Lista de Exercícios - SMA 301 353 Cálculo I

Derivadas e Diferenciabilidade

Exercício 1. Um objeto é lançado verticalmente do chão para cima com velocidade inicial de 112 m/s e a altura atingida no instante t segundos é $f(t) = 112t - 16t^2$ metros. Pergunta-se:
a) Quais as velocidades do objeto nos instantes $t = 2$, $t = 3$ e $t = 4$ segundos?
b) Em que instante o objeto alcança a altura máxima?
c) Em que instante o objeto atinge o chão?
d) Com que velocidade o objeto atinge o chão?

Exercício 2. Um carro está a $16t^{3/2} - 24t + 16$ quilômetros a leste de um referencial fixo no instante t horas. Pergunta-se:
a) Qual a velocidade do carro no instante $t = 1/4$ horas e qual é o sentido em que ele se move?
b) Onde está o carro quando sua velocidade é zero?

Exercício 3. Em cada um dos itens abaixo, encontre, se existir, a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ nos pontos $P = (x_0, f(x_0))$ especificados:

a) $f(x) = 5x + 4$, $P_1 = (2, 14)$ *e* $P_2 = (1, 9)$ *b)* $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, $P_1 = (0, 4)$ *e* $P_2 = (1, 2)$
c) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $P = (0, 0)$ *d)* $f(x) = x \cos x$, $P = (\pi/2, 0)$

Exercício 4. Determine as abscissas dos pontos do gráfico de $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ nas quais a tangente é: a) horizontal b) paralela à reta $2y + 8x - 5 = 0$

Exercício 5. Determine o ponto P do gráfico de $y = \sqrt{2x - 4}$ tal que a tangente em P passe pela origem.

Exercício 6. Calcule a derivada das seguintes funções :

a) $f(t) = 37$, *b)* $g(x) = 17x - 65$ *c)* $H(u) = u^3 + u$

d) $F(v) = (17v - 5)^{1000}$ *e)* $g(z) = (1 + \sqrt{z})^2$ *f)* $g(u) = \dfrac{6}{u^2}$

g) $G(t) = [(1 + \dfrac{1}{t})^{-1} + 1]^{-1}$ *h)* $F(x) = \dfrac{\cos(x)\operatorname{cotg}(x)}{\sec(x) - \cos(x)}$ *i)* $f(x) = sen(9x + 4)$

j) $f(x) = cos(\dfrac{x}{2})$ *k)* $f(x) = cossec(x^2 + 4)$ *l)* $f(x) = sen(2x + 3)^4$

m) $f(x) = sec(\sqrt{x - 1})$ *n)* $f(x) = sen(\sqrt{x}) + \sqrt{sen(x)}$ *o)* $f(x) = tg^2(x)\, sec^3(x)$

p) $f(x) = \dfrac{2\cos(x)}{x^2 + \frac{1}{2}x + 1}$ *q)* $f(x) = \dfrac{x^3 \sec(x)\operatorname{tg}(x)}{(x^2 + 1)\cos(x)}$

Exercício 7. Verifique se as funções abaixo são diferenciáveis no ponto $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, se } x \leq 2 \\ x + 2 & \text{, se } x > 2 \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\pi x) & \text{, se } x \leq 2 \\ (x^2 + 1)\cos(\pi x) & \text{, se } x > 2 \end{cases}$

Exercício 8. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases}$. Encontre $f'(x)$, para todo $x \in R$.
Pergunta-se: f' é contínua em R?

Exercício 9. Calcular $f'(x)$ nos seguintes casos:

a) $f(x) = \operatorname{arctg}(12x - 7)$ *b)* $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{3x + 1}{x}\right)$ *c)* $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

d) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$ *e)* $f(x) = \ln(x + \cos(x))$ *f)* $f(x) = e^{2x} \ln\left(x \operatorname{sen}(x) + \dfrac{e^{-x}}{x^5 + 1}\right)$

g) $f(x) = e^{x^3 - \ln(x^2 + 1)}$ *h)* $f(x) = log_2(x^5)$

Exercício 10. Considere $f : R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 9 \\ 27\sqrt{x}, & x > 9 \end{cases}$.

a) Determine os pontos $x \in R$ onde f é diferenciável.
b) Onde existe f^{-1}, isto é, a função inversa de f?
c) Determine os pontos onde f^{-1} é diferenciável e calcule $(f^{-1})'$ nesses pontos.

Exercício 11. Encontre, em cada um dos itens abaixo, $\dfrac{dy}{dx}$, onde $y = y(x)$ é dada implicitamente pelas equações abaixo:

a) $\cos^2(x+y) = 1/4$ *b)* $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$ *c)* $(y^2-9)^4 = (4x^2+3x-1)^2$

d) $x^3 + x^2y - 2xy^2 + y^3 - 1 = 0$ *e)* $\operatorname{sen}(xy) + y - x^2 = 0$ *f)* $xy + 16 = 0$

g) $x \operatorname{arctg}(x) + y^2 = 4$ *h)* $\sqrt{2x+y} + \sqrt{x+2y} = 6$ *i)* $\operatorname{senh}(x^2y) + \cosh(y^2 - \cos(xy)) = 2$

Exercício 12.
a)Determine A, B, e C de modo que as curvas $y = x^2 + Ax + B$ e $y = Cx - x^2$ sejam tangentes uma a outra no ponto $(1, 0)$.
b) Encontre a equação da reta tangente e da reta normal à curva $y = x^3 - 2x^2 + 4$ no ponto $(2, 4)$.
c) Para que valores de M a reta $y = Mx$ é tangente ao círculo $y^2 + x^2 - 4x + 3 = 0$?
d) Encontrar as equações das retas tangentes à elipse $4x^2 + 9y^2 = 40$ cujos coeficientes angulares valem $-2/9$.

Exercício 13. Existem duas retas que passam por (-1,3) que são tangentes à curva $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$. Encontre uma equação de cada uma das retas.

Exercício 14. Seja $x = \cos \omega t$, onde ω é constante. Mostre que $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$.

Exercício 15. A função diferenciável $y = f(x)$ é tal que para todo $x \in dom(f)$, o ponto $(x, f(x))$ é solução da equação $xy^3 + 2xy^2 + x = 4$. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$ sabendo que $f(1) = 1$.

Exercício 16. Um ponto P move-se ao longo da elipse $x^2+4y^2 = 1$. A abscissa x está variando a uma velocidade $\dfrac{dx}{dt} = \operatorname{sen} 4t$. Mostre que: (a) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-x \operatorname{sen} 4t}{4y}$ (b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{\operatorname{sen}^2 4t + 16xy^2 \cos 4t}{16y^3}$.

Exercício 17. Suponha que f e g sejam funções tais que $f'(x) = 1/x$ e $f(g(x)) = x$. Mostre que se $g'(x)$ existe, então $g'(x) = g(x)$.

Exercício 18. Seja $f(x) = x + e^x$ e g a função inversa de f. Demonstre que g é diferenciável e que $g'(x) = \frac{1}{1+e^{g(x)}}$. Calcule $g'(1)$ e $g''(1)$.

Exercício 19. Seja $f(x) = x + x^3$.
a)Mostre que f admite função inversa g.
b)Expresse $g'(x)$ em termos de $g(x)$.
c)Calcule $g'(0)$.

Exercício 20. As funções $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

são chamadas *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólico*, respectivamente. Mostre que:
(a) senh é uma função ímpar e cosh é uma função par;
(b) $\dfrac{d}{dx} \operatorname{senh} x = \cosh x$ e $\dfrac{d}{dx} \cos x = \operatorname{senh} x$;
(c) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
(d) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$ e $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$;

(e) $e^x = \operatorname{senh} x + \cosh x$ e $e^{-x} = \cosh x - \operatorname{senh} x$.
(f) Defina $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$ e $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$. Mostre que $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.
(g) Esboce o gráfico de senh, cosh e tgh.
(h) Determine as condições para que senh, cosh e tgh sejam inversíveis e determine sua inversa.

Exercício 21.
a)Ache todas as derivadas não nulas de $f(x) = (x^2 - 1)^3$.
b)Se $f(x) = 1/x$, obtenha uma fórmula para $f^{(n)}(x)$, onde n é um inteiro positivo. Quanto é $f^{(n)}(1)$?
c)Se $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 7x$, determine a equação da tangente ao gráfico de f' no ponto $P = (2, 3)$.
d)Se $y = f(g(x))$ e f" e g" existem, use a regra da cadeia para exprimir $D_x^2 y$ em termos das derivadas primeira e segunda de f e g.

Exercício 22. Prove que a equação $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ admite 3 raízes reais distintas. Localize tais raízes.

Exercício 23. Determine a para que a equação $x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$ admita uma única raiz real.

Exercício 24. Sabe-se que uma raiz de um polinômio, P, é dupla se ela for raiz do polinômio e da sua derivada primeira, mas não for raiz da derivada segunda. Dada a equação $x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda = 0$, determine $\lambda \in R$ de tal modo que:
a) a equação acima tenha uma raiz dupla.
b) a equação tenha três raízes reais distintas.

Exercício 25. Mostre que a função $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ tem, exatamente, três pontos críticos, um deles no intervalo $(1, 2)$ outro em $(2, 3)$ e o terceiro no intervalo $(3, 4)$.

Exercício 26. Sejam $f, g : R \to R$ funções diferenciáveis em R tais que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$, $x \in R$.
a) Mostre que $(f(x) - \operatorname{sen}(x))^2 + (g(x) - \cos(x))^2 = 0$, $x \in R$.
b) Conclua que $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$, $x \in R$.