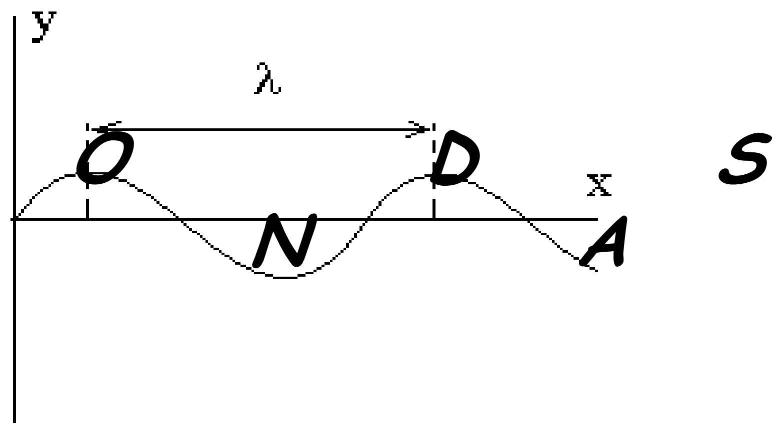
Prof. Giancarlo Brito – 2004 (revisado em 2016).

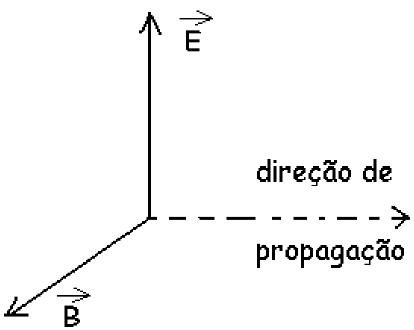


$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

Ondas

Uma onda é qualquer sinal que se transmite de um ponto a outro de um meio com velocidade definida. A transmissão do sinal entre dois pontos distantes ocorre sem que haja transporte direto de matéria de um desses pontos ao outro.

Ex. dominós tombando, o impulso se propaga como uma onda ao longo de uma fileira.



Ondas longitudinais: compressão ao longo de uma mola. a onda de compressão é sempre seguinda de uma rarefação.

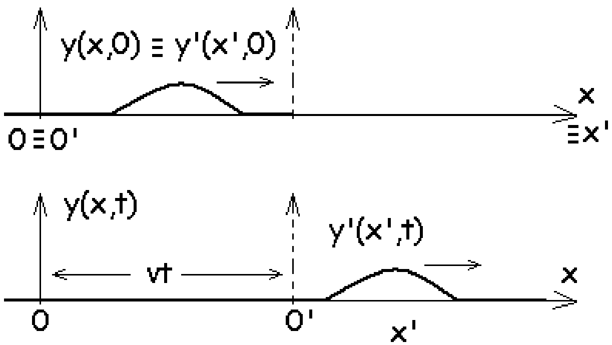
Perturbação transmitidapela onda tem lugar ao longo da direção de propagação (x) da onda. (ondas sonoras).

Ondas Transversais: A perturbação é um deslocamento na direção y, perpendicular à direção de propagação da onda. Ex. corda esticada transmitindo um pulso. Ondas eletromagnéticas onde os campos elétrico e magnético oscilam perpendiculares à direção de propagação.

Ondas sismicas, são como ondas sonoras num fluido, tensões de cisalhamento.

Ondas em uma dimensão

a)ondas progressivas: O perfil da onda na corda num dado instante t se desloca como um todo para a direita, sem mudar a forma, com velocidade v.
O'x'y' coincide com O x y



$y'(x', t) = y'(x',0) = f(x')$
é função somente de x'.

transformação de Galileu:
$x' = x - vt,\ \ y' = y$

$y(x,t) = f(x') = f(x-vt)$
$y(x,t) = y(x + \Delta x, t + \Delta t)$ para $\Delta x = v\Delta t$

numa corda finita, têm-se ondas caminhando para direita e para esquerda:
$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$

b) **ondas harmônicas**

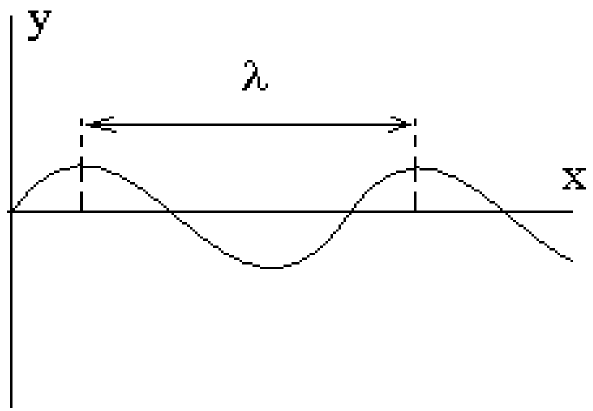
perturbação em dado ponto x => oscilação harmônica (perfil senoidal)

$f(x') = A\cos(kx' + \delta)$ onde:

k = número de onda

A = amplitude

$\omega = kv$ freq. Angular



δ = cte de fase

$y(x,t) = A\cos[k(x-vt)+\delta] = A\cos(kx - kvt + \delta) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$

$kx - \omega t + \delta$: fase da onda

$kv = \omega = 2\pi/T = 2\pi f$ (T=período; f=frequencia)

$\lambda = vt \Rightarrow k\lambda = 2\pi \quad \lambda = 2\pi/k$

$y(x,t) = A\cos[\omega t + \varphi]$ onde $\varphi = -kx - \delta$

Unidades	
$[\omega t + \delta]$	Rad (fase da onda)
λ	m
k	rad/m (m^{-1})
ω	rad/s (s^{-1})

Deslocamento com o tempo de um ponto com fase cte.

$\varphi = kx - \omega t + \delta = cte$

$$\frac{d\varphi}{dt} = k\frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v \Rightarrow \omega = kv$$

ou,

$v = \lambda . f = \lambda / T$ v: velocidade de fase

outra forma de representar a onda harmônica:

$y(x,t) = Re\{A \exp[i(kx - \omega t + \delta)]\}$ onda monocromática.

Equação de ondas

$y(x,t) = f(x')$; $x' = x - vt$

velocidade $\frac{\partial}{\partial t} y(x,t)$ aceleração $\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t)$

em relação a t:

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} f(x') = \frac{df}{dx'} - \frac{\partial x'}{\partial t} = -v\frac{df}{dx'}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y = -v\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{df}{dx'}\right] = -v\frac{d}{dx'}\left(\frac{df}{dx'}\right)\frac{\partial x'}{dt} = +v^2\frac{d^2 f}{dx'^2}$$

em relação a x:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dx'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{dt^2} = v^2\frac{d^2 f}{dx'^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

equação de ondas unidimencionais

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Em cordas vibrantes

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

μ= densidade linear da massa, T=tensão da corda

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\mu}{T} \Rightarrow |v| = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

velocidade de propagação
velocidade é tanto maior quanto maior a tensão na corda e menor a inércia (massa por unidade de comprimento)

Principio de superposição

$y_1(x,t)$
$y_2(x,t)$ são soluções de eq. de ondas unidimensionais

combinação linear tbém solução $y(x,t) = ay_1(x,t) + by_2(x,t)$

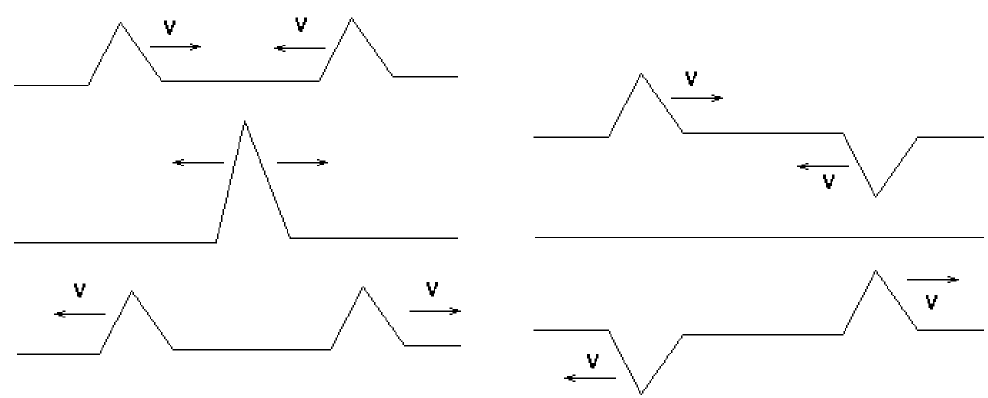
prova:

$y_1(x,t)$ é solução $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 0$ $y_2(x,t)$ é solução $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = 0$

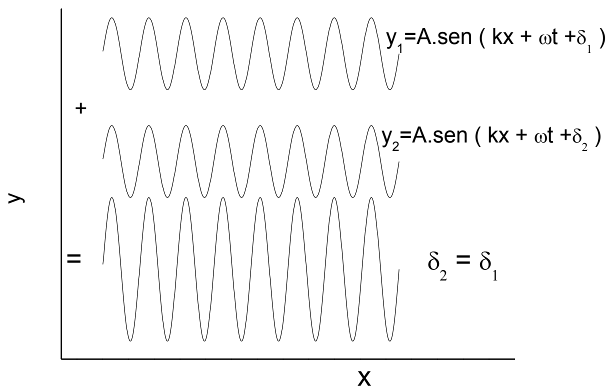
$$y(x,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[ay_1(x,t) + by_2(x,t)\right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[ay_1(x,t) + by_2(x,t)\right] = 0$$

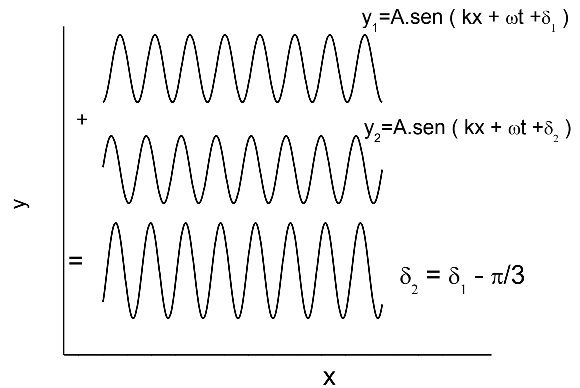
$$= \frac{1}{v^2}\left[a\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right] - \left[a\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 y2}{\partial x^2}\right]$$

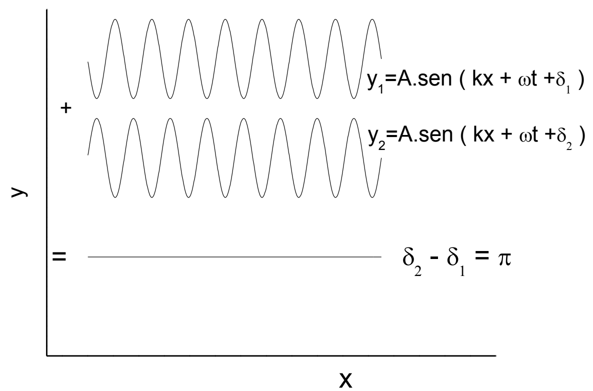
$$= a\left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\right] + b\left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\right] = 0$$



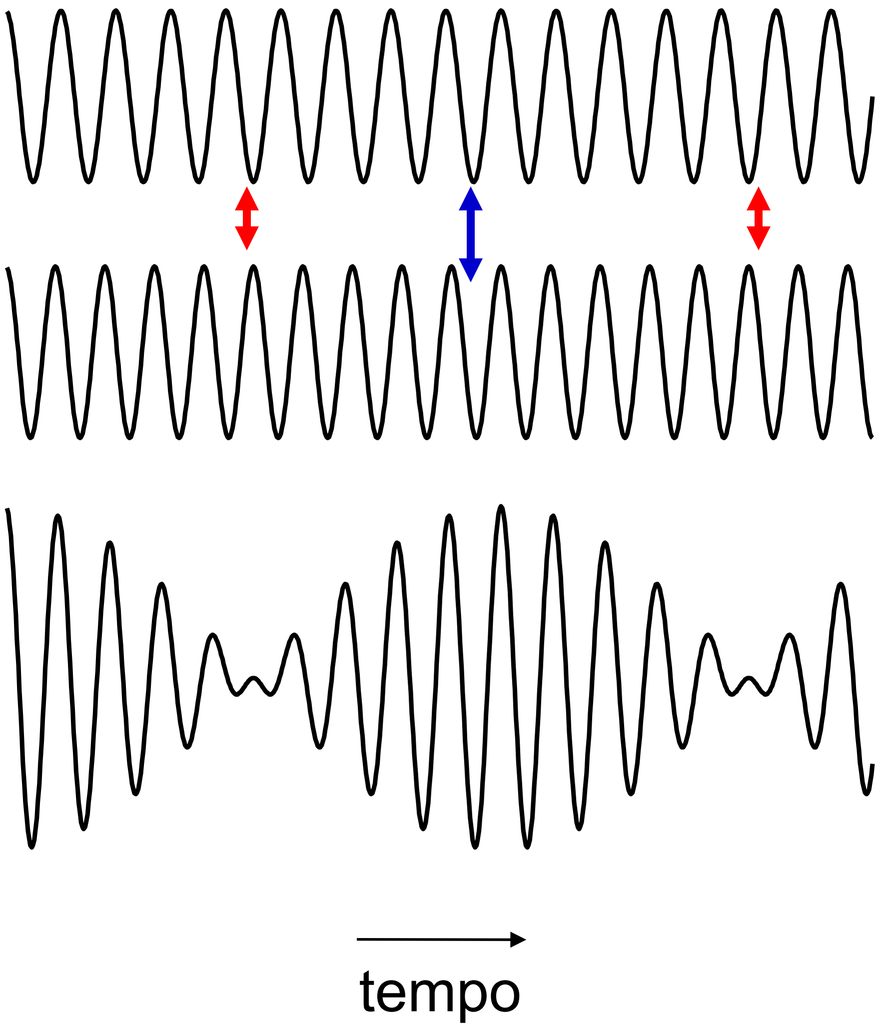
Combinação linear de ondas harmônicas (A, k e ω: ctes)







$$A_R = 2.A.\cos(\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}).sen(kx - \omega t + \frac{\delta_2 + \delta_1}{2})$$



$\cos(9x - 0.9t)$

$\cos(10x - 1t)$

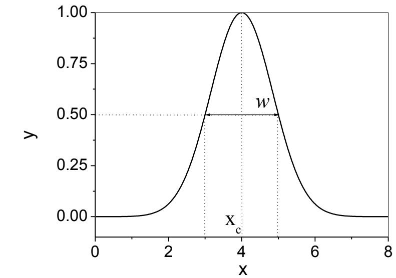
onda resultante

Reflexão de ondas

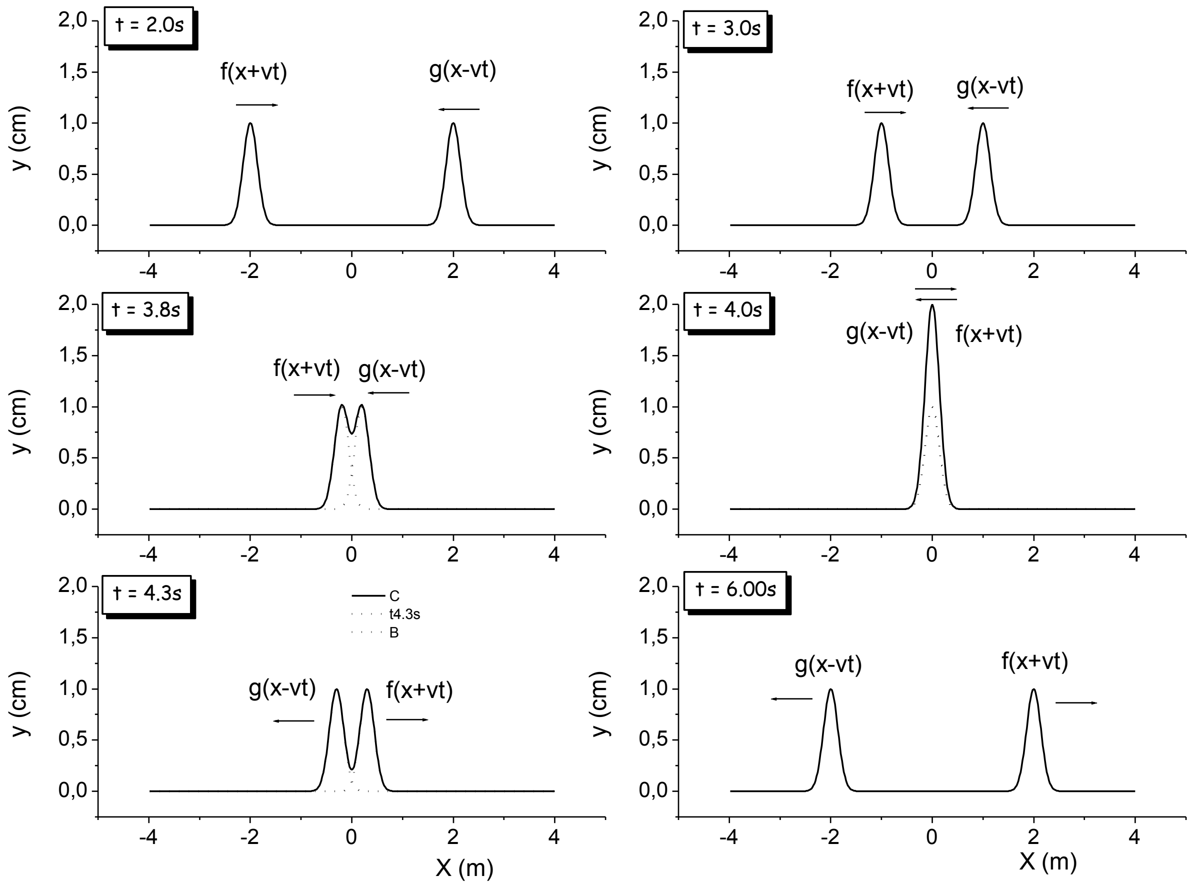
$$gauss(x) = \exp\left[-\ln(2).\left(\frac{2}{w}\right)^2.(x-vt)^2\right]$$

Superposição de 2 ondas progressivas:

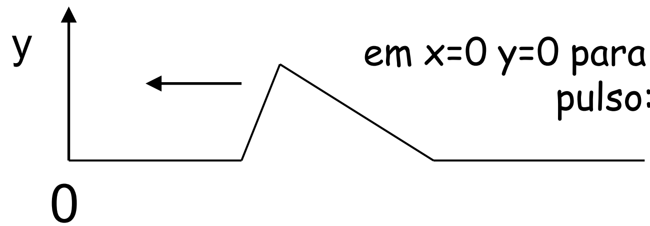
Y(x,t) = f(x-vt) + g(vt-x)



Pulso: $f(x-vt) = \exp\left[\left(\frac{2}{w}\right)^2 (x-vt)^2\right]$



EXTREMIDADE FIXA



em $x=0$ $y=0$ para qquer t
pulso: $g(x-vt)$ (conhecido!!!)

para $x=0$, $y(0,t)=0$ *(condição de contorno)*

como, $Y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$, *então*:

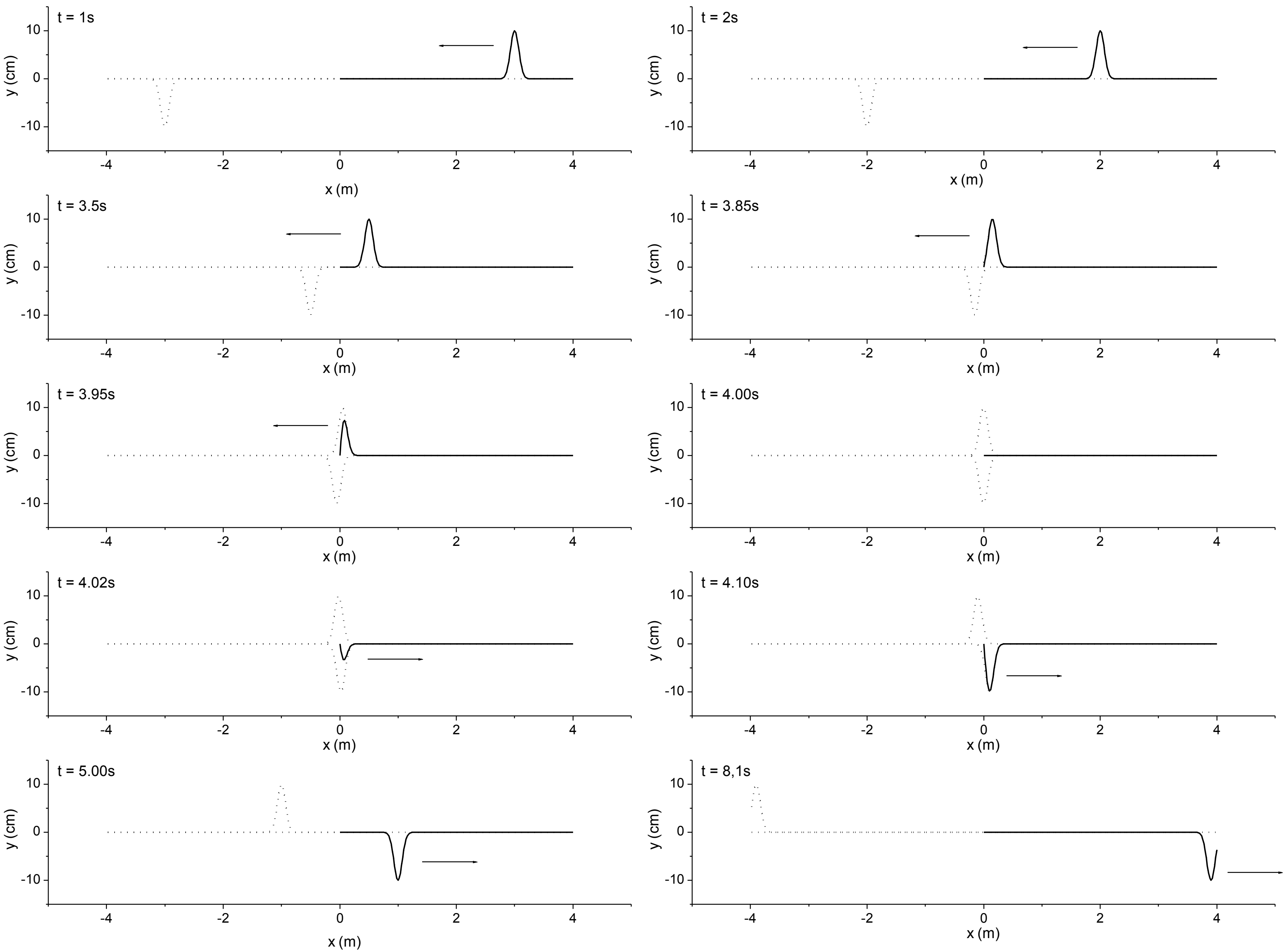
$$\mathbf{y(0,t) = f(-vt) + g(vt) = 0}$$ *, p/ qquer* t

$f(x')$ *função incógnita*

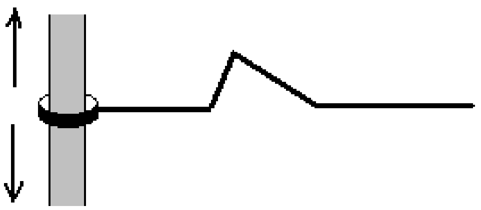
$f(x') = -g(-x')$

substituindo x' *por* $x-vt$: $\mathbf{f(x-vt) = -g(vt-x)}$

$$\mathbf{y(x,t) = g(x+vt) - g(vt-x)}$$


t = 1s
t = 2s
t = 3.5s
t = 3.85s
t = 3.95s
t = 4.00s
t = 4.02s
t = 4.10s
t = 5.00s
t = 8,1s
y (cm)
x (m)
10
0
-10
-4
-2
0
2
4

EXTREMIDADE LIVRE



-Movimenta-se livre em y
-T_y=0
-Apenas aparece T_X,

$$F_y(0,t) = -T\frac{\partial y(o,t)}{\partial x} = 0$$

"Significa que a tangente à corda na extremidade permanece sempre na horizontal"

como $Y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$

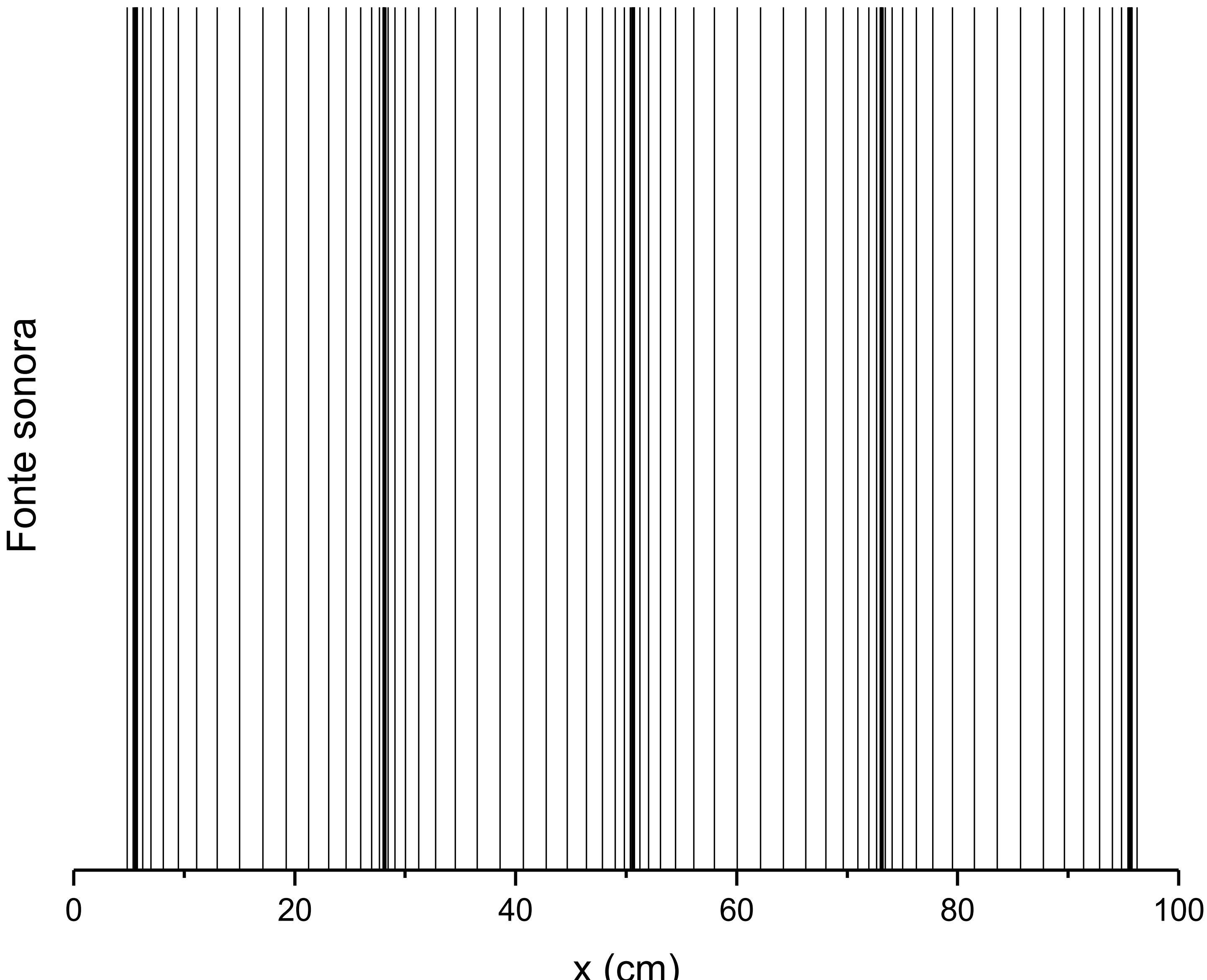
$$\frac{\partial y(o,t)}{\partial x} = f'(-vt) + g'(vt) = 0$$

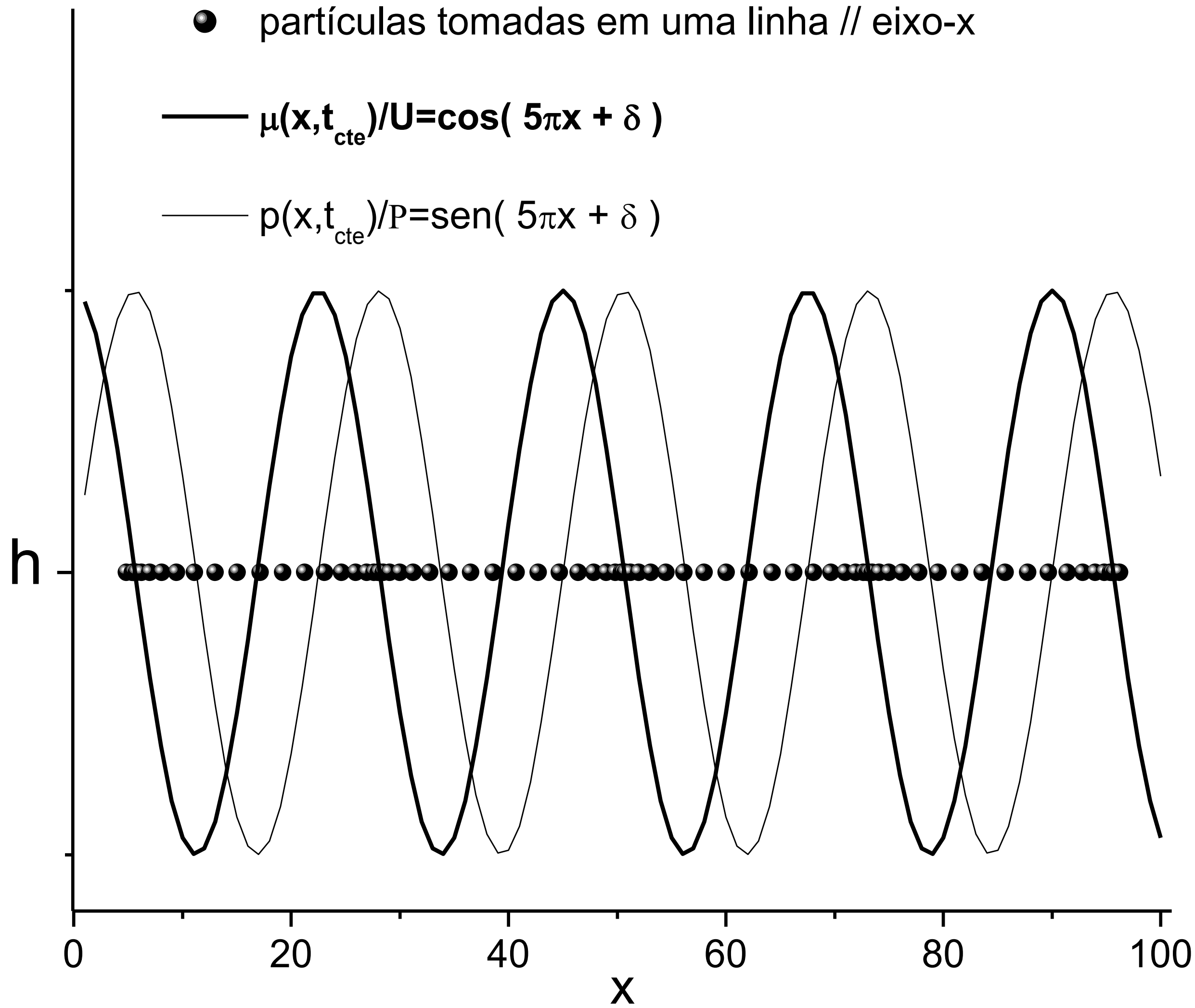
o que dá: ***f'(-vt) = -g'(vt)***
f(x') *função incógnita*

f(x')=g(-x'), *derivando dy/dx':* ***f'(x')=-g'(-x')***

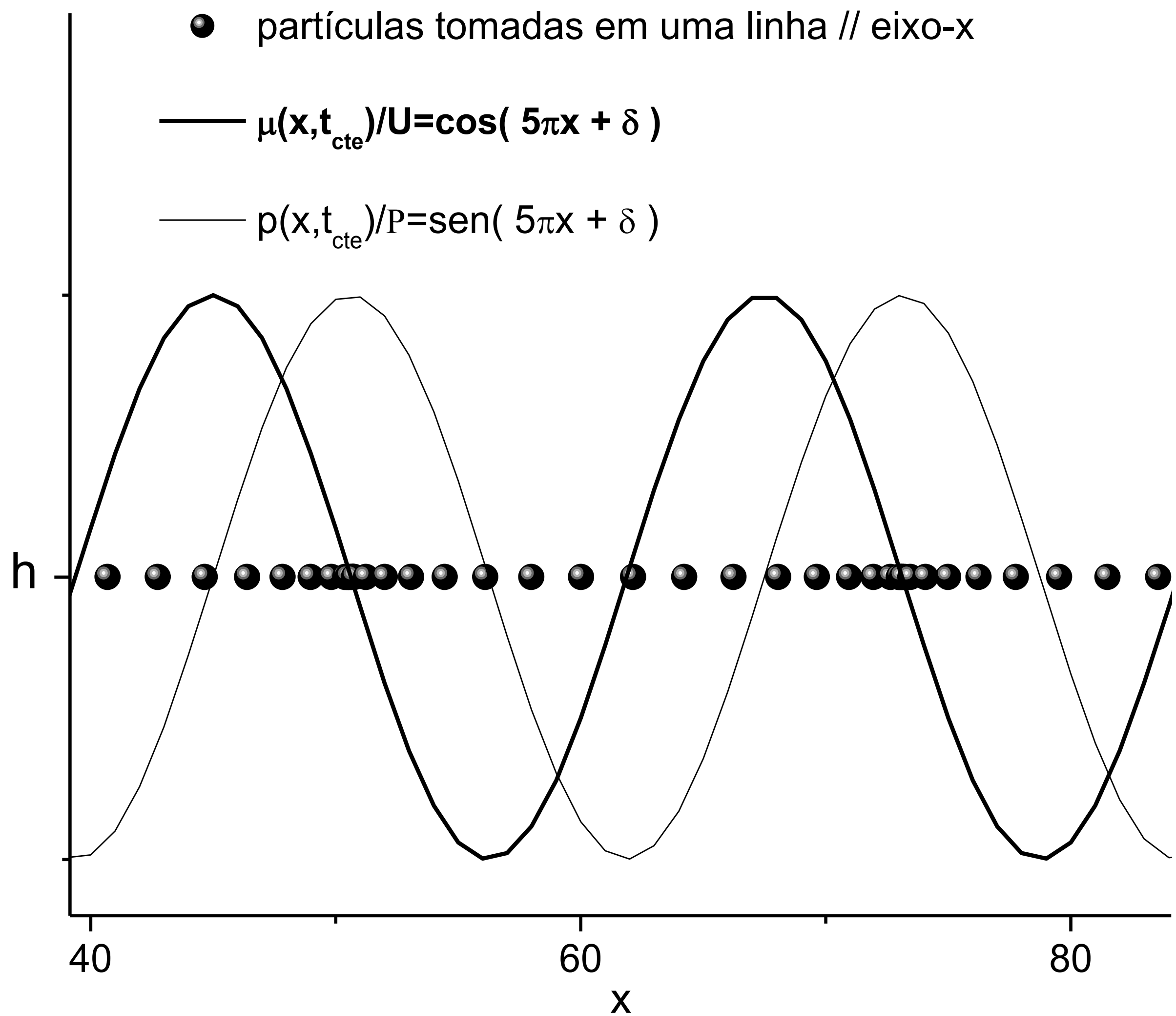
finalmente:
Y(x,t) = g(x + vt) + g(vt - x)

SOM





partículas tomadas em uma linha // eixo-x
μ(x,t_cte)/U=cos(5πx + δ)
p(x,t_cte)/P=sen(5πx + δ)
h
0
20
40
60
80
100
x



partículas tomadas em uma linha // eixo-x
$\mu(x,t_{cte})/U=\cos(5\pi x+\delta)$
$p(x,t_{cte})/P=\mathrm{sen}(5\pi x+\delta)$
h
40
60
80
x

Jean Baptiste Fourier (1768-1830)

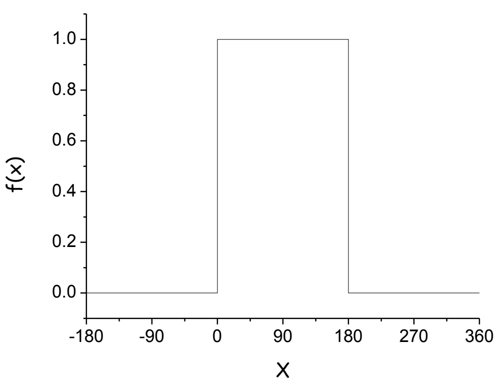
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

com:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\cos(nx).dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\sin(nx).dx$$

seja a função: $$f(x) = \begin{matrix} 1, & \text{para } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{para } \pi < x < 0 \end{matrix}$$



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x).dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x).dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x).dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x).\cos(nx).dx$$

Transformada de Fourier de uma Onda Quadrada

Exemplo