Profa. Sueli

LISTA DE EXERCÍCIOS 2 - SMA 301 353

Exercício 1. Calcule, quando existir, os seguintes limites:

$a)\ \lim_{x\to -9} 3$ $\quad b)\ \lim_{x\to 0} |5x-2|$ $\quad c)\ \lim_{x\to 1} x^3 - x^2 + 4x + 11$

$d)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-3x+4}$ $\quad e)\ \lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ $\quad f)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$

$g)\ \lim_{x\to \pi} \dfrac{1-\operatorname{sen}(x/2)}{\pi - x}$ $\quad h)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen}(x)}{x+\operatorname{sen}(x)}$ $\quad i)\ \lim_{x\to 0^+} (x + \dfrac{x}{|x|})$

$j)\ \lim_{x\to 0} x \operatorname{cossec}(x)$ $\quad k)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{2x}$ $\quad l)\ \lim_{x\to n^+} x - [x], [x] = maior\ inteiro\ \leq\ x$

$m)\ \lim_{x\to n^-} x - [x]$ $\quad n)\ \lim_{x\to 0} x^2 \cos(\dfrac{1}{x})$ $\quad o)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{1-\operatorname{tg}(x)}$

$p)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{x^5+2x^3}{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{sen}(x)}$ $\quad q)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}-\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}{x}$ $\quad r)\ \lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{3x-8}-2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

$s)\ \lim_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$ $\quad t)\ \lim_{x\to 1} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ $\quad u)\ \lim_{y\to x} \operatorname{sen}(xy) + \cos(y^2 - x)$

Exercício 2. Calcule os limites abaixo, caso existam. Se algum limite não existir, justifique.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x), \quad \text{onde } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2-(x-2)^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(b) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}, \quad \text{onde } f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 2 \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

(c) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2},$ onde f é a função do item (b),

Exercício 3. Considere $f(x) = (-1)^n$ para $\dfrac{1}{2^{n+1}} < x \leq \dfrac{1}{2^n}$ com $n \in N$.

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Existe $\lim_{x\to 0^+} f(x)$?

Exercício 4. Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, onde f é dada por

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\qquad$ (b) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Exercício 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$-x^2 + 3x \leq f(x) < \frac{x^2-1}{x-1}, \quad \forall\, x \neq 1.$$

Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ e justifique.

Exercício 6. Sejam f , $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$[g(x)]^4 + [f(x)]^4 = 4\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Calcule e justifique a) $\lim_{x\to 0} x^5 g(x)$ e b) $\lim_{x\to 3} f(x)\sqrt{x^3-27}$.

Exercício 7. Em cada item abaixo, determine o maior conjunto onde a função f em questão é contínua.

a) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x^2-x-3}$ *b)* $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ *c)* $f(x) = \sqrt{2x-3} + x^2$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ *e)* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ *f)* $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-6}}$

Exercício 8. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique sua resposta.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-1} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $p = 2$. (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} & \text{se } x \neq 3 \\ L & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $p = 3$.

(c) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ L & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $p = 0$.

Exercício 9. Determine as constantes A, B de modo que a função $f(x) = \begin{cases} 3x & , \text{se } x \leq 2 \\ Ax + B & , \text{se } 2 < x < 5 \\ -6x & , \text{se } x \geq 5 \end{cases}$ seja contínua em R.

Exercício 10. Sejam f, g : $R \to R$ funções contínuas em R tais que $f(3) = g(3)$. Pergunta-se: a função $h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{se } x \leq 3 \\ g(x) & , \text{se } x > 3 \end{cases}$ é contínua em R? Justifique sua resposta.

Exercício 11. Calcule:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{x}{\operatorname{sen}(x) - 2x}\right)$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - 3x)}{x}\right)$

Exercício 12. Resolva os itens abaixo:

(a) Suponha que $|f(x) - f(1)| \leq (x-1)^2$ para todo $x \in R$. Mostre que f é contínua no ponto $x_0 = 1$.

(b) Considere f, g : $R \to R$ funções que satisfazem $|f(x) - f(x_0)| \leq k|g(x) - g(x_0)|$, para todo $x \in R$, onde $k > 0$ está fixo. Assumindo que g é contínua em x_0, mostre que f também será contínua em x_0.

Exercício 13. *Mostre que a equação*

$$x^3 - \frac{1}{1+x^4} = 0$$

admite pelo menos uma raiz real.

Exercício 14. Seja f : $[0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua. Mostre que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Exercício 15. Resolva os itens abaixo:

(a) Mostre que existe um número real x_0 tal que $x_0^5 - 4x_0 + 1 = 7,21$.

(b) Considere f, g : $[a, b] \to R$ funções contínuas tais que $f(a) < g(a)$ e $g(b) < f(b)$. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

Exercício 16. Um corredor parte do repouso e corre numa pista circular em um único sentido. Ele para quando chega ao ponto de partida. Mostre que, pelo menos, uma vez durante esta volta, ele deve ter desenvolvido a mesma velocidade em pontos diametralmente opostos.

Exercício 17. Um alpinista começa a escalar uma montanha às 8:00 horas do sábado e chega ao topo às 16:00 horas do mesmo dia. Acampa no topo e desce às 8:00 horas do domingo, chegando no ponto original de saída às 16:00 horas. Mostre que em algum horário no domingo ele estava à mesma altura em que esteve no mesmo horário no sábado.

Gabarito

Exercício 1.

a) 3	*b) 2*	*c) 15*	*d) 0*	*e)* $2\sqrt{3}$	*f)* $\frac{2}{\pi}$
g) 0	*h) 0*	*i) 1*	*j) 1*	*k)* $\frac{1}{2}$	*l) 0*
m) 1	*n) 0*	*o)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$	*p) 4*	*q) 1*	*r)* $3\frac{\sqrt{2}}{2}$
s) 0 para $a = 0$ *e* $\frac{3a}{2}$ *para* $a \neq 0$	*t)* $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0$	*u)* $sen(x^2) + cos(x^2 - x)$			

Exercício 2. *Os limites de a), b) e c) existem. Se os limites em b) e c) não fossem laterais, não existiriam. (Você sabe o porquê?)*

Exercício 3. *Dica: considere o limite da função percorrendo intervalos de* n *par e outro limite com a função percorrendo intervalos de* n *ímpar.*

Exercício 4. *a) existe* *b) não existe*

Exercício 5. *Dica: Use o teorema do confronto.*

Exercício 6. *Dica: Com a ajuda da equação, argumente que as funções* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são limitadas.*

Exercício 7.
a) $Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{1; \frac{3}{2}\}$ *b)* $Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ *c)* $Dom_f = \{x \in \mathbb{R}/x \geq \frac{3}{2}\}$
d) $Dom_f = \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$ *e)* $Dom_f = \mathbb{R}$ *f)* $Dom_f = \{x \in \mathbb{R}/6 \leq x \leq 9\} = [6; 9]$

Exercício 8. *a)* $L = 0$ *b)* $L = \frac{\sqrt{3}}{6}$ *c)* $L = 0$

Exercício 9. $A = -12$ *e* $B = 30$

Exercício 10. *Sim é contínua. Os limites laterais de* h *coincidem com* $h(3)$*.*

Exercício 11. *a)* $cos(-1)$ *b)*$sen(3)$

Exercício 12. *Demonstre a) e b) com o auxílio do teorema do confronto.*

Exercício 13. *Demonstre com o auxílio do teorema do valor intermediário.*

Exercício 14. *Em outras palavras, demonstre o teorema do ponto fixo.*

Exercício 15. *Demonstre a) e b) com o auxílio do teorema do valor intermediário.*

Exercício 16. *Demonstre com o auxílio do teorema do valor intermediário.*

Exercício 17. *Demonstre com o auxílio do teorema do valor intermediário.*