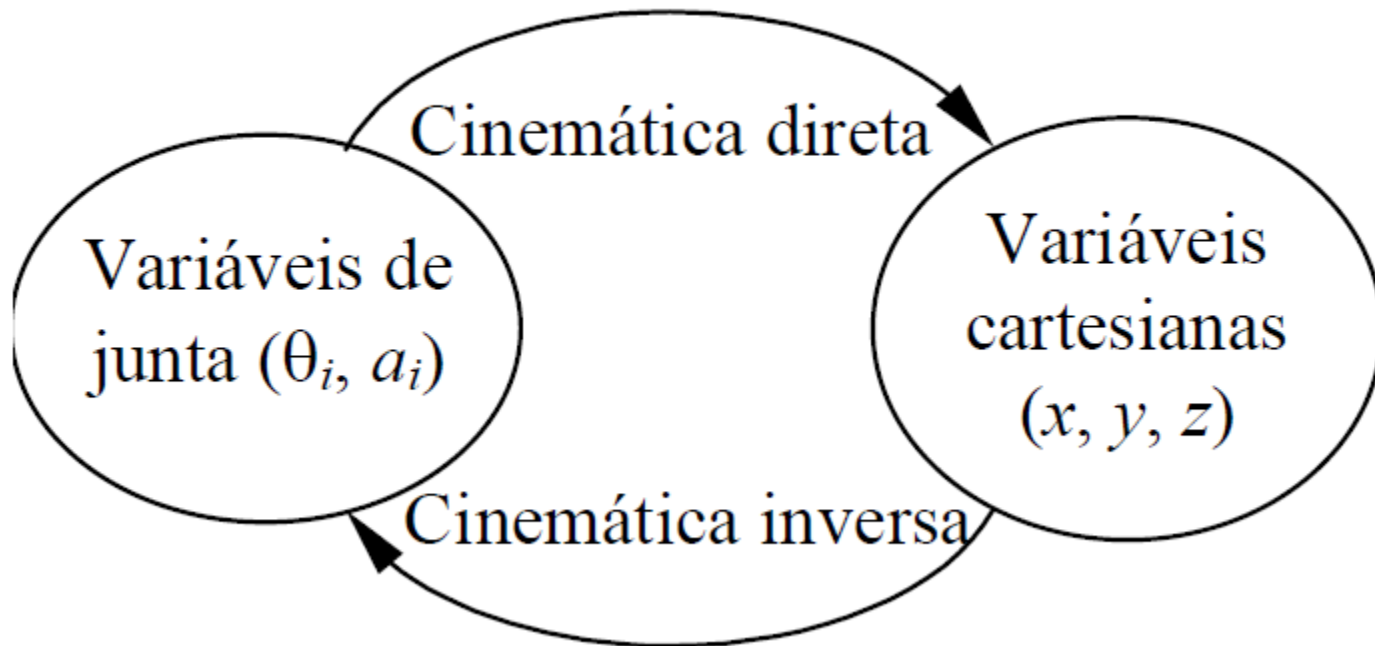
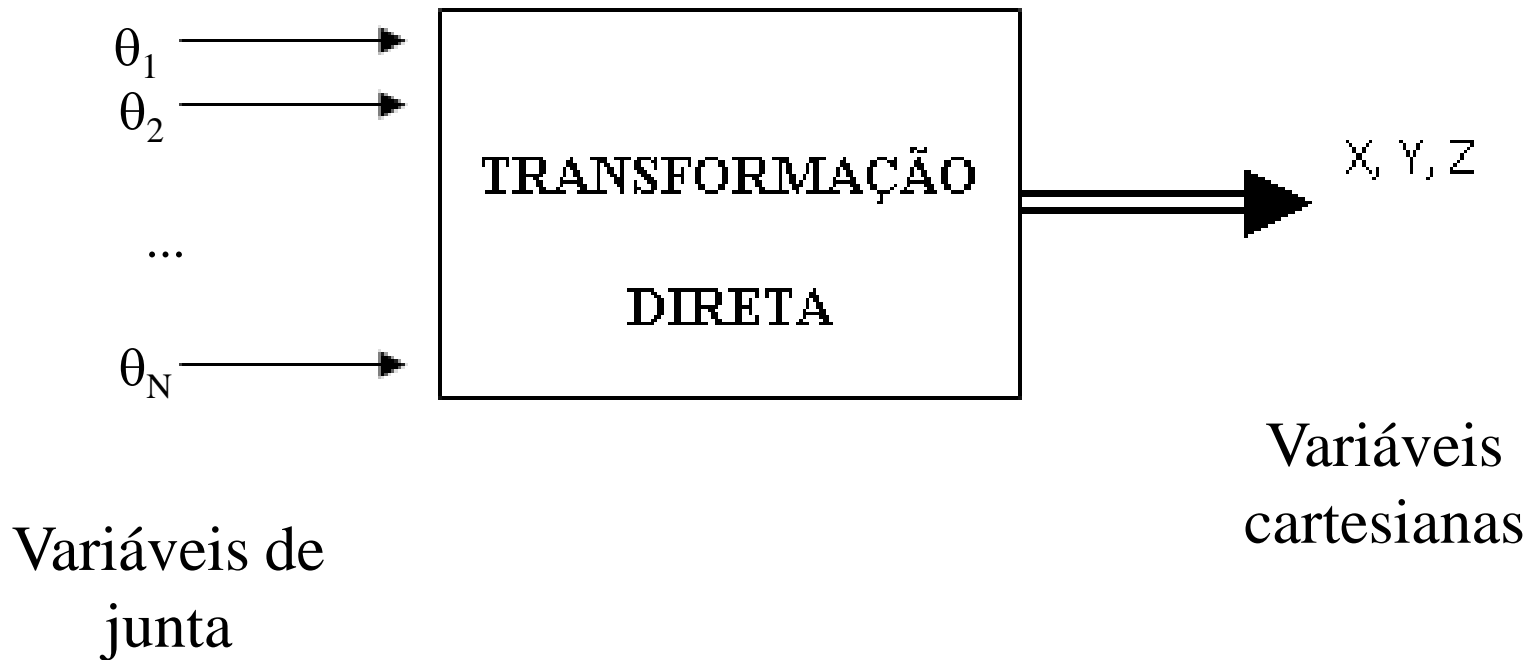


# Modelagem Cinemática de Robôs Industriais

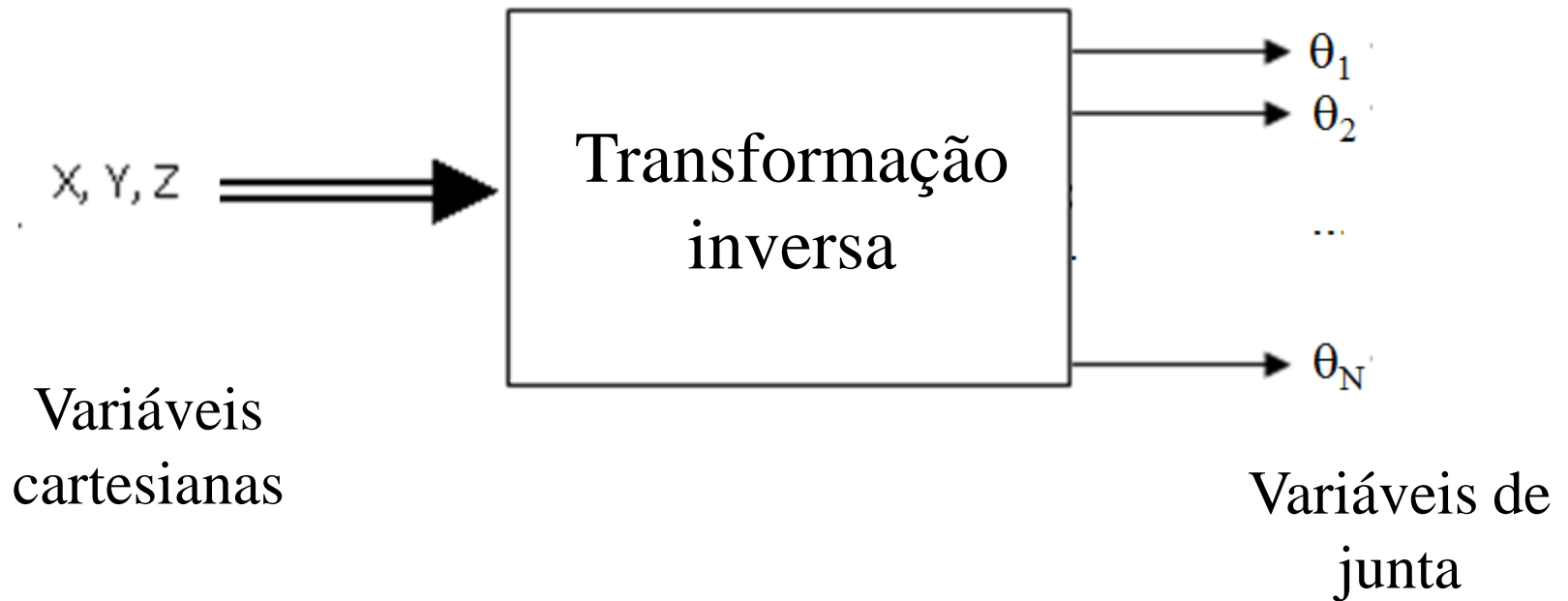
Prof. Assoc. Mário Luiz Tronco



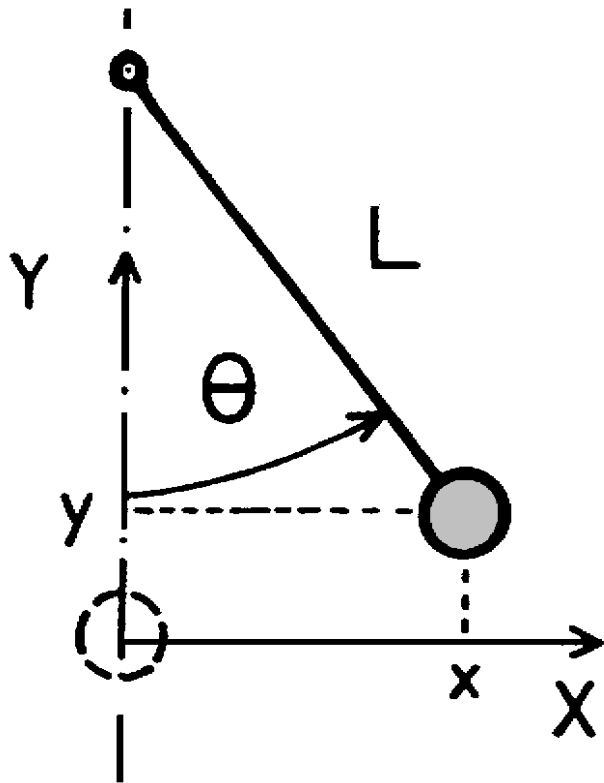
## Transformação direta de coordenadas



## Transformação inversa de coordenadas



## Robô Elementar - 1 Grau de Liberdade



Cinemática Direta:

$$X = L \cdot \sin \theta$$

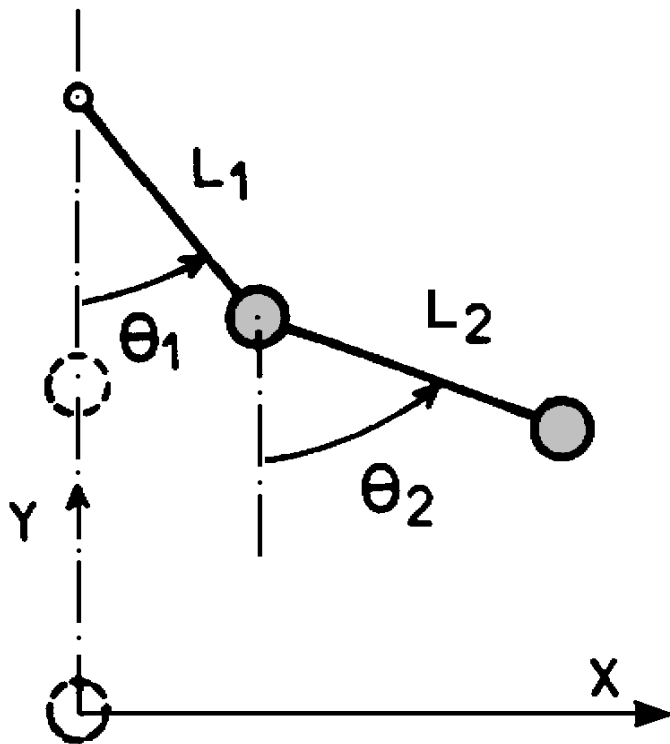
$$Y = L \cdot (1 - \cos \theta)$$

Cinemática Inversa:

Posição desejada:  $M = (X_o, Y_o)^T$

$$\theta = \arcsin (X_o/L), \text{ com } Y_o \leq L$$

## Robô com 2 Graus de Liberdade



Cinemática Direta:

$$X = L_1 \cdot \text{sen } \theta_1 + L_2 \cdot \text{sen } \theta_2$$

$$Y = L_1 \cdot (1 - \cos \theta_1) + L_2 \cdot (1 - \cos \theta_2)$$

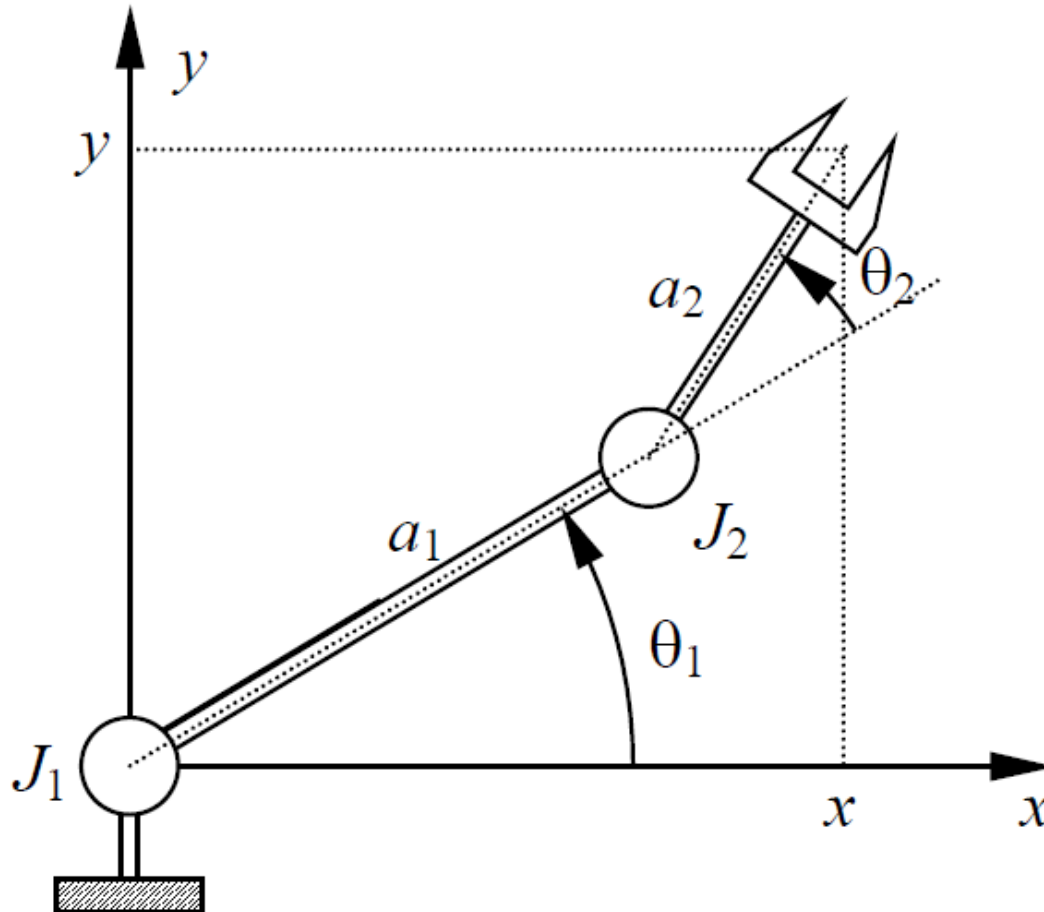
Cinemática Inversa:

Conhecido o ponto  $M = (X_o, Y_o)^T$

Definir um vetor  $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T$

$\theta_1$  e  $\theta_2$  expressos em função de  $X_o$  e  $Y_o$ .





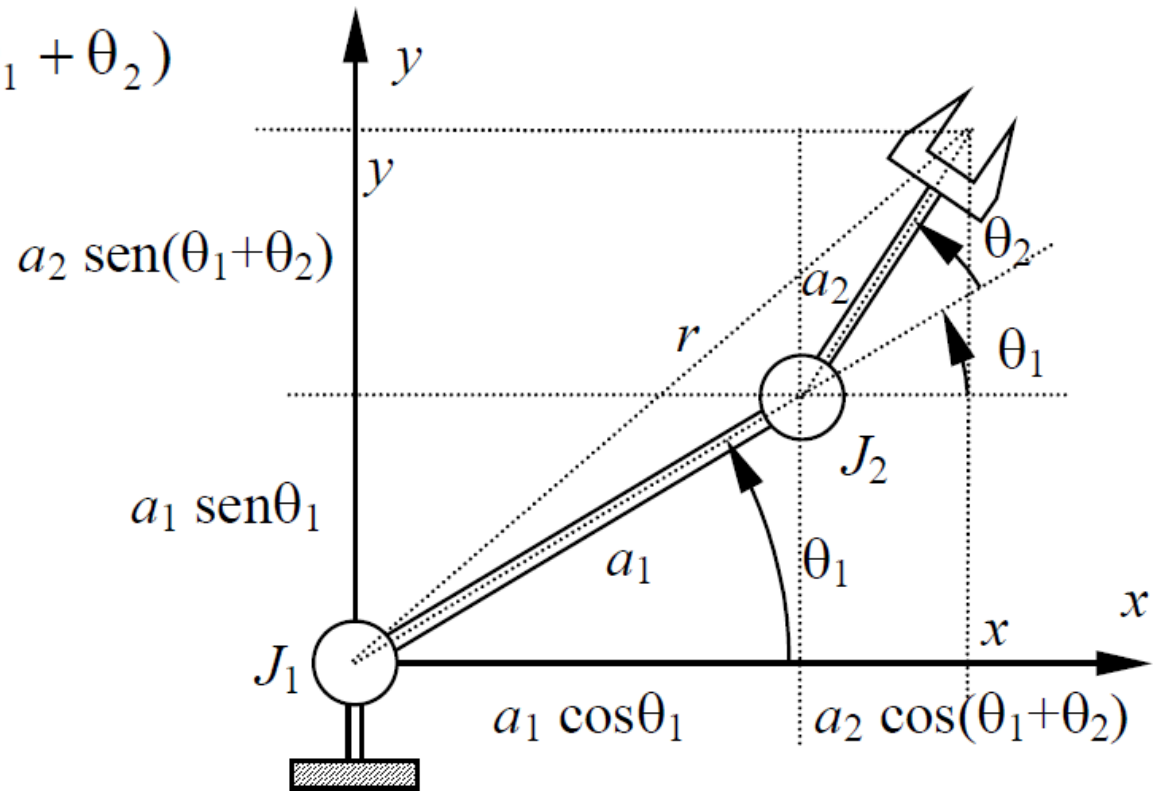
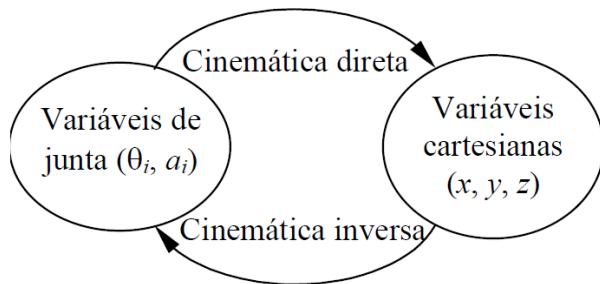
Exemplo:

Manipulador *RR* em movimento plano vertical

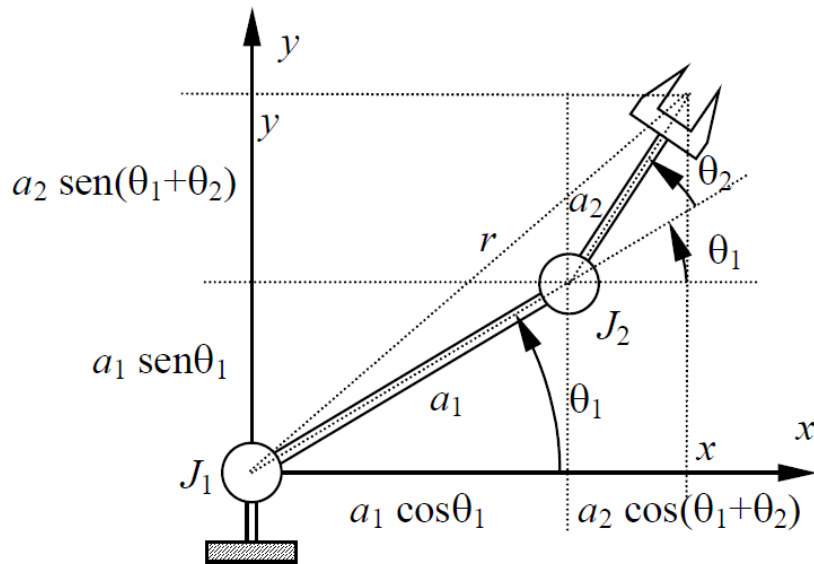
## Equações da Cinemática Direta

$$x = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$



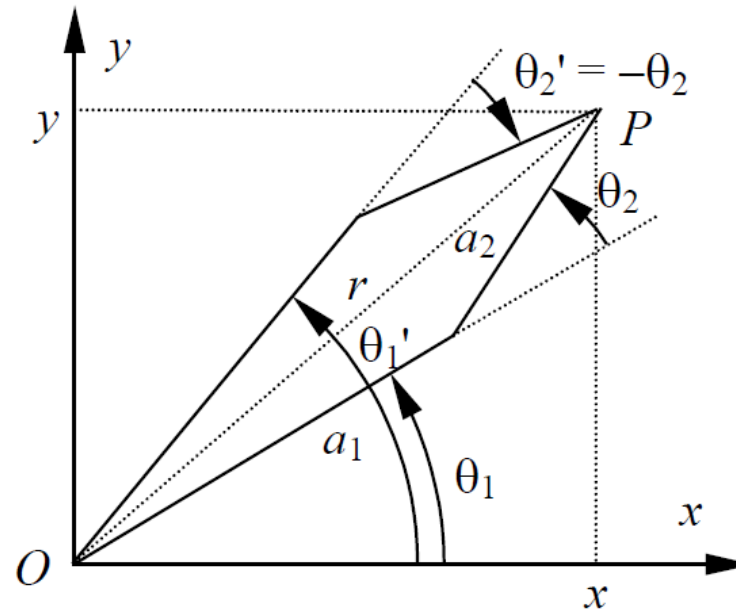




$$\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 a_1 a_2}$$

$$\theta_2 = \pm \arccos \left( \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 a_1 a_2} \right)$$

$$\tan \theta_1 = \frac{y(x^2 + y^2 + a_1^2 - a_2^2) - x \sqrt{4 a_1^2 a_2^2 - (x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2)^2}}{x(x^2 + y^2 + a_1^2 - a_2^2) + y \sqrt{4 a_1^2 a_2^2 - (x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2)^2}}$$



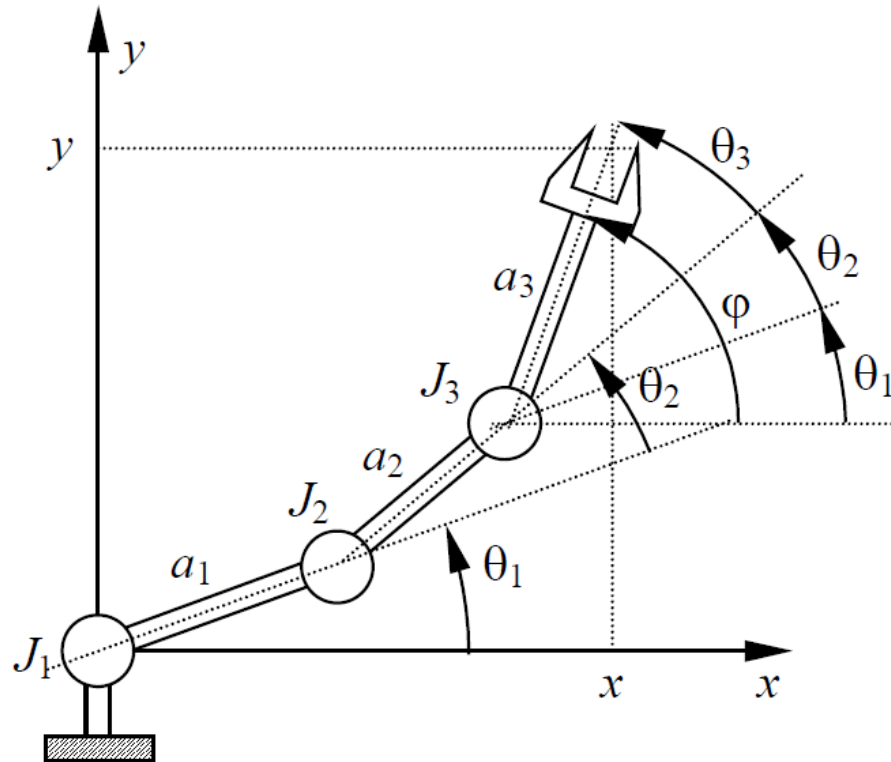
As duas soluções possíveis para a cinemática inversa do manipulador  $RR$

Fixando  $\theta_2$



$$\cos \theta_1 = \frac{x (a_1 + a_2 \cos \theta_2) + y a_2 \sin \theta_2}{(a_1 + a_2 \cos \theta_2)^2 + a_2^2 \sin^2 \theta_2},$$

$$\sin \theta_1 = \frac{y (a_1 + a_2 \cos \theta_2) - x a_2 \sin \theta_2}{(a_1 + a_2 \cos \theta_2)^2 + a_2^2 \sin^2 \theta_2},$$



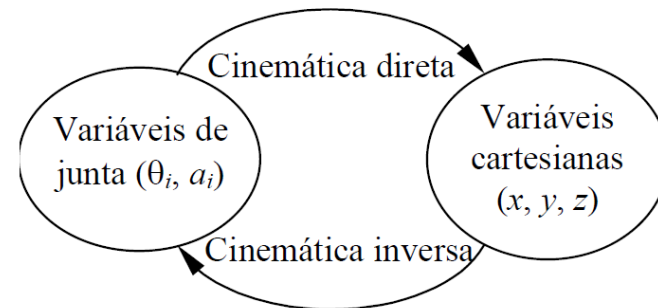
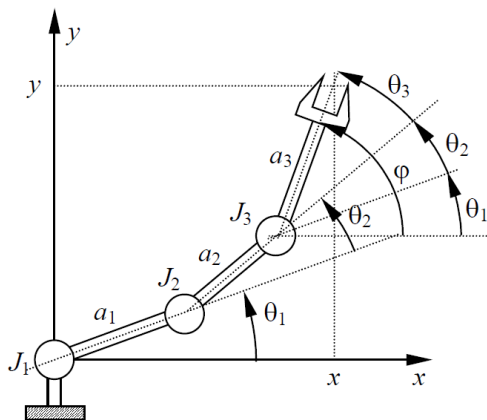
## Manipulador *RRR* em movimento plano vertical

## Equações da Cinemática Direta

As equações da cinemática direta são obtidas de maneira semelhante ao exemplo anterior, ou seja, pela adição das projeções das juntas nos eixos cartesianos. Com isso tem-se que

$$x = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$y = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

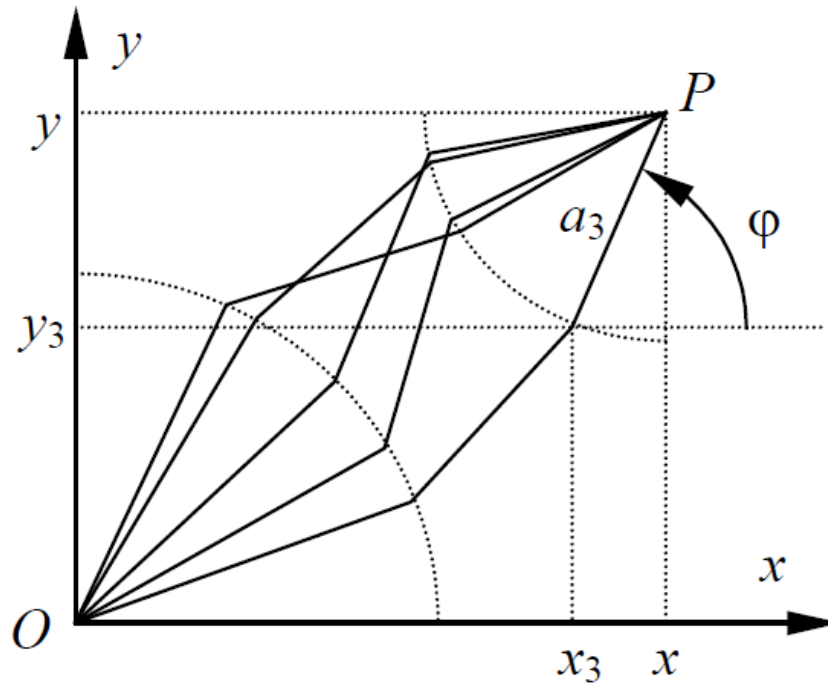




A cinemática inversa não pode ser resolvida, pois há apenas duas equações e 3 incógnitas (os três ângulos de juntas).

Existem infinitas soluções de ângulos que satisfazem a condição do órgão terminal atingir um dado ponto no plano.

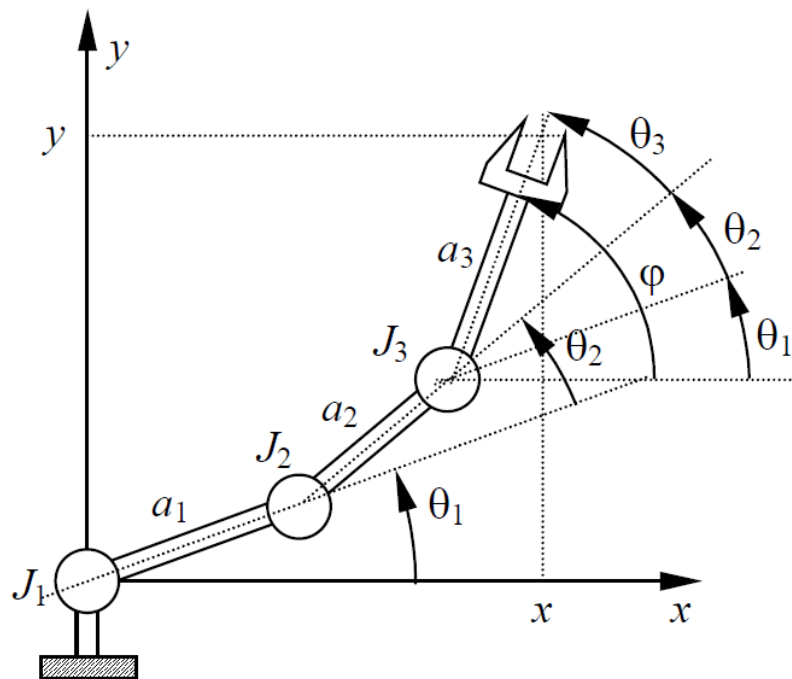




Algumas das infinitas configurações possíveis do braço *RRR* na cinemática inversa.

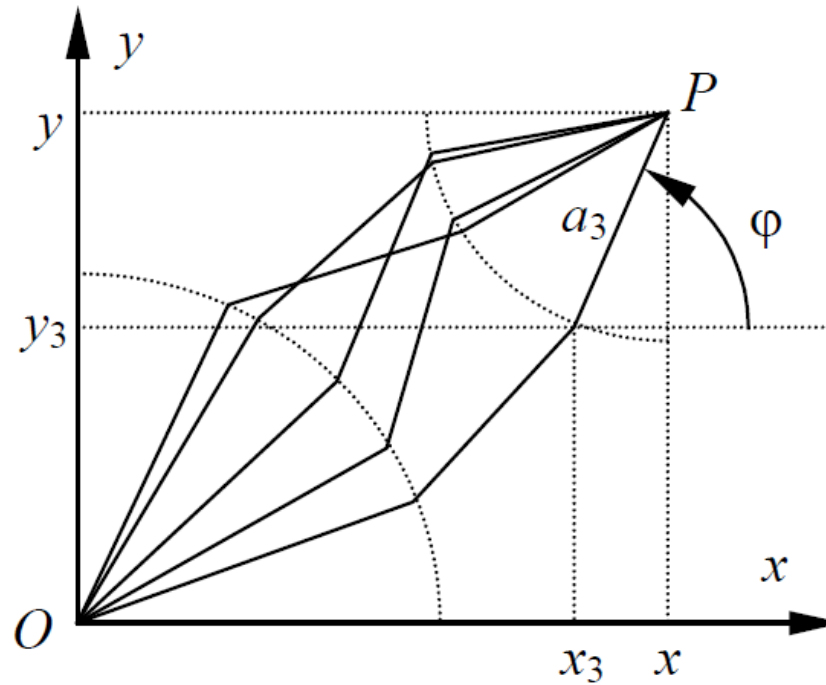
Fixando a orientação da junta J3 com ângulo  $\varphi$  (com relação à horizontal)

A posição de J3, denotada por  $x_3$  e  $y_3$  vale:



$$x_3 = x - a_3 \cos \varphi$$

$$y_3 = y - a_3 \text{ sen } \varphi$$



Algumas das infinitas configurações possíveis do braço *RRR* na cinemática inversa.

O problema agora é reduzido a se encontrar os valores dos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . A geometria deste braço reduzido é idêntica àquela apresentada no exemplo anterior, composta por duas juntas  $RR$ , com a única modificação de que os valores de  $x$  e  $y$  são substituídos por  $x_3$  e  $y_3$ . A solução é, portanto, dada por:

$$\theta_2 = \pm \arccos \left[ \frac{(x - a_3 \cos \varphi)^2 + (y - a_3 \sin \varphi)^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 a_1 a_2} \right],$$

e

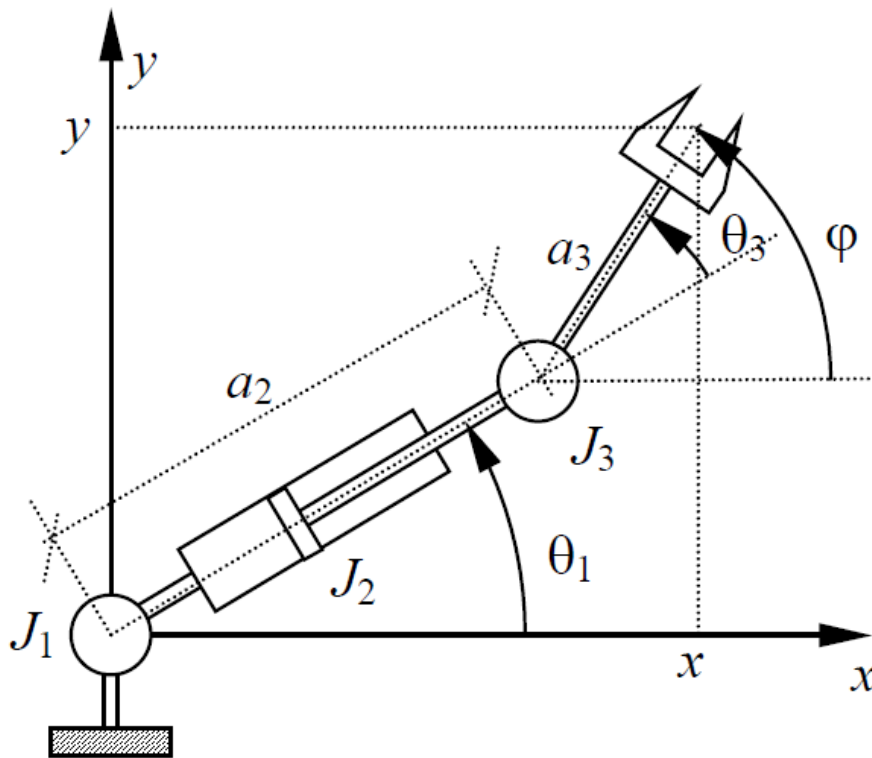
$$\theta_1 = \arctan \left[ \frac{(y - a_3 \sin \varphi) (a_1 + a_2 \cos \theta_2) - (x - a_3 \cos \varphi) a_2 \sin \theta_2}{(x - a_3 \cos \varphi) (a_1 + a_2 \cos \theta_2) + (y - a_3 \sin \varphi) a_2 \sin \theta_2} \right],$$

Finalmente para o cálculo do terceiro ângulo percebe-se que o ângulo  $\varphi$  é igual à soma dos ângulos das juntas, ou seja,  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ . Logo, como  $\varphi$  é conhecido e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  já foram determinados, então

$$\theta_3 = \varphi - \theta_1 - \theta_2$$

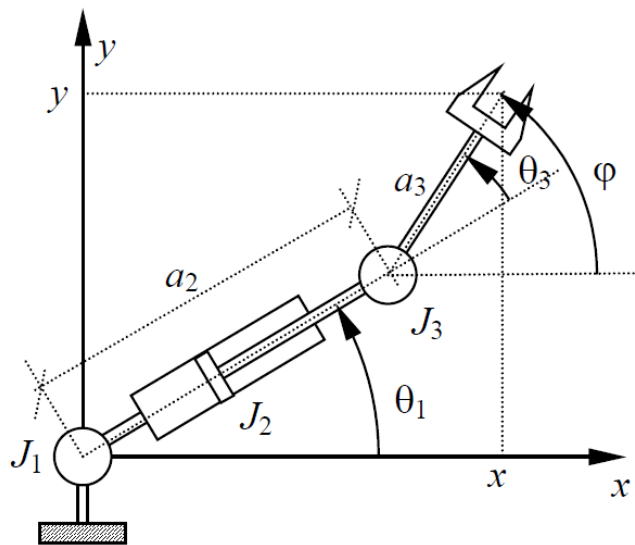


# Manipulador RPR em movimento plano





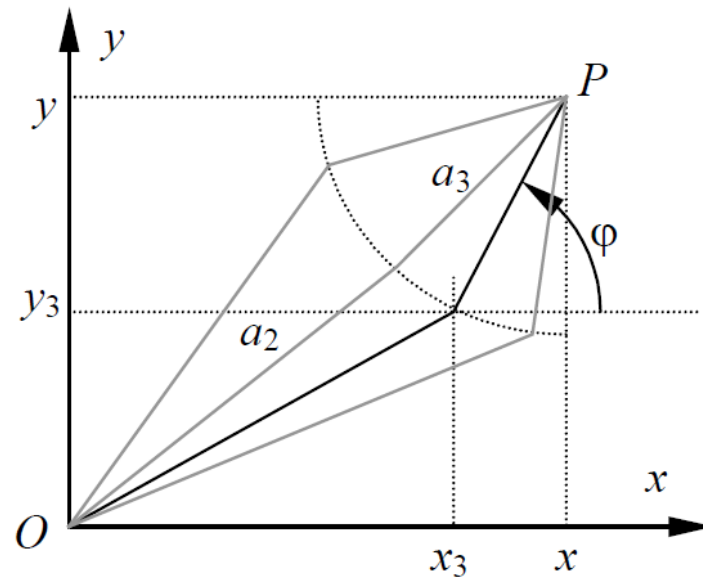
**Cinemática Direta:** idêntica à do primeiro exemplo



$$x = a_2 \cos \theta_1 + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = a_2 \sin \theta_1 + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

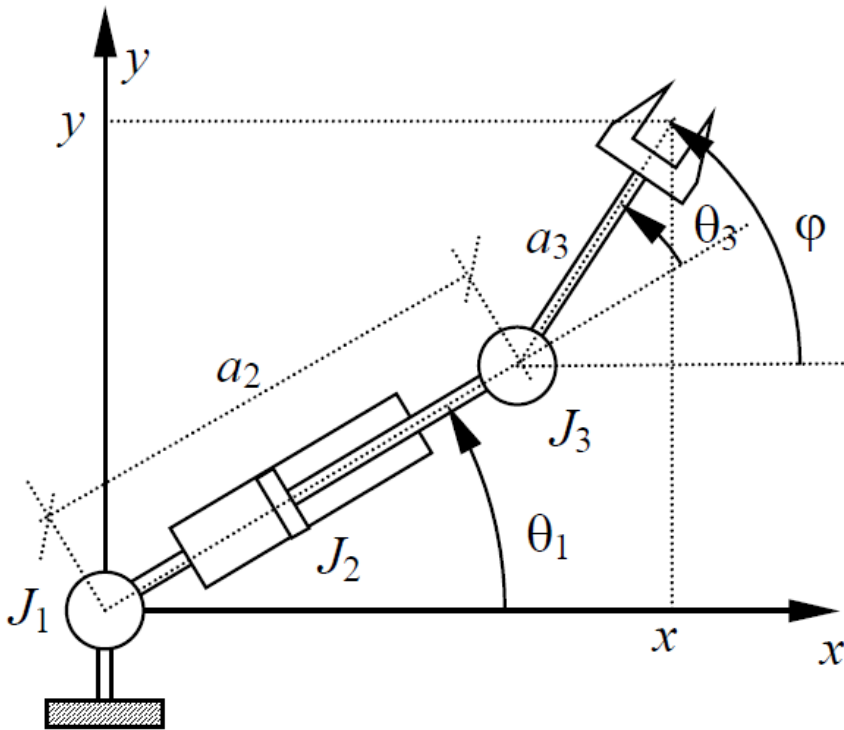
O braço apresenta três variáveis de junta ( $\Theta_1, a_2$  e  $\Theta_3$ ); deve-se obter 3 equações para a cinemática inversa.  
 A cinemática direta fornece apenas duas equações

Infinitas soluções possíveis



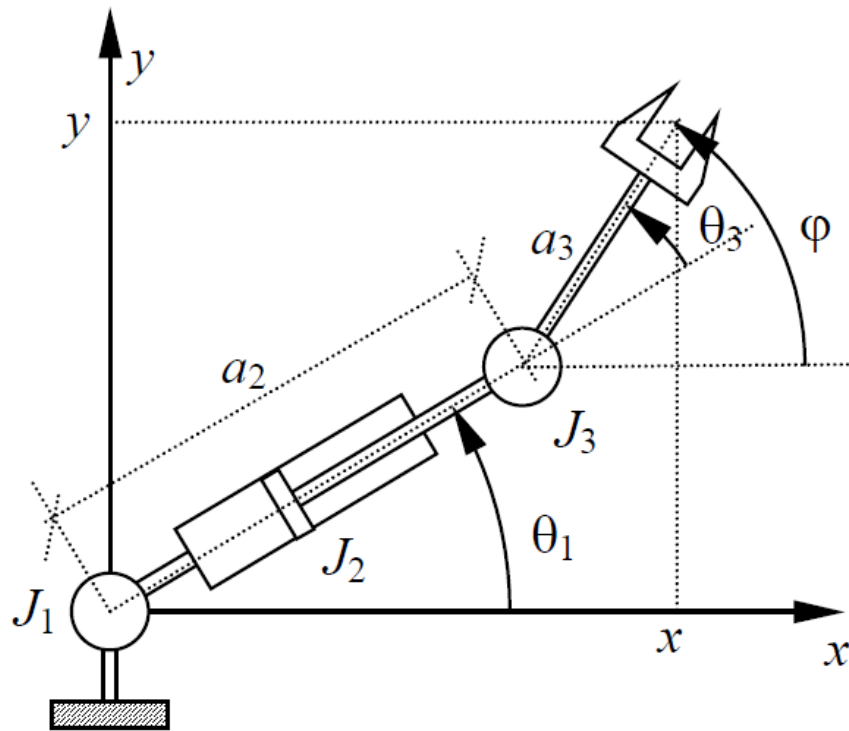
Algumas soluções possíveis para a cinemática inversa

A posição  $x_3, y_3$  da junta  $J_3$  é **fixada** se o ponto  $P = (x, y)$  e o ângulo  $\varphi$  forem conhecidos:



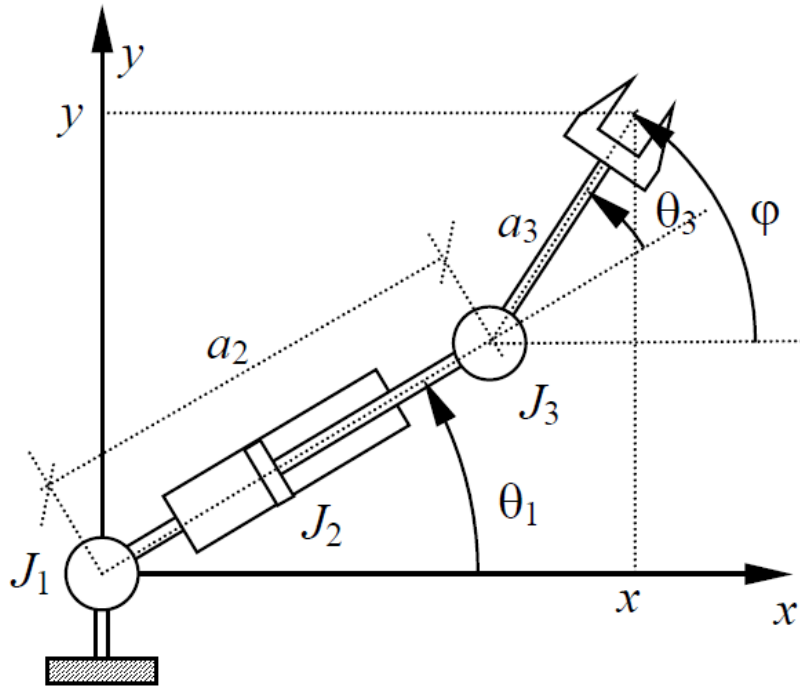
$$x_3 = x - a_3 \cos \varphi$$

$$y_3 = y - a_3 \sin \varphi$$



$$x_3 = a_2 \cos \theta_1$$

$$y_3 = a_2 \sin \theta_1$$

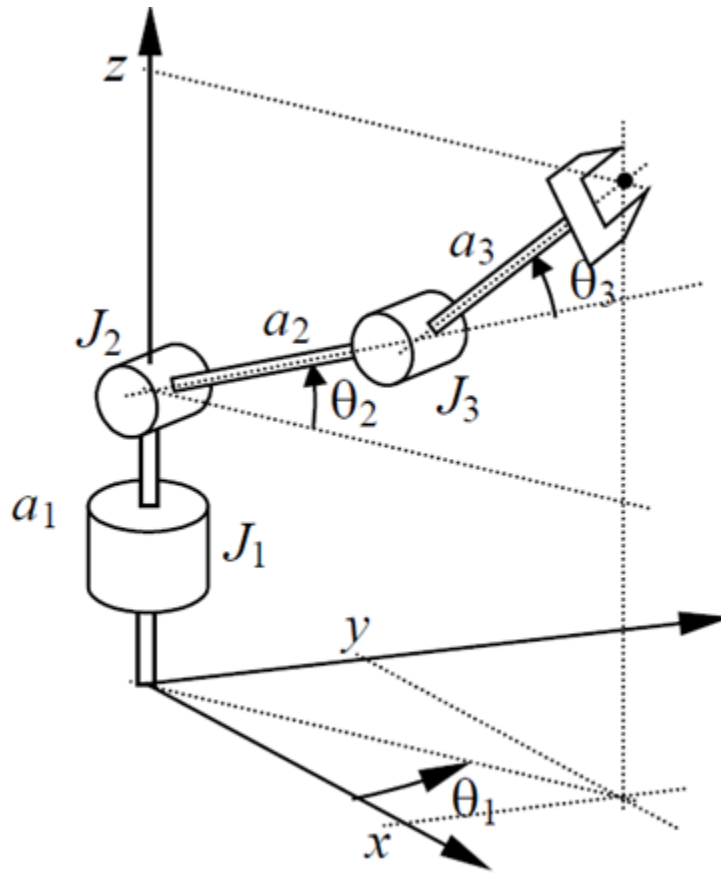


$$\tan \theta_3 = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y - a_3 \cos \varphi}{x - a_3 \sin \varphi},$$

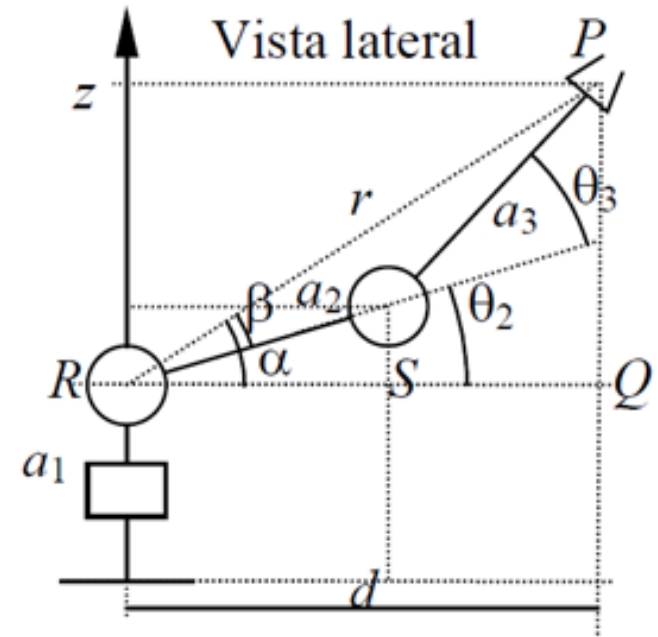
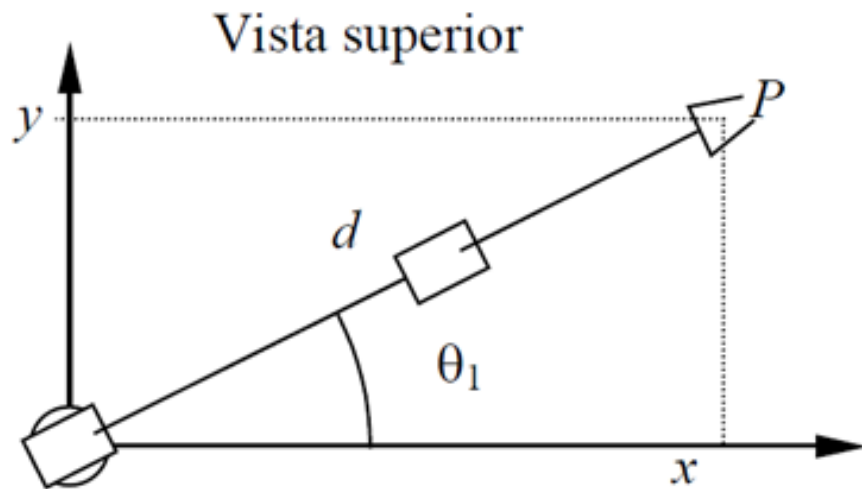
$$a_2 = \sqrt{(x - a_3 \sin \varphi)^2 + (y - a_3 \cos \varphi)^2}$$

$$\theta_3 = \varphi - \theta_1$$

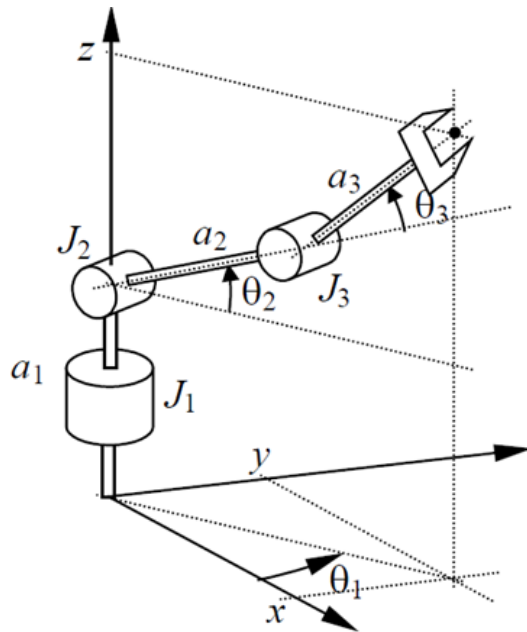
# Manipulador PRR em movimento no espaço







Manipulador PRR em movimento no espaço



## Cinemática Direta

$$x = d \cos \theta_1 = [a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \cos \theta_1$$

$$y = d \sin \theta_1 = [a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \sin \theta_1$$

$$z = a_1 + a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)$$

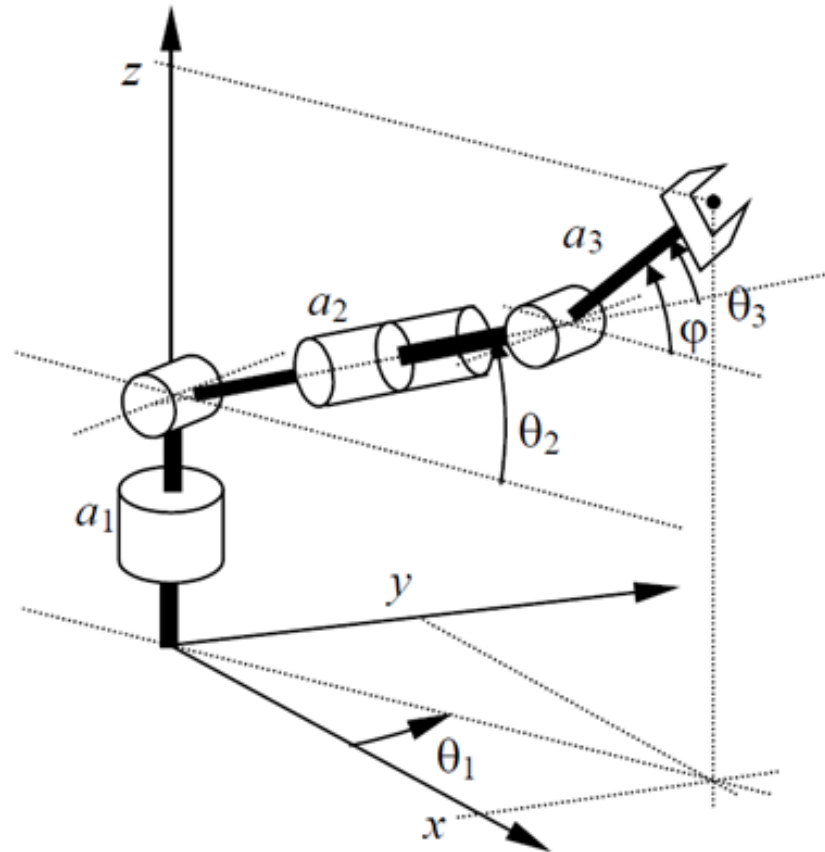
## Cinemática Inversa

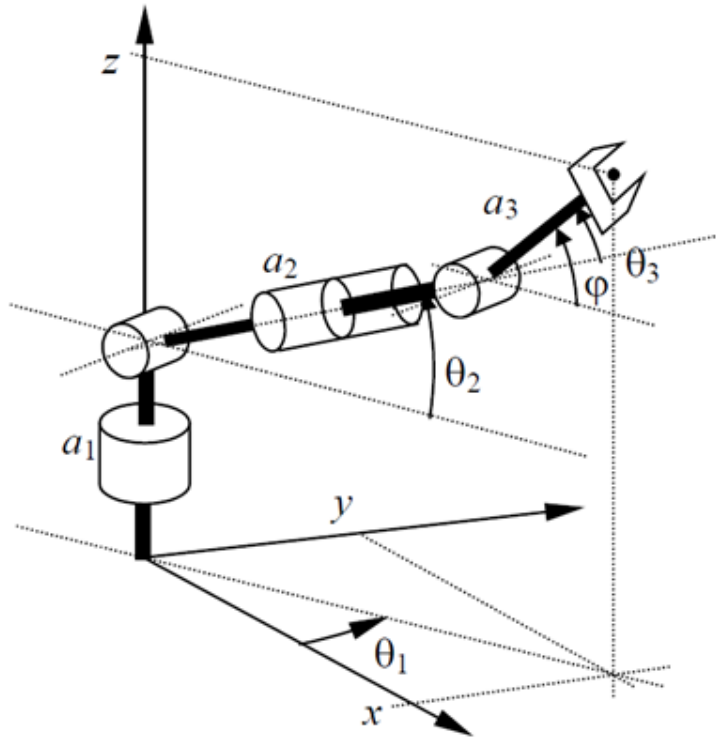
$$\theta_3 = \pm \arccos \left( \frac{x^2 + y^2 + (z - a_1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2 a_2 a_3} \right),$$

$$\theta_2 = \arctan \left[ \frac{(z - a_1) (a_2 + a_3 \cos \theta_3) - \sqrt{x^2 + y^2} a_3 \sin \theta_3}{\sqrt{x^2 + y^2} (a_2 + a_3 \cos \theta_3) + (z - a_1) a_3 \sin \theta_3} \right]$$

$$\theta_1 = \arctan \frac{y}{x}$$

# Manipulador com 4 graus de liberdade





cinemática direta

$$x = d \cos \theta_1 = [a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \cos \theta_1$$

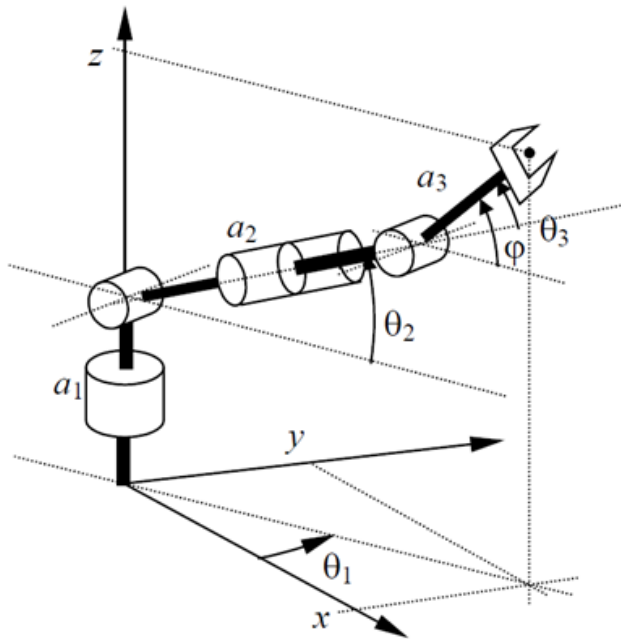
$$y = d \sin \theta_1 = [a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \sin \theta_1$$

$$z = a_1 + a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)$$



## Cinemática Inversa – 4 variáveis de junta $\Theta_1$ , $\Theta_2$ , $\Theta_3$ e $a_2$

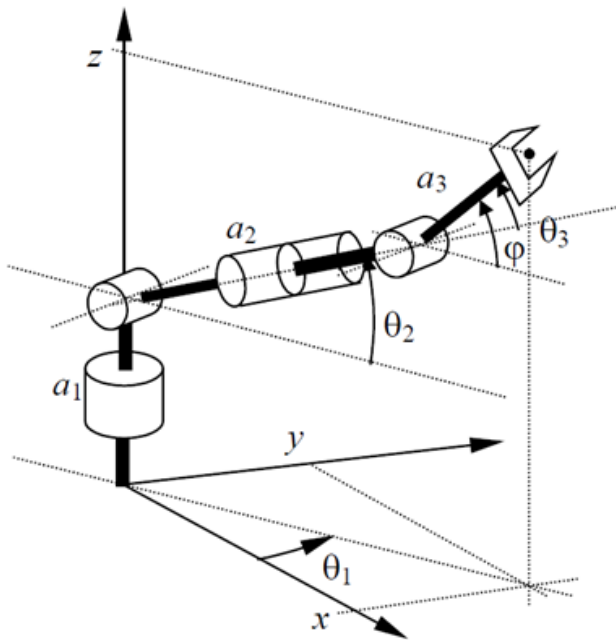
A cinemática direta fornece três equações: necessário utilizar a condição fornecida para o ângulo de punho:  $\varphi = \Theta_2 + \Theta_3$





$$\theta_2 = \arctan \frac{z_4 - a_1}{d_4} = \arctan \frac{z - a_1 - a_3 \sin \varphi}{\sqrt{x^2 + y^2} - a_3 \cos \varphi}$$

$$a_2 = \sqrt{(z_4 - a_1)^2 + d_4^2} = \sqrt{(z - a_1 - a_3 \sin \varphi)^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a_3 \cos \varphi)^2}$$



$$\theta_1 = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\theta_3 = \varphi - \theta_2$$

Necessidade de uma ferramenta  
matemática para agilizar os  
cálculos!

Um vetor de posição,  $v = ai + bj + ck$  pode ser representado no espaço tridimensional pela matriz coluna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Onde  $a = x/w$ ,  $b=y/w$ ,  $c=z/w$  e  $w$  é um fator de escalamento.  
Ex.: Qualquer das matrizes abaixo pode ser usada para representar o vetor  $v=25i + 10j + 20k$

$$\begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 40 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 12,5 \\ 5 \\ 10 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Tais vetores podem ser usados para definir a posição do órgão terminal de um manipulador

Um vetor pode ser transladado ou girado no espaço por meio de uma transformação. Tal transformação é realizada por uma matriz  $\mathbf{H}_{4 \times 4}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{v}$$

O vetor  $\mathbf{u}$  é transformado no vetor  $\mathbf{v}$  pela operação matricial com a matriz  $\mathbf{H}$

A transformação para realizar uma translação de um vetor no espaço numa **distância**  $a$  na **direção**  $x$ ,  $b$  na **direção**  $y$  e  $c$  na **direção**  $z$  é dada por:

$$H = Trans(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex.: Para o vetor  $y=25i + 10j + 20k$  realizar uma translação numa distância de 8 na direção x, 5 na direção y e 0 na direção z, a transformação é dada por:

$$H = \text{Trans}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O vetor de translação:

$$Hy = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 15 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Rotações de um vetor em torno de cada um dos três eixos num ângulo  $\Theta$  podem ser realizadas por transformações de rotações.

Ao longo do eixo x, a transformação de rotação é dada por:

$$Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ao longo do eixo y, a transformação de rotação é dada por:

$$Rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen} \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ao longo do eixo z, a transformação de rotação é dada por:

$$Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Equações cinemáticas usando transformações homogêneas

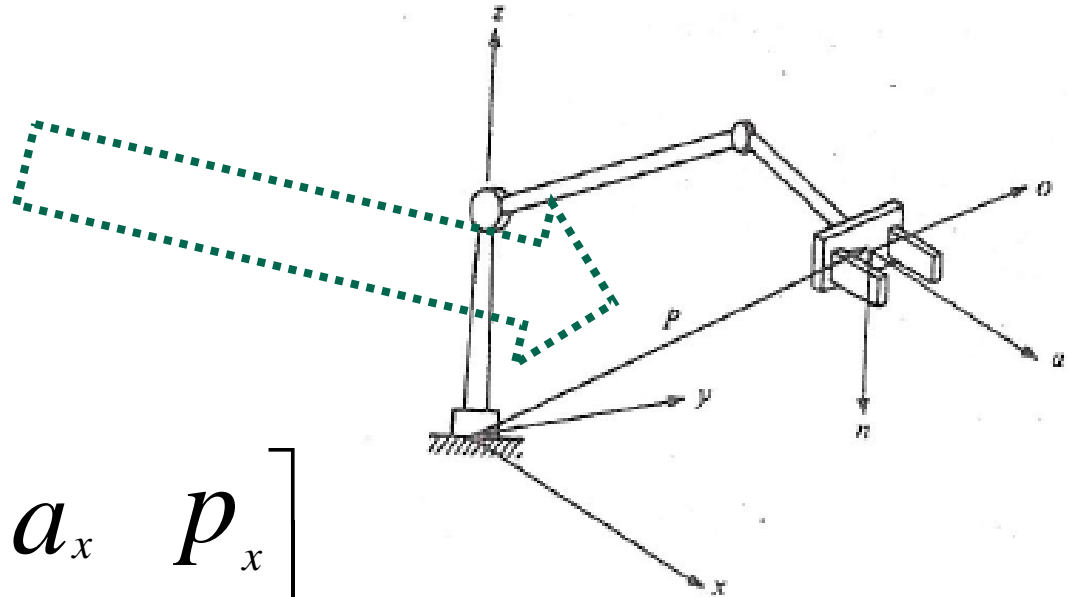
As transformações mostradas anteriormente são da forma:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4 vetores colunas, os quais podem ser usados para definir a posição e orientação do órgão terminal de um manipulador

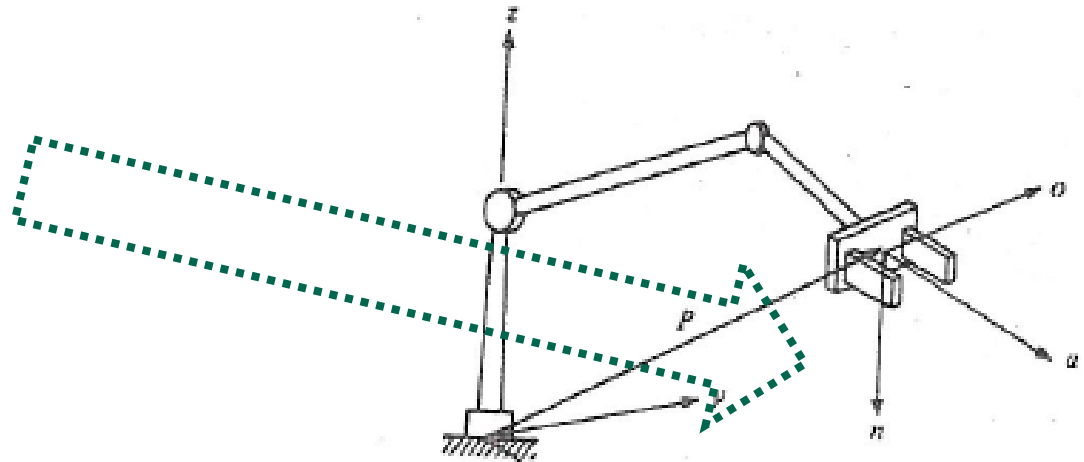
Vetor  $\mathbf{p}$  representa a posição do órgão terminal em relação ao sistema de coordenadas da base.



$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Os vetores  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{o}$  e  $\mathbf{a}$  especificam a orientação do atuador.

Juntos, os três vetores formam um sistema de coordenadas em relação ao sistema de coordenadas da base



$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

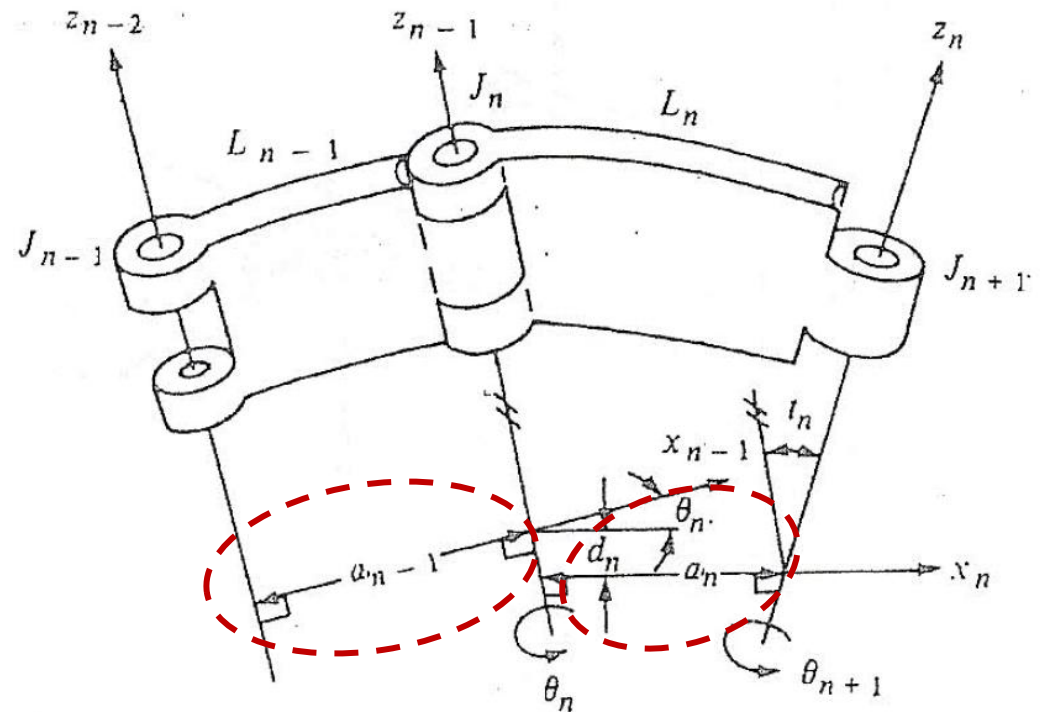


A posição e a orientação do órgão terminal podem ser descritas como o produto de  $n$  transformações homogêneas, uma para cada uma das  $n$  juntas do manipulador.

De forma similar, a posição de toda e qualquer junta do robô pode ser considerada como o produto de transformações que descrevem as rotações e translações das combinações anteriores junta-elo.

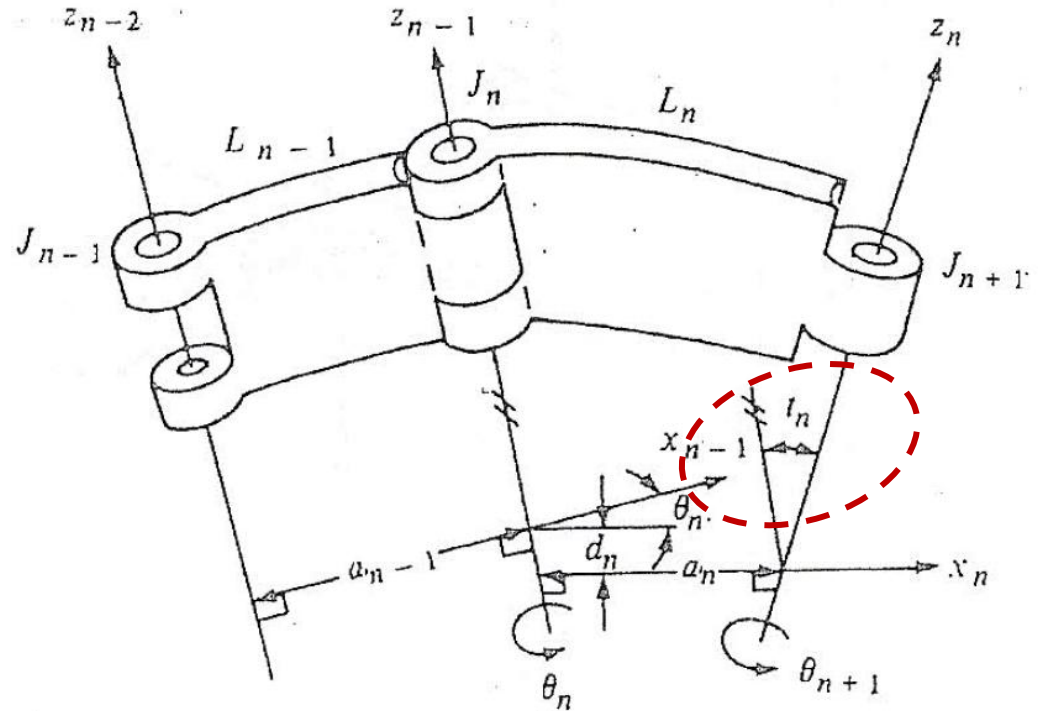
## Variáveis afetadas pela combinação junta-elo

$a_n$ : extensão do elo. Definida como a distância ao longo da linha que é mutuamente perpendicular aos eixos das duas juntas adjacentes.



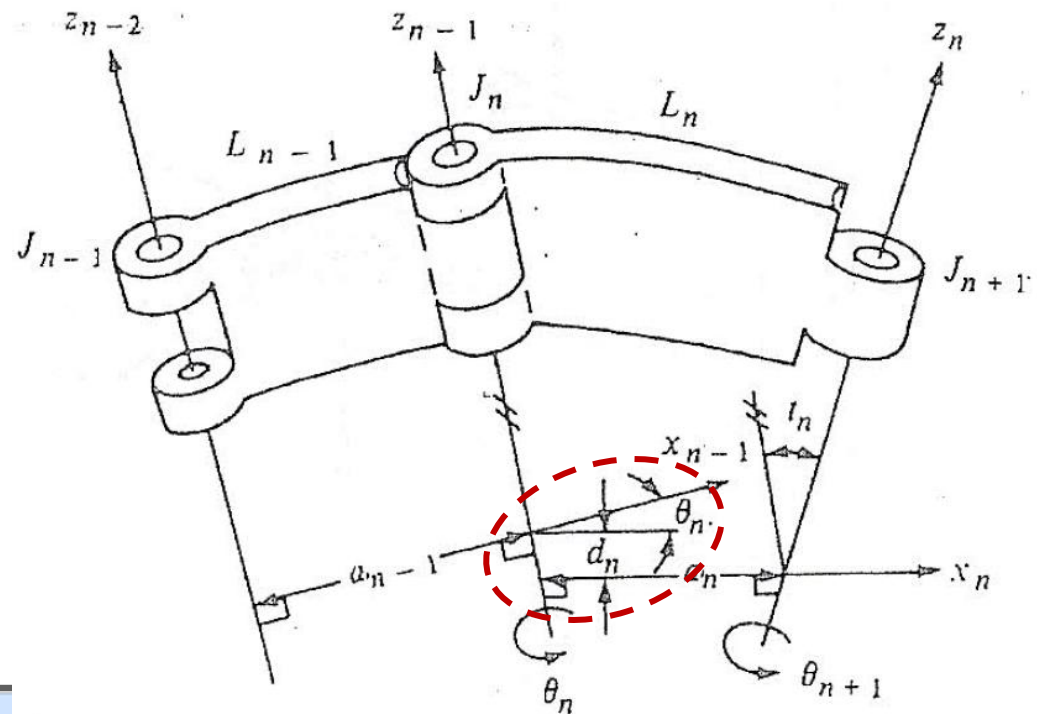
Variáveis afetadas pela combinação junta-elo

Ângulo  $t_n$ : torção entre os eixos das juntas num plano perpendicular a  $a_n$ .



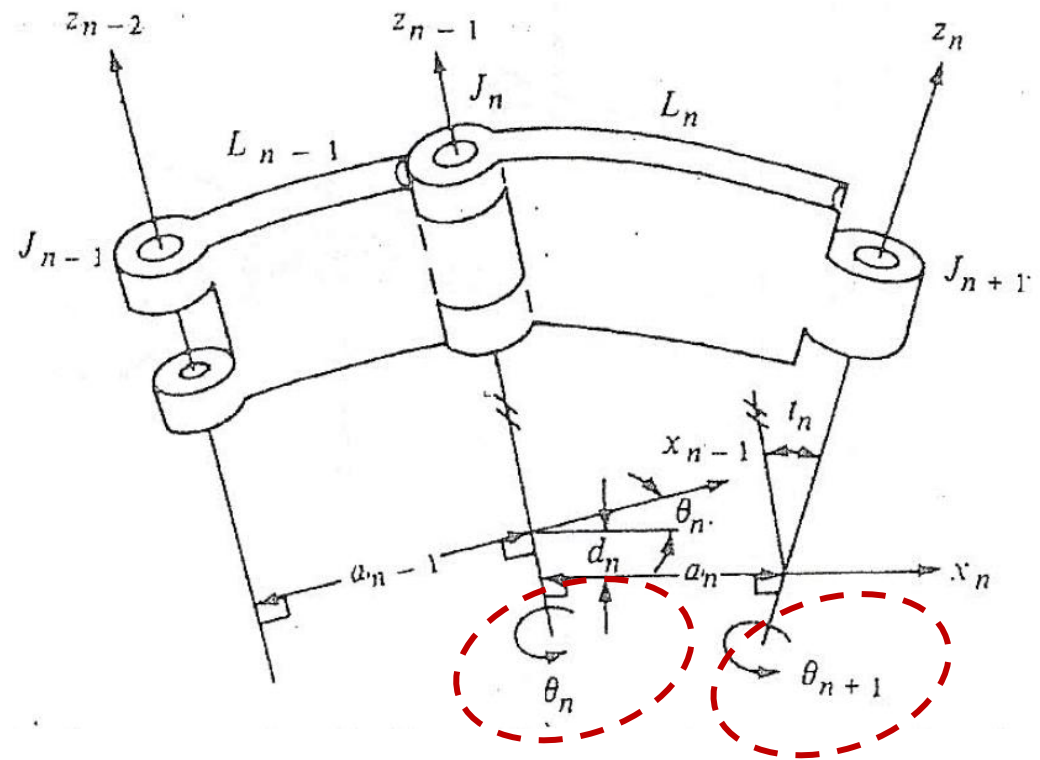
## Variáveis afetadas pela combinação junta-elo

$d_n$ : distância entre a normal  $a_n$  e  $a_{n-1}$  dos dois elos (denominado deslocamento de junta). Para uma junta prismática, é a variável de junta



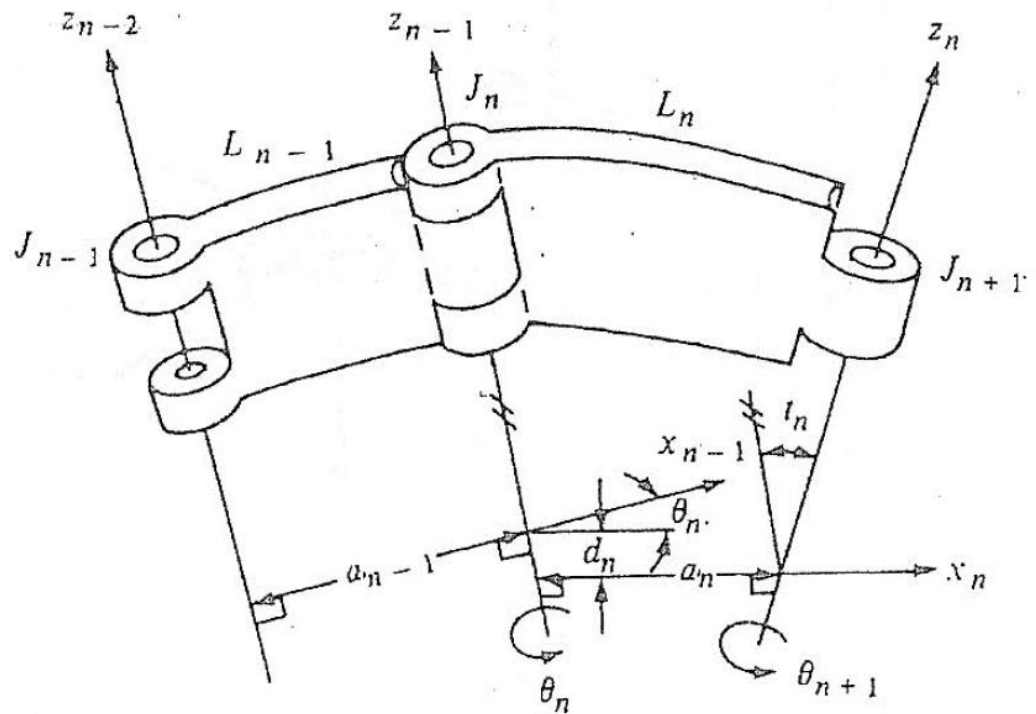
## Variáveis afetadas pela combinação junta-elo

**Ângulo  $\Theta$** : ângulo entre os elos, medido como ângulo entre as normais  $a_n$  e  $a_{n-1}$  e no plano normal ao eixo da junta.





A posição e orientação da junta  $n$  são definidas completamente em relação à junta  $n-1$  pelos quatro parâmetros  $a_n, t_n, \theta_n, d_n$ .



Pode-se atribuir um sistema de coordenadas para cada elo e estabelecer as relações entre elos subsequentes, usando transformações para cada uma das quatro variáveis.

Ou seja, o sistema de coordenadas está embutido na extremidade do elo na junta sucessiva.

Usando as transformações obtidas anteriormente para rotação e translação, pode-se desenvolver a transformação que relaciona o sistema de coordenadas do elo n com o elo n-1.

Para uma junta rotativa

$$A_n = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \cos t & \text{sen } \theta \text{sen } t & a \cos \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \cos t & -\cos \theta \text{sen } t & a \text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } t & \cos t & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para uma junta prismática, o valor de  $a = 0$

A descrição da extremidade de um elo em relação ao sistema de coordenadas de referência do manipulador pode ser descrito como o sistema de coordenadas do elo  $T_n$ , onde:

$$T_n = A_1 A_2 \dots A_n$$

A descrição da extremidade de um elo em relação seu predecessor pode ser descrito em função das matrizes A:

$${}^m \mathbf{T}_n = \mathbf{A}_{m+1} \dots \mathbf{A}_{n-1} \mathbf{A}_n$$

Diagram illustrating the relationship between the current link (Elo atual) and the previous link (Elo anterior) in a chain. The diagram shows the equation  ${}^m \mathbf{T}_n = \mathbf{A}_{m+1} \dots \mathbf{A}_{n-1} \mathbf{A}_n$ . Red dashed lines and arrows indicate that the superscript  $m$  is associated with the previous link (Elo anterior) and the subscript  $n$  is associated with the current link (Elo atual).

Exemplo:

$${}^0 \mathbf{T}_1 = \mathbf{A}_1$$

$${}^0 \mathbf{T}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$$

$${}^0 \mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$$



A descrição da extremidade de um elo em relação seu predecessor pode ser descrito em função das matrizes A:

$${}^m T_n = A_{m+1} \dots A_{n-1} A_n$$

Diagram illustrating the relationship between adjacent links in a chain. The matrix  ${}^m T_n$  is shown. Red dashed lines and arrows indicate the following:

- A red dashed circle around the superscript  $m$  has an arrow pointing to the text "Elo anterior" (Previous link).
- A red dashed circle around the subscript  $n$  has an arrow pointing to the text "Elo atual" (Current link).

Exemplo:

$${}^3 T_6 = A_4 A_5 A_6$$

$${}^0 T_6 = {}^0 T_3 {}^3 T_6$$

$$= A_1 A_2 A_3 {}^3 T_6$$

Para calcular a matriz T, deve-se primeiro calcular as n A matrizes.

Para tal, deve-se substituir os valores de a,  $\Theta$ , d e t na equação 1:

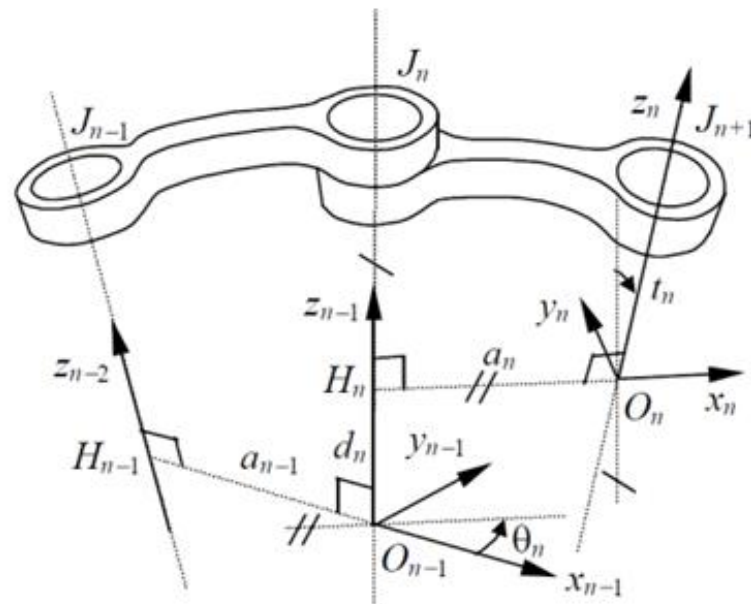
(equação 1)

$$A_n = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \cos t & \text{sen } \theta \text{sen } t & a \cos \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \cos t & -\cos \theta \text{sen } t & a \text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } t & \cos t & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Notação de Denavit-Hartenberg

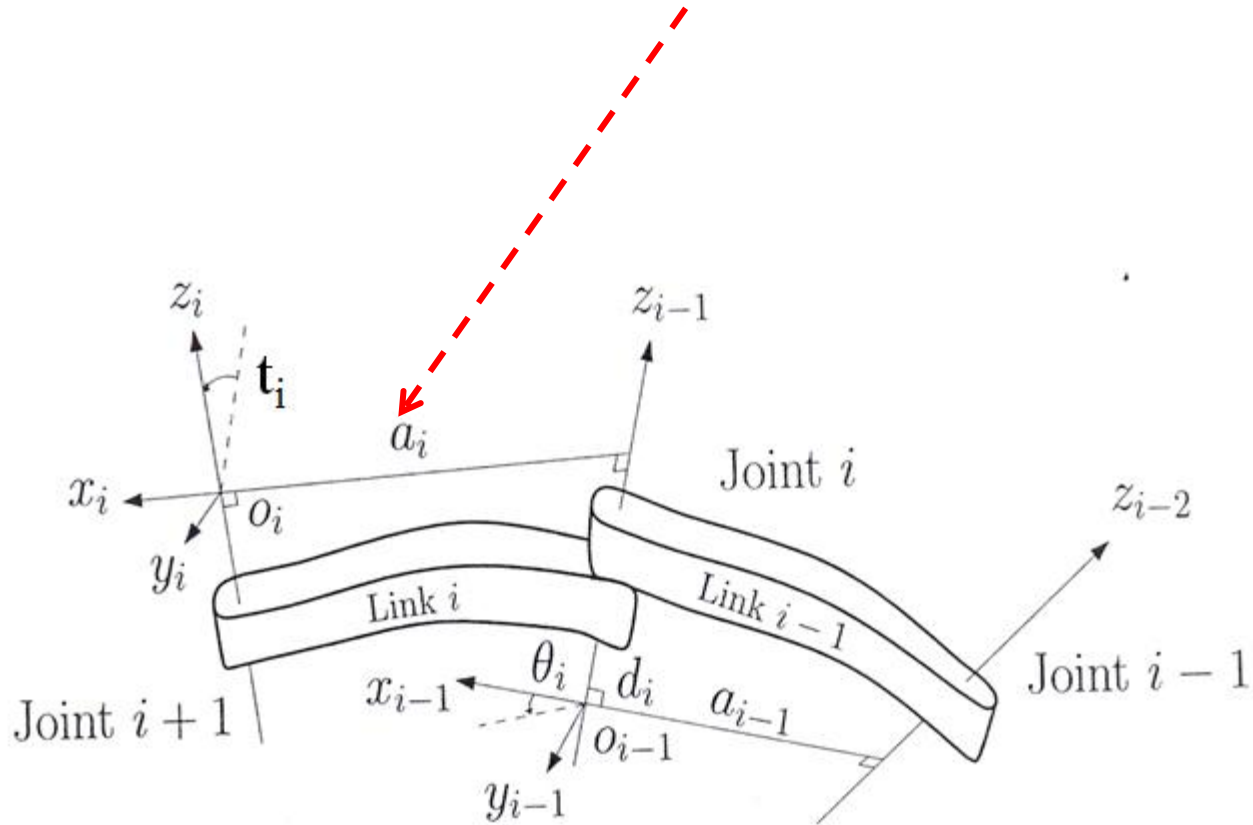
### Parâmetros de Denavit-Hartenberg

Permitem obter o conjunto de equações que descrevem a cinemática de uma junta com relação à junta seguinte na cadeia cinemática, e vice-versa;

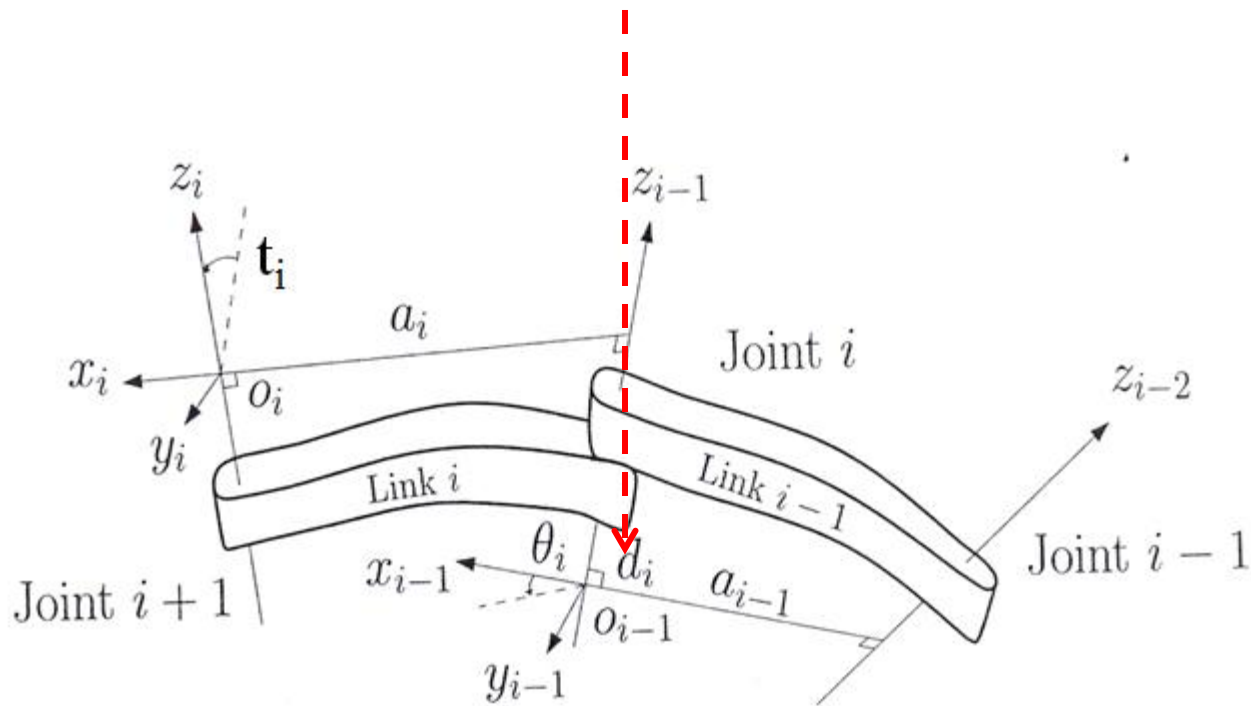


Geometria de juntas rotativas e parâmetros das juntas.

- $a_i =$  distância ao longo de  $x_i$  da intersecção dos eixos  $x_i$  e  $z_{i-1}$  até  $O_i$

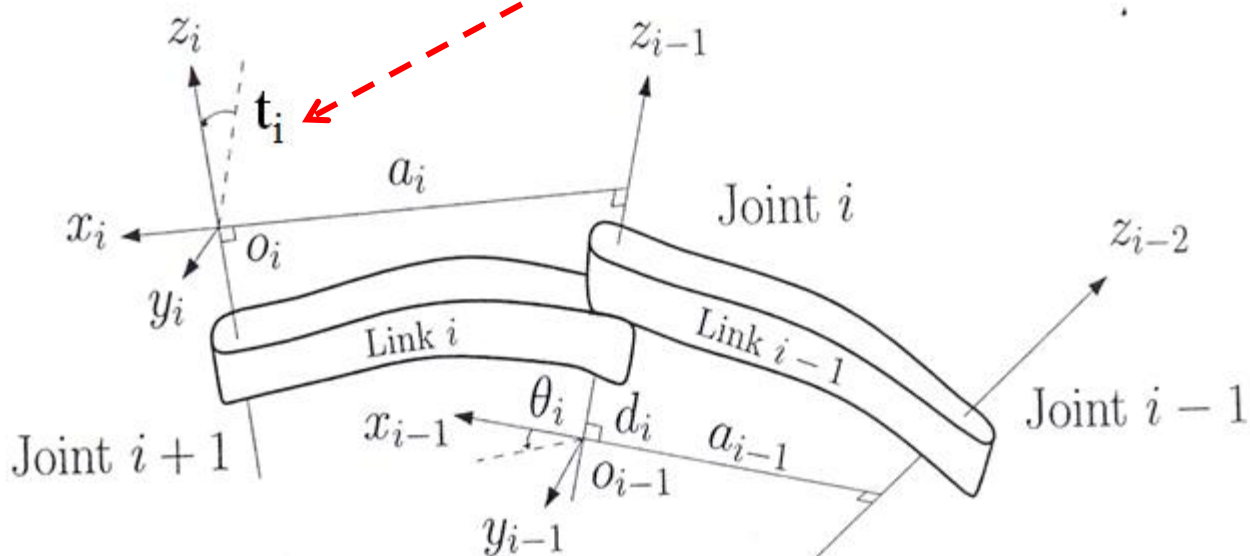


- $d_i$  = distância ao longo  $z_{i-1}$  de  $O_{i-1}$  até a intersecção dos eixos  $x_i$  e  $z_{i-1}$ .  $d_i$  é variável se a junta  $i$  é prismática.



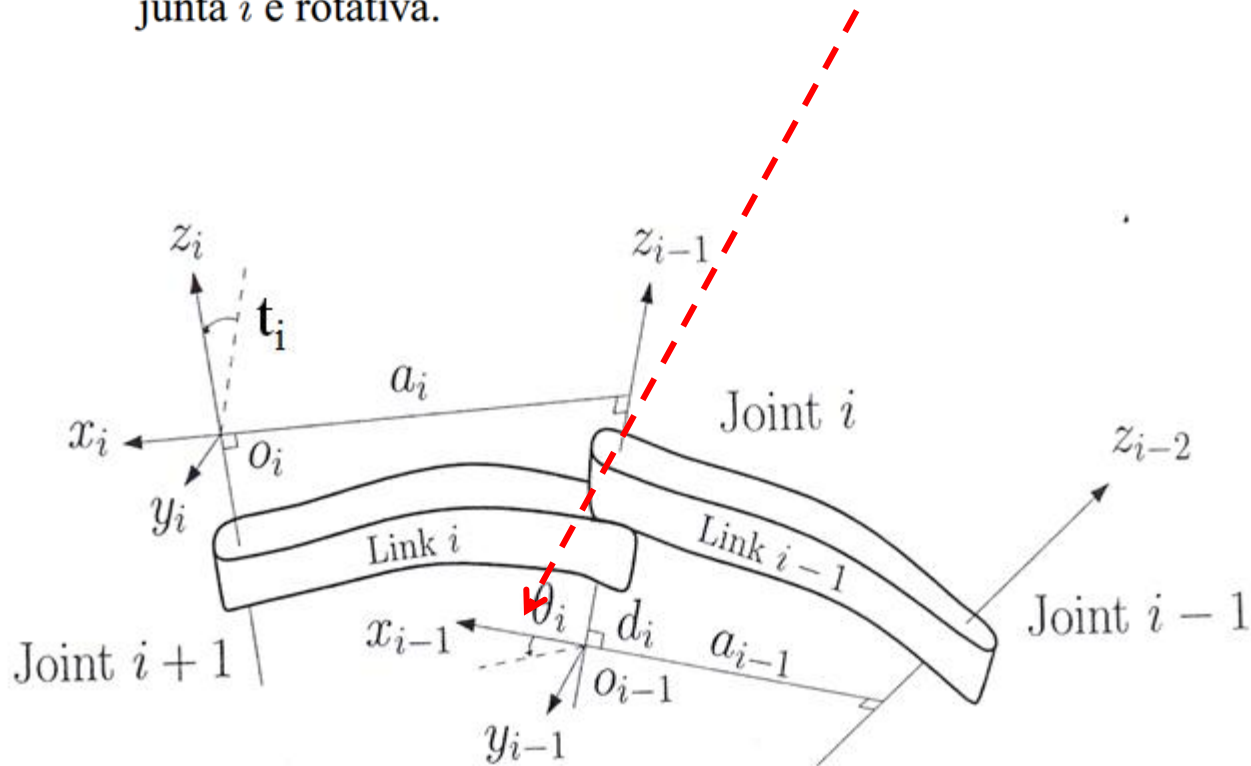


- $t_i = \text{ângulo entre } z_{i-1} \text{ e } z_i \text{ medido em torno de } x_i$

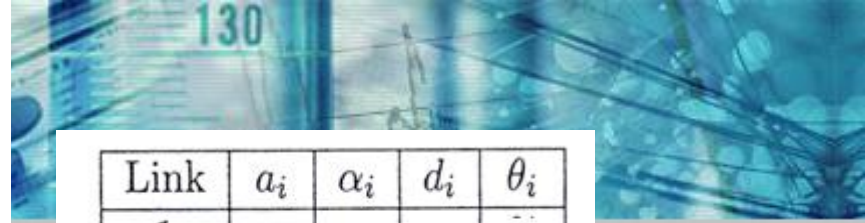
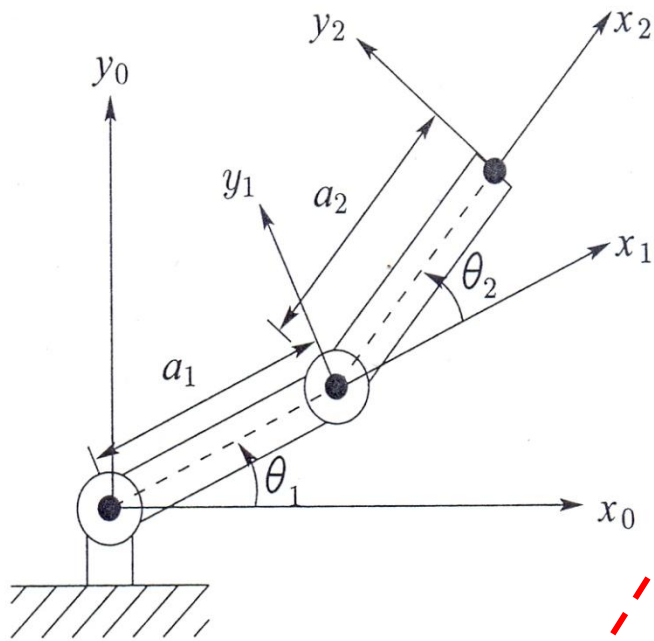




- $\theta_i =$  o ângulo entre  $x_{i-1}$  e  $x_i$  medido em torno de  $z_{i-1}$ .  $\theta_i$  é variável se a junta  $i$  é rotativa.



Exemplos:

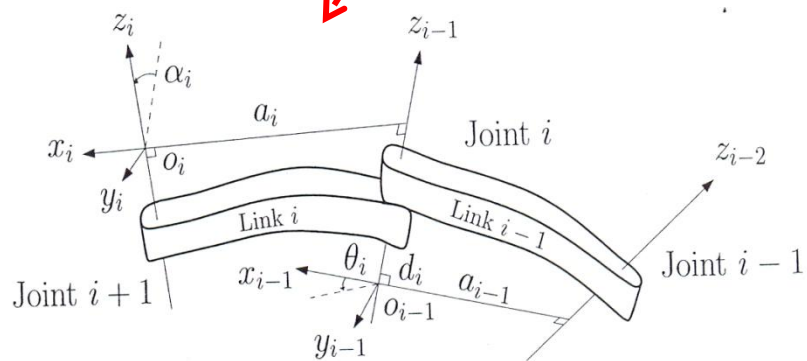


Link	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$a_1$			$\theta_1$
2	$a_2$			$\theta_2$

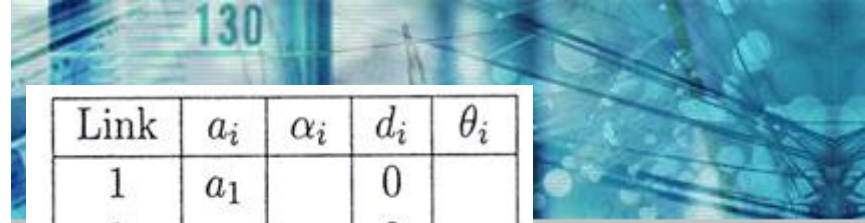
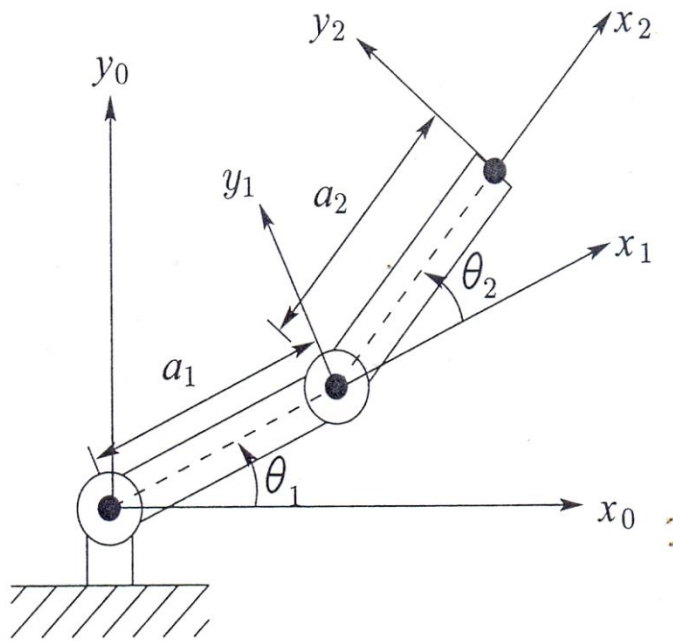
$a_1$  = Distância ao longo de  $x_1$  medida da intersecção dos eixos  $x_1$  e  $z_0$  até  $O_1$

$a_2$  = Distância ao longo de  $x_2$  medida da intersecção dos eixos  $x_2$  e  $z_1$  até  $O_2$

Two-link planar manipulator. The z-axes all point out of the page, and are not shown in the figure.



**an:** extensão do elo. Definida como a distância ao longo da linha que é mutuamente perpendicular aos eixos das duas juntas adjacentes

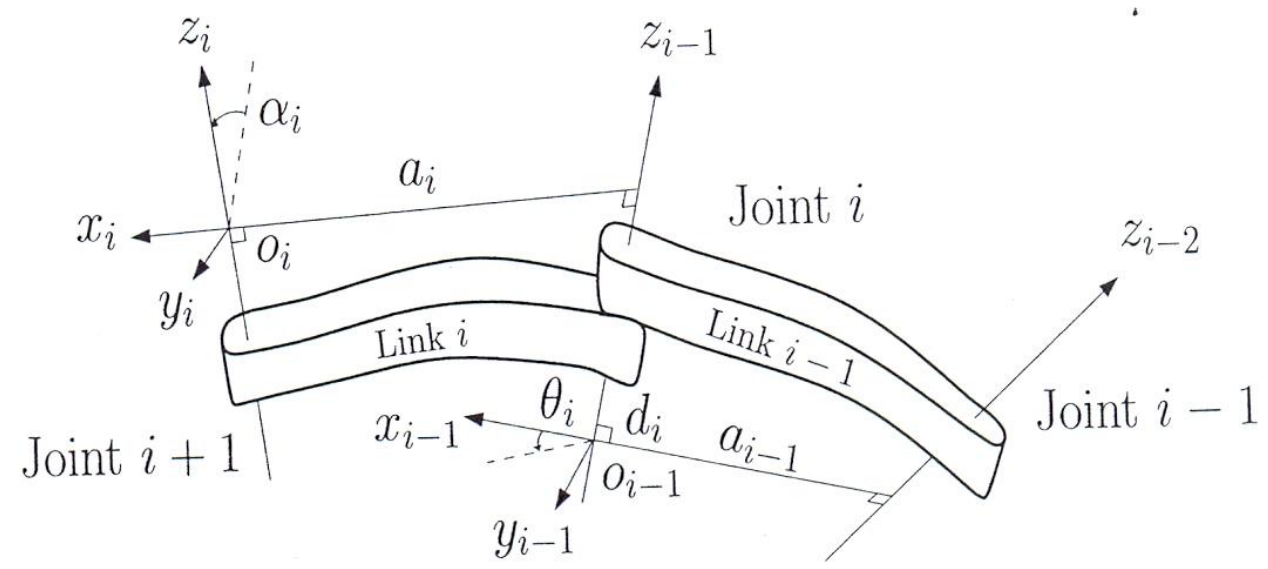


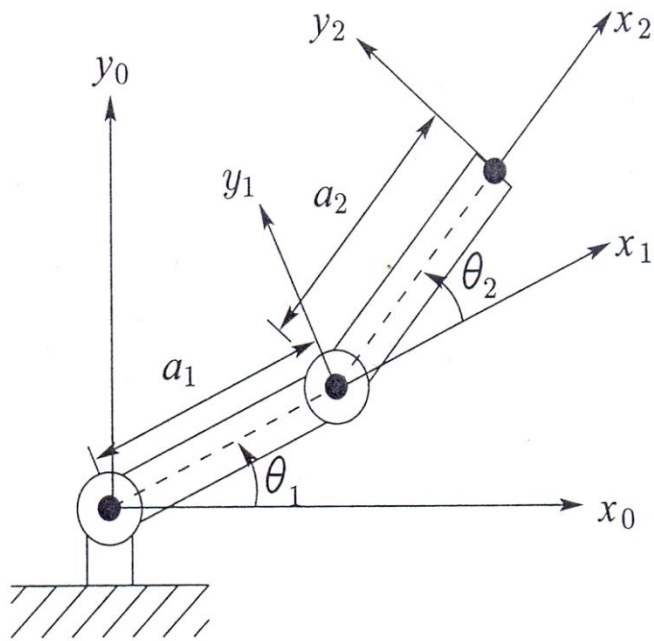
Link	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$a_1$		0	
2	$a_2$		0	

$d_1 =$  Distância ao longo de  $z_0$  medida de  $O_0$  até a intersecção dos eixos  $x_1$  e  $z_0$ .

$d_2 =$  Distância ao longo de  $z_1$  medida de  $O_1$  até a intersecção dos eixos  $x_2$  e  $z_1$ .

Two-link planar manipulator. The z-axes all point out of the page, and are not shown in the figure.

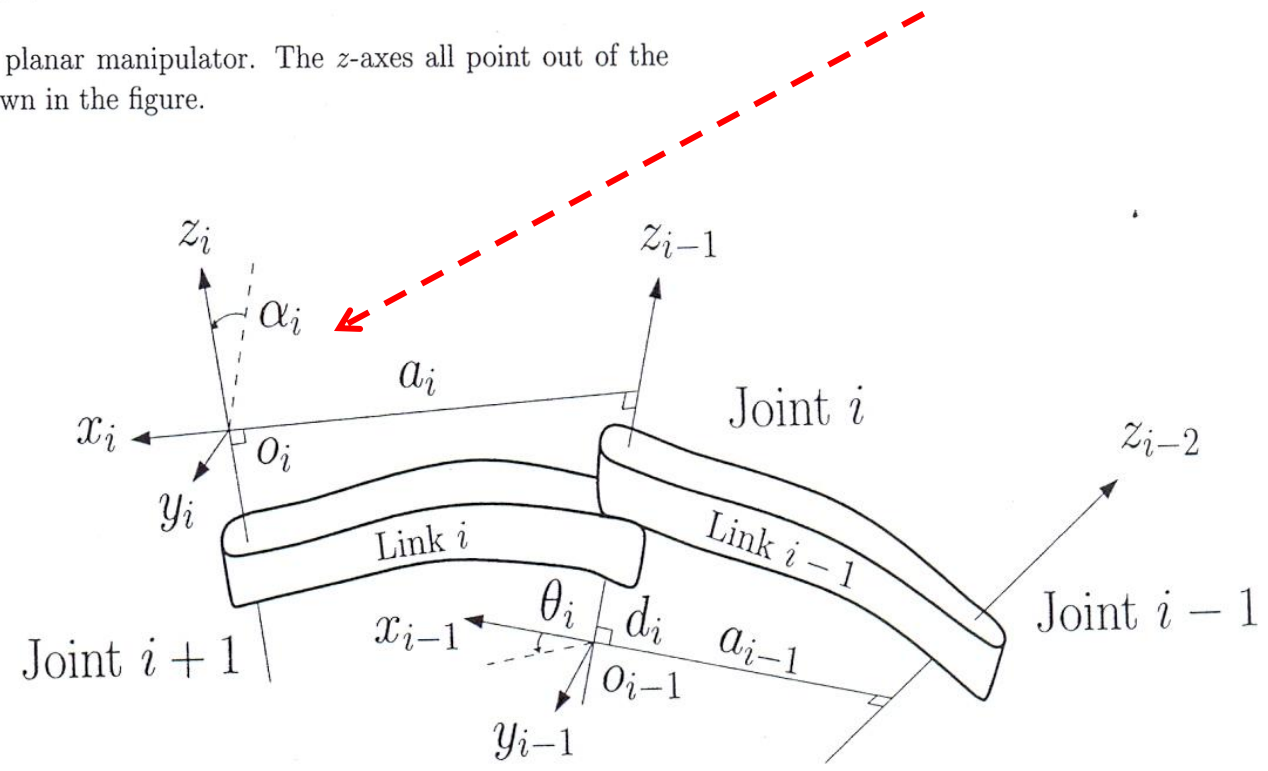




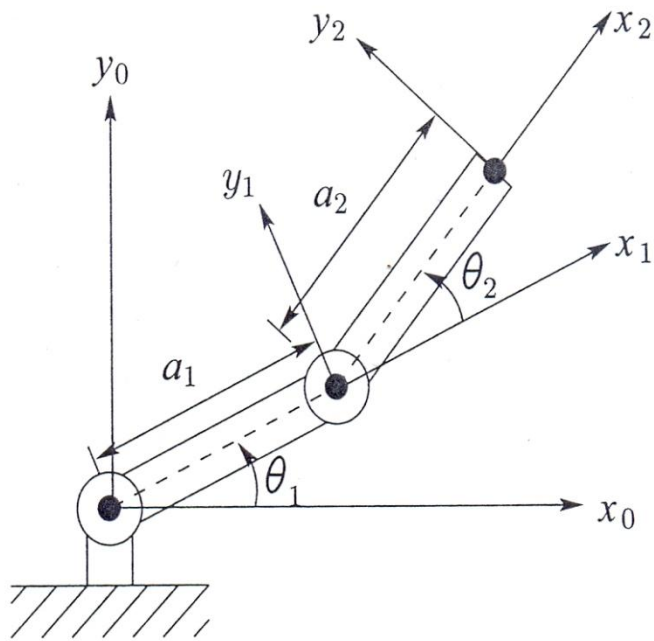
Link	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$a_1$	0	0	
2	$a_2$	0	0	

$\alpha_1 = \text{\AA ngulo entre } z_0 \text{ e } z_1 \text{ medido em torno de } x_1$   
 $\alpha_2 = \text{\AA ngulo entre } z_1 \text{ e } z_2 \text{ medido em torno de } x_2$

Two-link planar manipulator. The z-axes all point out of the page, and are not shown in the figure.







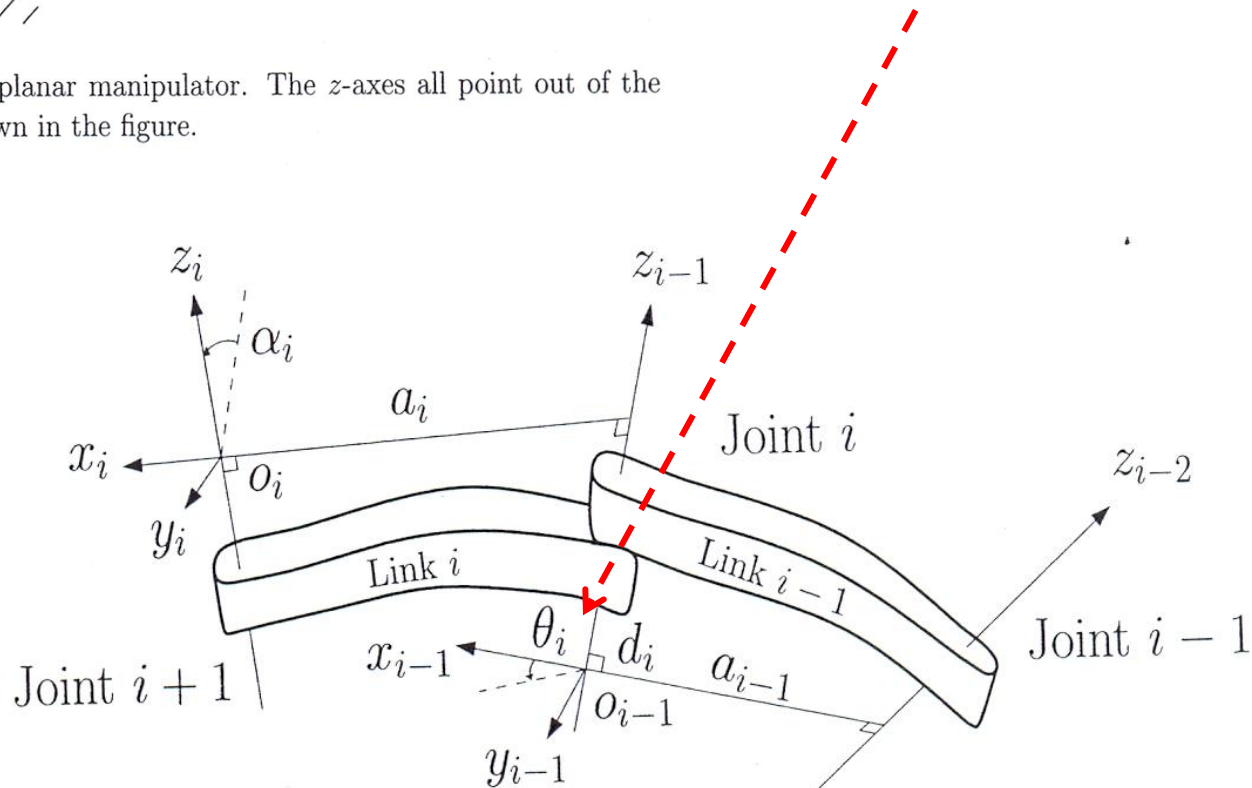
DH parameters for 2-link planar manipulator.

Link	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$a_1$	0	0	$\theta_1^*$
2	$a_2$	0	0	$\theta_2^*$

\* variable

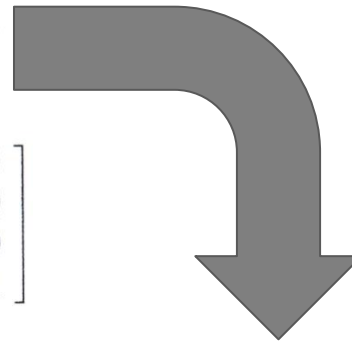
$\theta_1 = \hat{\text{ângulo}} \text{ entre } x_0 \text{ e } x_1 \text{ medido em torno de } z_0$   
 $\theta_2 = \hat{\text{ângulo}} \text{ entre } x_1 \text{ e } x_2 \text{ medido em torno de } z_1$

Two-link planar manipulator. The z-axes all point out of the page, and are not shown in the figure.





$$\begin{aligned}
 A_i &= \text{Rot}_{z,\theta_i} \text{Trans}_{z,d_i} \text{Trans}_{x,a_i} \text{Rot}_{x,\alpha_i} \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

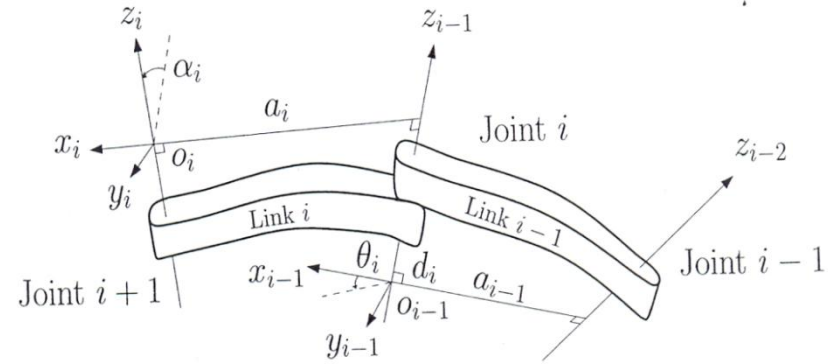
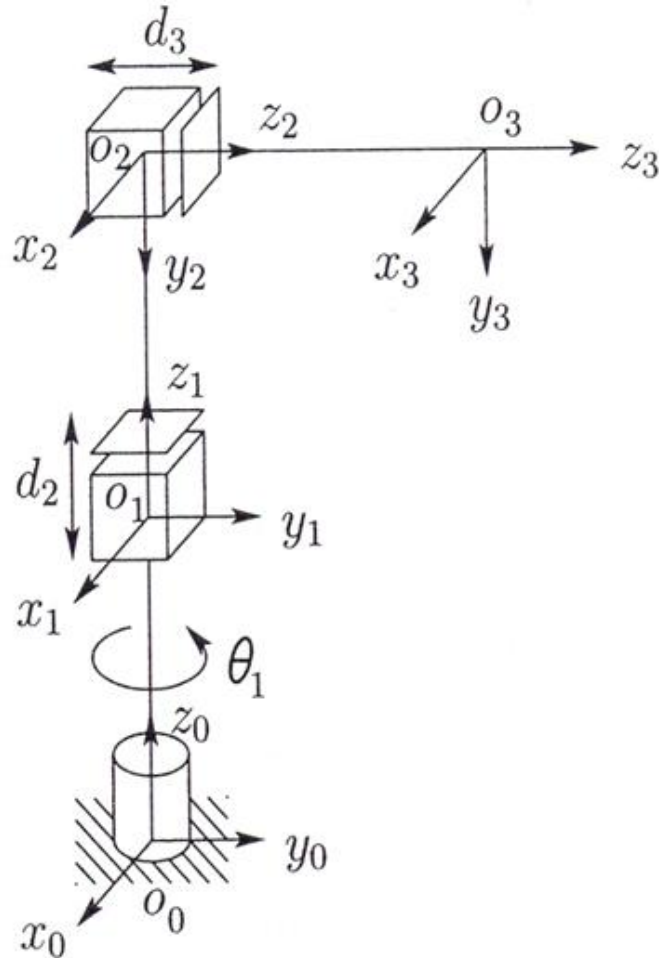


$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^0 = A_1$$

$$T_2^0 = A_1A_2$$

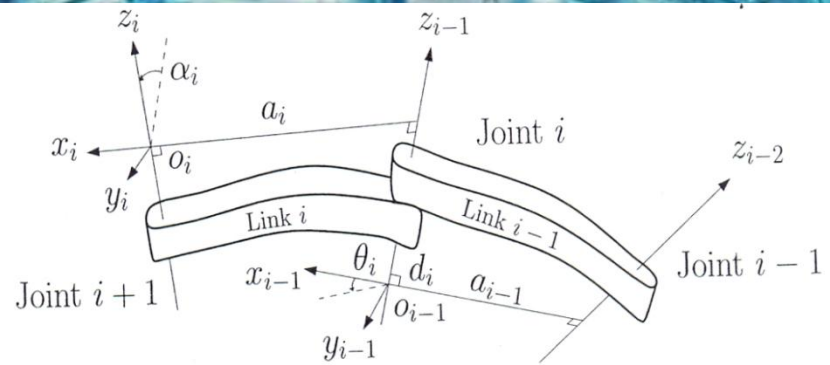
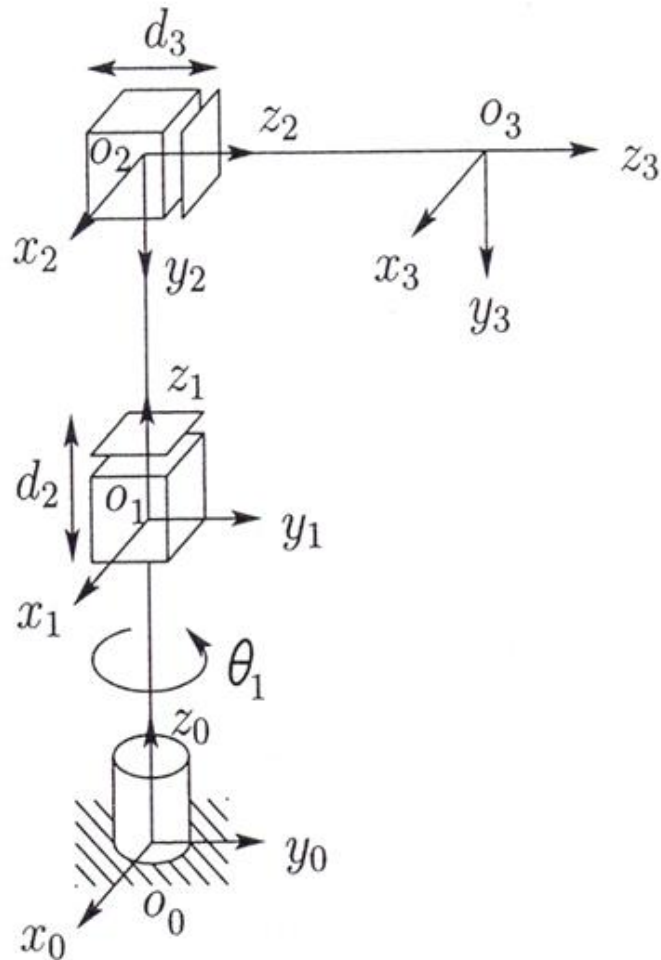


$a_1 =$  Distância ao longo de  $x_1$  medida da intersecção dos eixos  $x_1$  e  $z_0$  até  $O_1$

$a_2 =$  Distância ao longo de  $x_2$  medida da intersecção dos eixos  $x_2$  e  $z_1$  até  $O_2$

$a_3 =$  Distância ao longo de  $x_3$  medida da intersecção dos eixos  $x_3$  e  $z_2$  até  $O_3$

Link	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0			
2	0			
3	0			



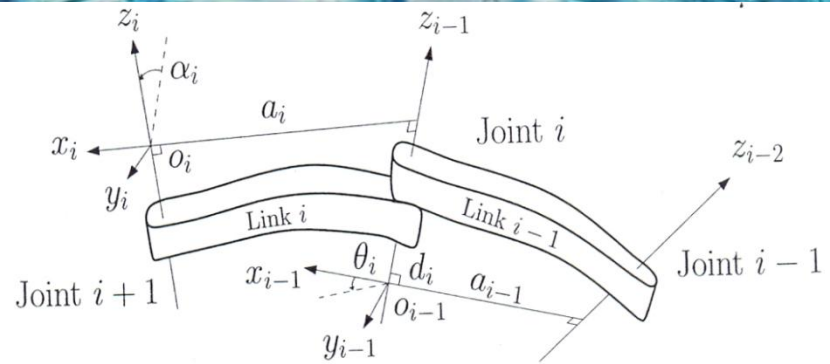
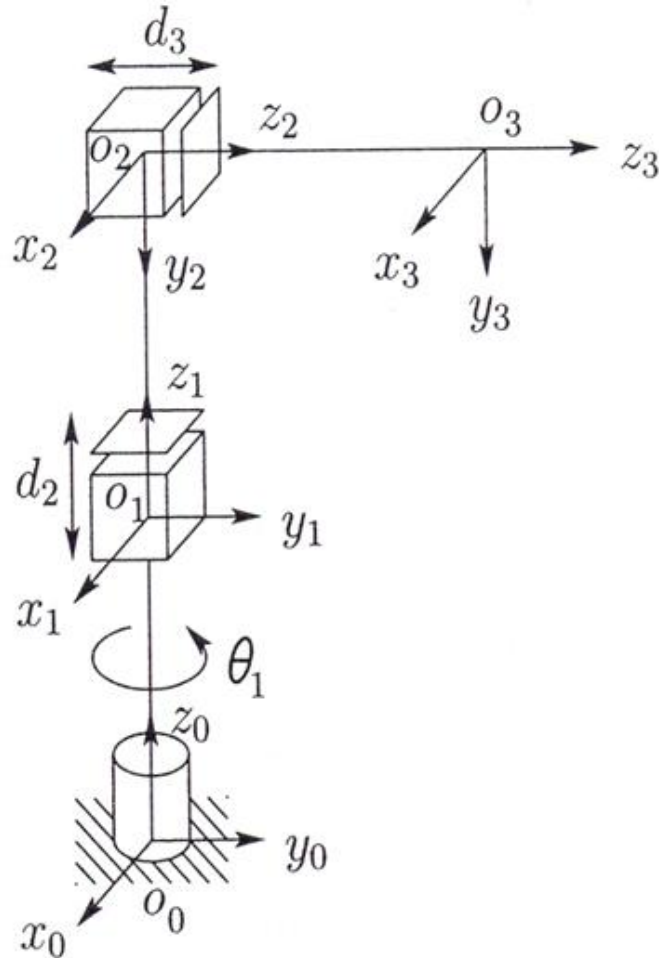
$d_1 =$  Distância ao longo de  $z_0$  medida de  $O_0$  até a intersecção dos eixos  $x_1$  e  $z_0$ .

$d_2 =$  Distância ao longo de  $z_1$  medida de  $O_1$  até a intersecção dos eixos  $x_2$  e  $z_1$ .

$d_3 =$  Distância ao longo de  $z_2$  medida de  $O_2$  até a intersecção dos eixos  $x_3$  e  $z_2$ .

Link	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0		$d_1$	
2	0		$d_2^*$	
3	0		$d_3^*$	

\* variable



$\alpha_1 = \text{\AA ngulo entre } z_0 \text{ e } z_1 \text{ medido em torno de } x_1$

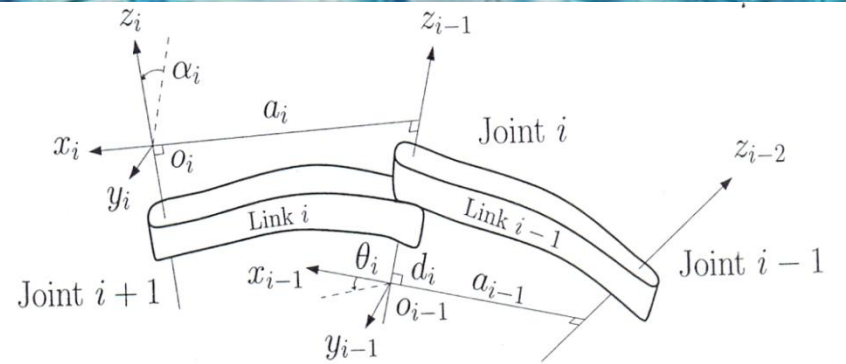
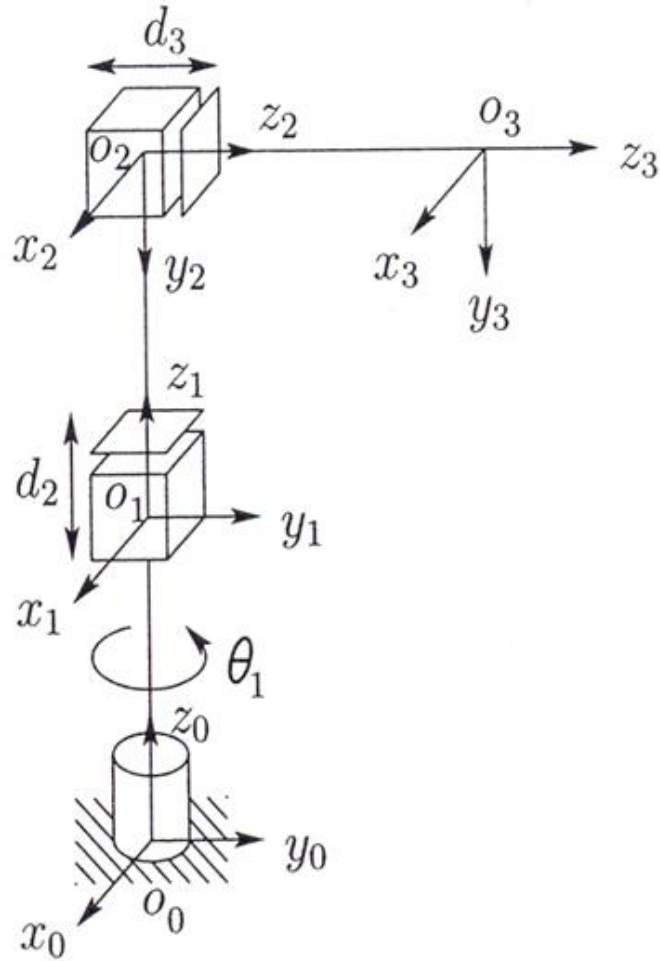
$\alpha_2 = \text{\AA ngulo entre } z_1 \text{ e } z_2 \text{ medido em torno de } x_2$

$\alpha_3 = \text{\AA ngulo entre } z_2 \text{ e } z_3 \text{ medido em torno de } x_3$

Link	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	$d_1$	
2	0	-90	$d_2^*$	
3	0	0	$d_3^*$	

\* variable





$\theta_1 = \hat{\text{ângulo}} \text{ entre } x_0 \text{ e } x_1 \text{ medido em torno de } z_0$   
 $\theta_2 = \hat{\text{ângulo}} \text{ entre } x_1 \text{ e } x_2 \text{ medido em torno de } z_1$   
 $\theta_3 = \hat{\text{ângulo}} \text{ entre } x_2 \text{ e } x_3 \text{ medido em torno de } z_2$

Link	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	$d_1$	$\theta_1^*$
2	0	-90	$d_2^*$	0
3	0	0	$d_3^*$	0

\* variable

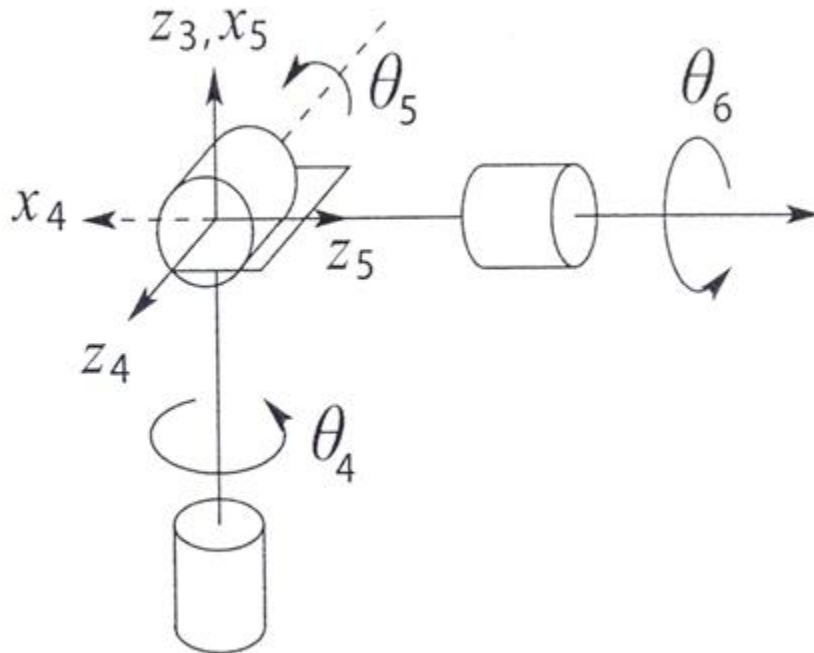


$$A_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



DH parameters

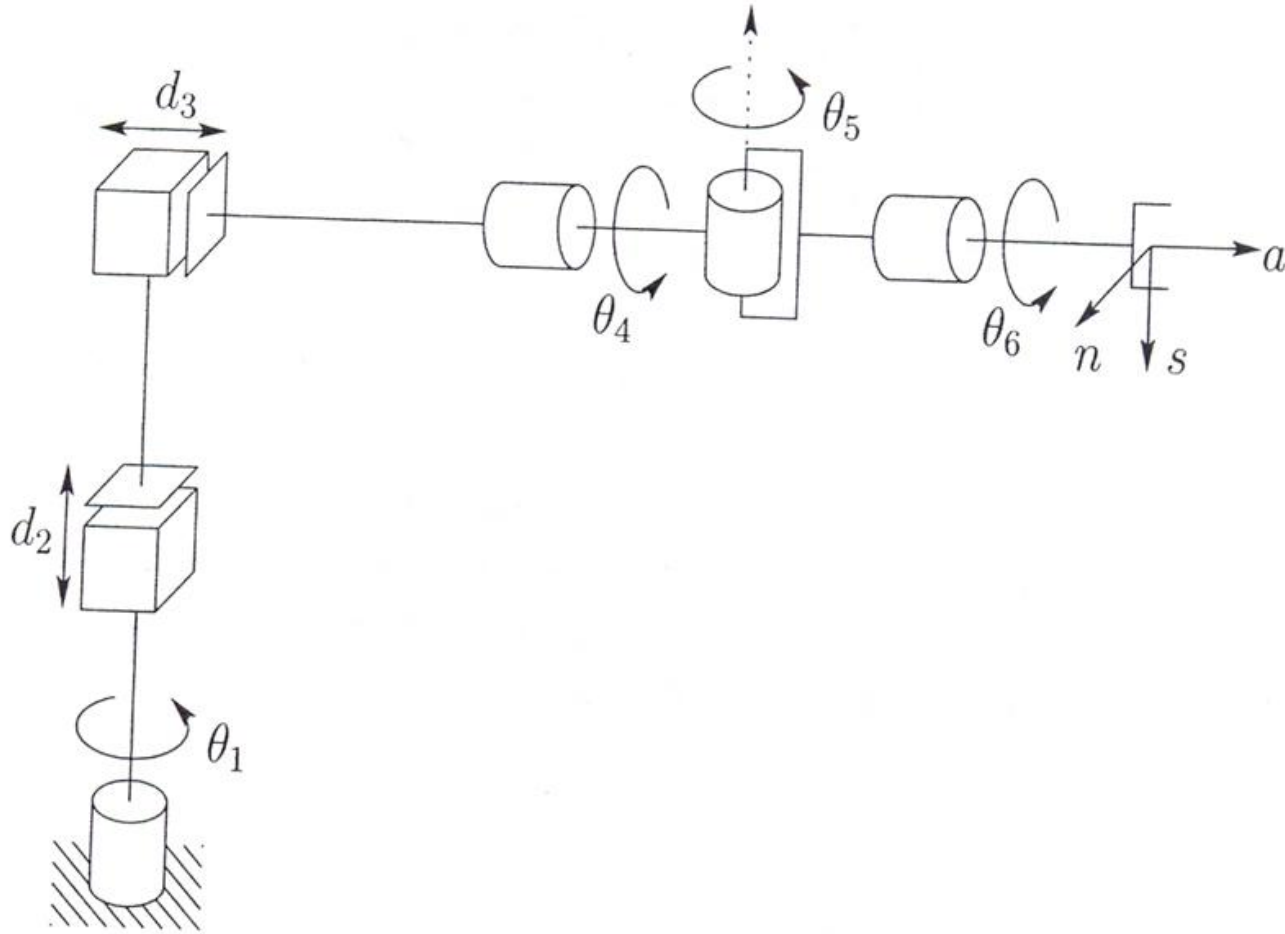
Link	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
4	0	-90	0	$\theta_4^*$
5	0	90	0	$\theta_5^*$
6	0	0	$d_6$	$\theta_6^*$

\* variable

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

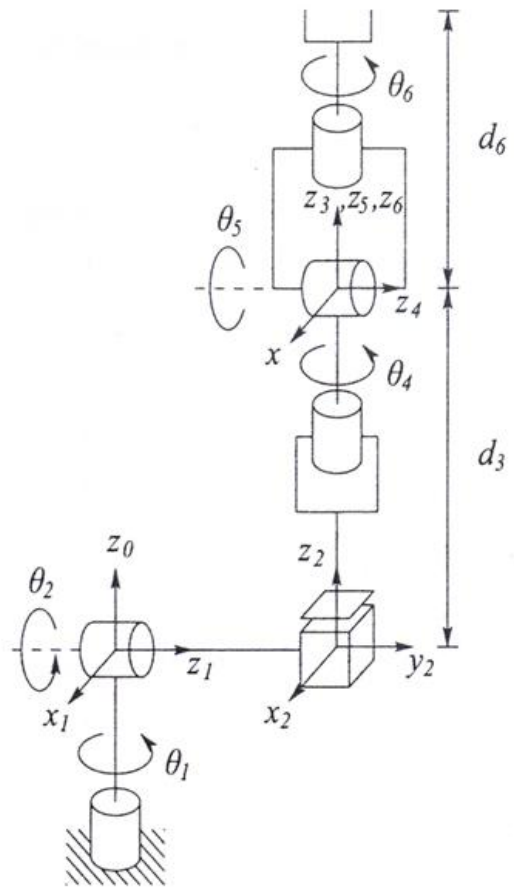
$$\begin{aligned} T_6^3 &= A_4 A_5 A_6 \\ &= \begin{bmatrix} R_6^3 & o_6^3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$T_6^0 = T_3^0 T_6^3$$

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





DH parameters for the Stanford manipulator.

Link	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$	$\theta_i$
1	0	0	-90	$\theta_1^*$
2	$d_2$	0	+90	$\theta_2^*$
3	$d_3^*$	0	0	0
4	0	0	-90	$\theta_4^*$
5	0	0	+90	$\theta_5^*$
6	$d_6$	0	0	$\theta_6^*$

\* joint variable

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_6^0 = A_1 \cdots A_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Exemplo - SCARA