Exercícios de - Cálculo I (Desigualdades)

2015

Exercício 1. Encontre todos os números reais que satisfazem cada uma das desigualdades:

(a) $\dfrac{7}{x} > 2$ (b) $\dfrac{x}{x-3} < 4$ (c) $(x+3)(x+4) > 0$ (d) $\dfrac{x+1}{2-x} < \dfrac{x}{2+x}$
(e) $2 \leq 5 - 3x < 11$ (f) $0 < x^2 - 1 \leq 1$ (g) $|x+1| \leq |2-x|$ (h) $|x^2 - 4x - 5| \geq |x-1|$
(i) $|x| + |2-x| > -|4x-1|$.

Exercício 2. Mostre que para quaisquer que sejam os números reais x e y, temos:

$$|xy| = |x|\,|y|.$$

Exercício 3. *(a)* Mostre que $|x| \leq |y|$ se e somente se $x^2 \leq y^2$.
(b) Se $x \geq 0$ e $x \leq y$, mostre que $x^2 \leq y^2$.
(c) Mostre que a afirmação anterior é falsa se considerarmos x, y quaisquer números reais.

Exercício 4. Mostre que quaisquer que sejam os números reais x e y, temos que

$$x^3 < y^3 \text{ se e somente se } x < y.$$

Exercício 5. Expresse cada um dos conjuntos abaixo em notação de intervalo.

(a) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid 4x - 3 < 6x + 2 \,\}$ (b) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid |2x-3| \leq 1 \,\}$
(c) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1 \,\}$ (d) $\{\, x \in \mathbb{R} \mid 3x + 1 < \dfrac{x}{3} \,\}$.

Exercício 6. Determine $r > 0$ de modo que $(4-r, 4+r) \subset (2, 5)$.

Exercício 7. Mostre que para todo a, b real tem-se $|a+b| \leq |a| + |b|$. Como consequência deste fato mostre que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Exercício 8. Dê exemplo de números reais a e b tais que $|a+b| < |a| + |b|$. O que se pode dizer a respeito dos sinais desses números?

Exercício 9. O número $x = \dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$ é racional ou irracional? Justifique sua resposta.

Exercício 10. Para cada um dos itens abaixo indique os intervalos para os quais a função é positiva. Determine também suas raízes.

a) $f(x) = x - 4$ *b)* $f(x) = (x-3)(x+4)$ *c)* $f(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$ *d)* $\dfrac{x+1}{(x-3)(x+4)}$
e) $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ *f)* $f(x) = x \operatorname{sen} x$ *g)* $f(x) = \frac{1}{x-\pi} \operatorname{sen} x$ *h)* $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 - \pi}$

Respostas: Exercício 1 (a) $(0, 7/2)$, (b) $x \neq 3, 4$, (c) $x < -4$ ou $x > -3$, (d) $\varnothing$, (e) $(-2, 1]$, (f) $[-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$, (g) $(-\infty, 1/2]$, (h) $(-\infty, \frac{3-\sqrt{33}}{2}) \cup (\frac{5-\sqrt{41}}{2}, \frac{3+\sqrt{33}}{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{41}}{2}, \infty)$, (i) $\mathbb{R}$.
Exercício 5 (a) $(-5/2, \infty)$, (b) $[1, 2]$, (c) $(-1, 1)$, (d) $(-\infty, -3/8)$. Exercício 9 É racional.
Exercício 10
(a) $(4, \infty)$, (b) $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$ e $-4, 3$, (c) $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$ e 3, (d) $(-4, -1) \cup (3, \infty)$ e -1,
(e) $x \in]2k\pi, (2k+1)[\cup] - (2k+1)\pi, -2k\pi[;\ \forall k \in \{0, 1, 2, \dots\}$,
(f) $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi) \cup (-\pi, 0)$ e $\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$,
(g) $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^*} (2k\pi, (2k+1)\pi/2) \cup (-\pi, 0)$ e $\{k\pi; k \in \mathbb{Z} \text{ e } k \neq 1\}$,
(h) $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{-2k\pi, -(2k-1)\pi) \cup (2k\pi, (2k+1)\pi)\} \cup (-\sqrt{\pi}, 0) \cup (\sqrt{\pi}, \pi)$ e $\{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.